Cours : Soit $q : E \to \mathbb{K}$ une forme quadratique.

Il existe une unique forme bilinéaire $B : E \times E \to \mathbb{K}$ symétrique telle que $B(x,x) = q(x)$ pour tout $x \in E$.

Le noyau de q est $\operatorname{Ker} q = \{ x \in E \mid \forall y \in E,\ B(x,y) = 0 \}$

Exercice 1 :

a) $e, I, J, K \in \mathbb{H}$.

Si $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{H}$, alors :

$$x_1 e + x_2 I + x_3 J + x_4 K = \begin{pmatrix} x_1 + i x_2 & x_3 + i x_4 \\ -x_3 + i x_4 & x_1 - i x_2 \end{pmatrix}$$

Donc $x_1 e + x_2 I + x_3 J + x_4 K = 0 \iff x_1 = x_2 = 0$ et $x_3 = x_4 = 0$.

Les matrices e, I, J, K forment une famille <u>libre</u> de $\mathbb{H}$.

Si $\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$, on pose $x_1 = Re(a)$, $x_2 = Im(a)$

$x_3 = Re(b)$, $x_4 = Im(b)$

et on a bien : $x_1 e + x_2 I + x_3 J + x_4 K = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$.

Donc e, I, J, K est une famille <u>génératrice</u> de $\mathbb{H}$.

C'est donc une base.

b) Si $\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ -\overline{b'} & \overline{a'} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$, alors :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ -\overline{b'} & \overline{a'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - b\overline{b'} & ab' + \overline{a'}b \\ -\overline{(ab' + \overline{a'}b)} & \overline{aa' - b\overline{b'}} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$$

c) Si $A \in \mathbb{H}$, alors $A^2 \in \mathbb{H}$ donc $-\frac{1}{2} Tr(A^2) = q(A) \in \mathbb{R}$

(En effet il existe $a_2 \in \mathbb{C}$ tel que $A^2 = \begin{pmatrix} a_2 & * \\ * & \overline{a_2} \end{pmatrix}$

donc $Tr(A^2) = a_2 + \overline{a_2} = 2 Re(a_2) \in \mathbb{R}$)

La forme bilinéaire symétrique $B : A, A' \mapsto -\frac{1}{2} Tr(AA')$

vérifie $B(A,A) = q(A)$.

Donc B est la forme bilinéaire symétrique associée à q.

d) $q(x_1 e + x_2 I + x_3 J + x_4 K)$

$$= -\frac{1}{2} \operatorname{Tr}\left(\begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 \\ -x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix}^2 \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \operatorname{Tr}\left(\begin{array}{c|c} x_1^2 - x_2^2 + 2ix_1x_2 - x_4^2 - x_3^2 & * \\ \hline * & x_1^2 - x_2^2 - 2ix_1x_2 - x_4^2 - x_3^2 \end{array} \right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_4^2 - x_3^2 \right)$$

$$= -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

Donc q est une forme quadratique (c'est un polynôme homogène de degré 2 en les x_i) de signature $(3,1)$.

et $\operatorname{Mat}(q)_{e,I,J,K} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

e) La matrice de $\langle \cdot , \cdot \rangle$ dans la base I, J, K est

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

donc I, J, K est une base orthonormale et $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est définie positive. C'est donc un produit scalaire.

f) Si $s = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, alors

$$s^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix}$$

donc $s^* s = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & 0 \\ 0 & |a|^2 + |b|^2 \end{pmatrix}$.

D'où $s \in S \iff s^* s = e \iff |a|^2 + |b|^2 = 1$

g) si $h = x_1 e + x_2 I + x_3 J + x_4 K$, alors

$$h^* = x_1 e - x_2 I - x_3 J - x_4 K \quad \text{car} \quad I^* = -I,\ J^* = -J,\ K^* = -K.$$

donc $h^* = -h \iff x_1 e - x_2 I - x_3 J - x_4 K = -x_1 e + x_2 I - x_3 J - x_4 K$

$\iff x_1 = 0$

$\iff h \in \mathbb{H}_0$.

Si $s \in S$ et $h \in \mathbb{H}_0$, alors $shs^* \in \mathbb{H}$ car $\mathbb{H}$ est stable par produit. Donc $shs^* \in \mathbb{H}_0 \iff (shs^*)^* = -shs^*$

$\iff sh^*s^* = -shs^*$ (car $s^{**} = s$)

$\iff h^* = -h$

$\iff h \in \mathbb{H}_0$.

h) $\langle \Phi(s)(h), \Phi(s)(h') \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{Tr}(shs^* sh's^*)$

$= -\frac{1}{2} \operatorname{Tr}(shh's^*)$

$= -\frac{1}{2} \operatorname{Tr}(s^*shh')$

$= -\frac{1}{2} \operatorname{Tr}(hh')$

$= \langle h, h' \rangle$.

