Université Lyon I
1er semestre 2010-2011

Math-IV-Algèbre (L2)
Examen final

Mardi 18 janvier 2011
13h -15h

Documents et calculatrices interdits

3 **Question de cours :** Définir le noyau d'une forme quadratique.

13 **Exercice 1** Soit $\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}$.

On pose :

$$e := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, K := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

1 (0,5 pour famille libre +0,5 pour génératrice) a) Montrer que (e, I, J, K) est une base de $\mathbb{H}$ vu comme $\mathbb{R}$−espace vectoriel.

1 — b) Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-espace des matrices 2×2 complexes stable par le produit.

0,5 + 1 — c) On pose $q(A) := -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A^2)$ si $A \in \mathbb{H}$. Montrer que $q(A) \in \mathbb{R}$ si $A \in \mathbb{H}$. Montrer que q est une forme quadratique réelle en donnant la forme bilinéaire symétrique associée.

0,5 + 0,5 + 0,5 — d) Si x_1, x_2, x_3, x_4 sont des réels, calculer $q(x_1 e + x_2 I + x_3 J + x_4 K)$. En déduire la signature de q et sa matrice dans la base e, I, J, K.

1 e) On pose $\mathbb{H}_0 := \mathbb{R}I \oplus \mathbb{R}J \oplus \mathbb{R}K$. On pose $\langle A, A' \rangle := -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(AA')$ si $A, A' \in \mathbb{H}_0$. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{H}_0$ et que, pour ce produit scalaire, I, J, K est une base orthonormale.

0,5 f) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on pose $A^* := {}^t\overline{A} := \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$.

On pose $S := \{s \in \mathbb{H} : s^* s = e\}$. Montrer que $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in S \Leftrightarrow |a|^2 + |b|^2 = 1$.

1,5 g) Montrer que si $h \in \mathbb{H}$, alors : $h \in \mathbb{H}_0 \Leftrightarrow h^* = -h$. En déduire que : $shs^* \in \mathbb{H}_0$ pour tout $s \in S$ et tout $h \in \mathbb{H}_0$.

1 + 2 h) Si $s \in S$, on pose $\Phi(s) : \mathbb{H}_0 \to \mathbb{H}_0, h \mapsto shs^*$. Montrer que $\langle \Phi(s)(h), \Phi(s)(h') \rangle = \langle h, h' \rangle$ si $s \in S$ et $h, h' \in \mathbb{H}_0$. Qu'en déduire pour la matrice de $\Phi(s)$ dans la base I, J, K ?

2 i) Soit θ un réel. Soit $t := \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice de $\Phi(t)$ dans la base I, J, K.

6 **Exercice 2** Soit $\mathscr{C}$ la conique d'équation :

$$x^2 + xy + y^2 + 3x + 4y + 4 = 0 .$$

a) Trouver une base orthonormale formée de vecteurs propres de la ma-

1,5 trice $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. (1 pt pour les vecteurs propre, + 0,5 si normalisés)

b) Montrer que $\mathscr{C}$ est une ellipse et déterminer son centre et ses axes

2,5 principaux.

c) Représenter par un dessin $\mathscr{C}$, ses axes principaux et les axes de coor-

2 données ($x = 0$) et ($y = 0$).

5 **Exercice 3** a) Soient a, b, c trois réels. Calculer le déterminant de la matrice :

1

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & b & 0 \\ 0 & -b & 0 & c \\ 0 & 0 & -c & 0 \end{pmatrix} .$$

Soit E un $\mathbb{R}$−espace vectoriel de base e_1, e_2, e_3, e_4.
Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire alternée telle que :

$$\varphi(e_1, e_2) = 2,\ \varphi(e_1, e_3) = -1,\ \varphi(e_1, e_4) = 3,$$

$$\varphi(e_2, e_3) = 4,\ \varphi(e_2, e_4) = -2,$$

$$\varphi(e_3, e_4) = 1 .$$

2 b) Soit A la matrice de φ dans la base e_1, e_2, e_3, e_4. Déterminer A.

c) Soit $F := \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$. Trouver une base e'_3, e'_4 de

1

$$F^\perp = \{v \in E \ : \ \forall w \in F, \ \varphi(v, w) = 0\} .$$

d) Donner la matrice de φ dans la base e_1, e_2, e'_3, e'_4 et en déduire une matrice inversible P telle que :

2

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$