Donc $\Phi(s)$ préserve le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Comme I, J, K est une base orthonormale, la matrice de $\Phi(s)$ est donc une matrice orthogonale.

i) $\Phi(t)(I) = I$, $\Phi(t)(J) = \cos\theta J + \sin\theta K$, $\Phi(t)(K) = -\sin\theta J + \cos\theta K$

donc $\operatorname{Mat}(\Phi(t))_{I,J,K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est :

$$\chi_A(x) = X^2 - 2X + \frac{3}{4} = \left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X - \frac{3}{2}\right)$$

Donc A a pour valeurs propres $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$.

Soit $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$Au = \frac{1}{2}u \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + \frac{1}{2}u_2 = \frac{1}{2}u_1 \\ \frac{1}{2}u_1 + u_2 = \frac{1}{2}u_2 \end{cases} \Leftrightarrow u_1 + u_2 = 0.$$

Donc $\operatorname{Ker}\left(A - \frac{1}{2}I_2\right) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Le vecteur $u := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ est de norme 1.

De même, on trouve : $\operatorname{Ker}\left(A - \frac{3}{2}I_2\right) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Donc les vecteurs $u := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $v := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ forment une base orthonormale de vecteurs propres de A.

b) Comme A a deux valeurs propres > 0, la conique $\mathcal{C}$ est une ellipse, l'ensemble vide ou un point.

Cherchons le centre $\omega = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ de $\mathcal{C}$.

Il suffit de résoudre $\partial_x F(\omega) = \partial_y F(\omega) = 0$ où

$$F(x,y) := x^2 + xy + y^2 + 3x + 4y + 4.$$

D'où : $\omega = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ doit vérifier

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + 3 = 0 \\ \alpha + 2\beta + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{-2}{3} \\ \beta = \frac{-5}{3} \end{cases}$$

5

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = O + x_1 u + x_2 v$

On a donc $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{3}{2} x_2^2 = -F(O)$

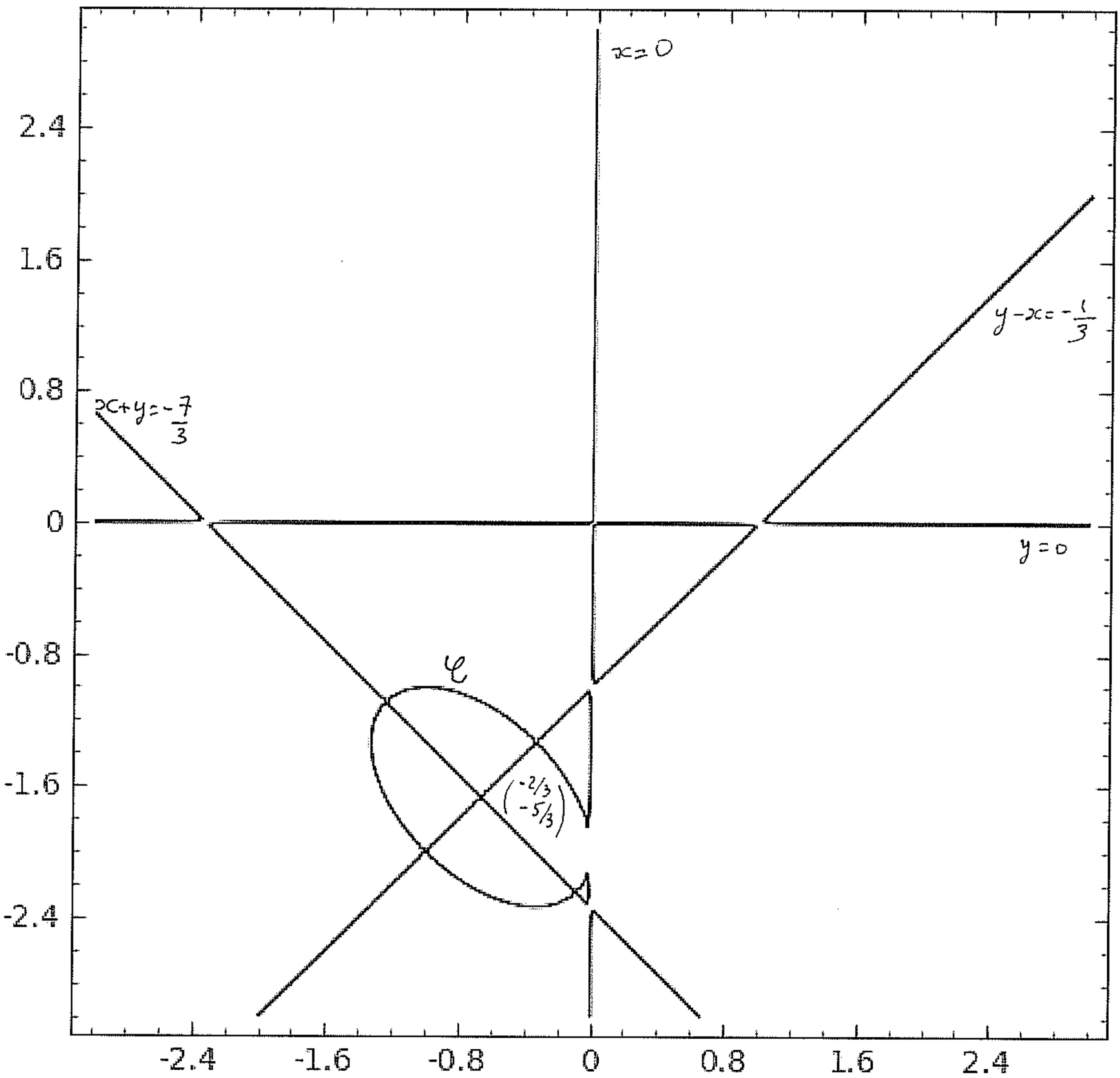
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{3}{2} x_2^2 = -\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{10}{9} + \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 2 - \frac{20}{3} + 4\right)$$

$$= \frac{1}{3}$$

La conique $\mathcal{C}$ est donc une ellipse.

Ses axes sont les droites

$O + \mathbb{R}u = \left(x + y = -\frac{7}{3}\right)$ et $O + \mathbb{R}v = \left(y - x = -\frac{1}{3}\right)$



2.4
1.6
0.8
0
-0.8
-1.6
-2.4
-2.4
-1.6
-0.8
0
0.8
1.6
2.4
$x=0$
$y-x=-\frac{1}{3}$
$x+y=-\frac{7}{3}$
$y=0$
$\mathcal{C}$
$\begin{pmatrix}-2/3\\-5/3\end{pmatrix}$

6

a) $$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & b & 0 \\ 0 & -b & 0 & c \\ 0 & 0 & -c & 0 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ -b & 0 & c \\ 0 & -c & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a^2 \begin{vmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a^2 c^2$$

b) Comme φ est alternée, φ est antisymétrique

donc pour tous $1 \leq i, j \leq 4$, $\varphi(e_i, e_j) = -\varphi(e_j, e_i)$

et $\varphi(e_i, e_i) = 0$.

Donc $A = \mathrm{Mat}(\varphi)_{e_1, e_2, e_3, e_4} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $F^{\perp} = \{ v \in E \,/\, \varphi(v, e_1) = \varphi(v, e_2) = 0 \}$

Si $v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4$,

$\varphi(v, e_1) = x_2\, \varphi(e_2, e_1) + x_3\, \varphi(e_3, e_1) + x_4\, \varphi(e_4, e_1)$

$= -2x_2 + x_3 - 3x_4$

et $\varphi(v, e_2) = 2x_1 - 4x_3 + 2x_4$.

Donc : $x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 \in F^{\perp}$

$$\iff \begin{cases} -2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 \quad -4x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 2x_3 - x_4 \\ x_2 = \frac{1}{2} x_3 - \frac{3}{2} x_4 \end{cases}$$

~~Une base de $F^{\perp}$ est donc donnée par les vecteurs~~ $\cancel{e_3' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}}$ $\cancel{e_4' = \begin{pmatrix} -1 \\ -3/2 \\ 0 \end{pmatrix}}$

Les vecteurs $e_3' := \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_4' := \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment donc une base de $F^\perp$.

d) Dans la base e_1, e_2, e_3', e_4', la matrice de φ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -c & 0 \end{pmatrix}$$

où $c = \varphi(e_3', e_4') = \varphi\left(2e_1 + \frac{1}{2}e_2 + e_3, -e_1 - \frac{3}{2}e_2 + e_4\right)$

$$\begin{aligned} &= -3\varphi(e_1, e_2) + 2\varphi(e_1, e_4) \\ &\quad + \frac{1}{2}\varphi(e_1, e_2) + \frac{1}{2}\varphi(e_2, e_4) \\ &\quad + \varphi(e_1, e_3) + \frac{3}{2}\varphi(e_2, e_3) + \varphi(e_3, e_4) \\ &= -6 + 6 + 1 - 1 - 1 + 6 + 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Donc dans la base $\frac{e_1}{2}, e_2, \frac{e_3'}{2}, \frac{e_4'}{2}$, par exemple la matrice de φ est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

donc ${}^tPAP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/4 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

la matrice de passage de la base e_1, e_2, e_3, e_4 dans la base

$\frac{e_1}{2}, e_2, \frac{e_3'}{2}, \frac{e_4'}{2}$