(1) Corrigé du contrôle partiel du 2 novembre 2010

Exercice 1

0) La famille $\{1, X, X^2\}$ est une base de E. Donc $\dim E = 3$.

1) Les applications ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 sont des formes linéaires sur E, linéairement indépendantes car : $\forall\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 + \lambda_3\phi_3 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1\phi_1(1) + \lambda_2\phi_2(1) + \lambda_3\phi_3(1) = 0 \\ \lambda_1\phi_1(X) + \lambda_2\phi_1(X) + \lambda_3\phi_3(X) = 0 \\ \lambda_1\phi_1(X^2) + \lambda_2\phi_1(X^2) + \lambda_3\phi_3(X^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_3 = 0 \quad L_3 - L_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Donc ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 forment une base de E^* et il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\phi_4 = \alpha\phi_1 + \beta\phi_2 + \gamma\phi_3$

Comme $(1, X, X^2)$ est une base de E,

$$\phi_4 = \alpha\phi_1 + \beta\phi_2 + \gamma\phi_3 \Longleftrightarrow \begin{cases} \phi_4(1) = \alpha\phi_1(1) + \beta\phi_2(1) + \gamma\phi_3(1) \\ \phi_4(X) = \alpha\phi_1(X) + \beta\phi_2(X) + \gamma\phi_3(X) \\ \phi_4(X^2) = \alpha\phi_1(X^2) + \beta\phi_2(X^2) + \gamma\phi_3(X^2) \end{cases}$$

car : $\int_0^\pi \sin x = 2$, $\int_0^\pi x\sin x\,dx = \pi$, $\int_0^\pi x^2 \sin x\,dx = \pi^2$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2 = \alpha + \beta + \gamma \\ \pi = \beta + 2\gamma \\ \pi^2 = \beta + 4\gamma \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ \beta + 2\gamma = \pi \\ 2\gamma = \pi^2 - \pi \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 + \frac{\pi^2}{2} - \frac{3\pi}{2} \\ \beta = 2\pi - \pi^2 \\ \gamma = (\pi^2 - \pi)/2 \end{cases}$$

②

2) a) La fonction q est une forme quadratique de forme polaire $f_q(P,Q) = \frac{P''(0)Q'(0)+Q''(0)P'(0)}{2} + \frac{P''(0)Q(0)+Q''(0)P(0)}{2}$

$+ \frac{P'(0)Q(0)+P(0)Q'(0)}{2}$

Dans la base $1, X, X^2$ de E :

$q(a+bX+cX^2) = 2bc + ac + ab$

donc $\mathrm{Mat}(f_q)_{1,X,X^2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Notons A cette matrice

b) le rang de f_q est le rang de A.

On $\det A = \frac{5}{8} \neq 0$ donc A est inversible et $\mathrm{rang}(f_q) = 3$

L'espace $E^\perp$ est le noyau de f_q. Or $\dim \mathrm{Ker} f_q + \mathrm{rang}(f_q) = 3$

donc $E^\perp = \{0\}$

c) Par exemple : $f_q(1, X) = \frac{1}{2} \neq 0$ $P_1 = 1$, $P_2 = X$

Par exemple : $q(1+X) = 1$ $P_1 = 1+X$

$q(1) = q(X) = q(X^2) = 0$ et $1, X, X^2$ est une base de E

d) On applique la méthode de Gauss :

$q(a+bX+cX^2) = ab + ac + 2bc$

$= ab + ac + 2bc = (a+2c)(b+c) - 2c^2$

$= \frac{1}{4}(a+b+3c)^2 - \frac{1}{4}(a-b+c)^2 - 2c^2$

On cherche la base antéduale des formes linéaires $l_1 = a+b+3c$

$l_2 = a - b + c$

$l_3 = c$

Il suffit d'inverser la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a : $B^{-1} = -\frac{1}{2} {}^t\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}X$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}X$, $-2 - X + X^2$ est une base orthogonale pour q. La matrice de q dans cette base est la matrice diagonale.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$ Donc q est de signature $(1,2)$

Exercice 2

ϕ est clairement bilinéaire

1) Pour tout A, $\phi(A,A) = tr({}^tAJA)$

Or ${}^t({}^tAJA) = {}^tA\,{}^tJA = -{}^tAJA$ car ${}^tJ = -J$

Donc ${}^tAJA$ est une matrice antisymétrique

donc la diagonale de ${}^tAJA$ est nulle

d'où $tr({}^tAJA) = 0$ et ϕ est alternée donc antisymétrique.

2) On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La famille E_1, E_2, E_3, E_4 est une base de E

Or pour tous $a,b,c,d,a',b',c',d' \in \mathbb{R}$, $\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) =$

$$tr\left(\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right)$$

$$= tr\begin{pmatrix} -a'c+ac' & * \\ * & -db'+d'b \end{pmatrix}$$

$$= ac'-a'c-db'+d'b$$

Donc la matrice de ϕ dans la base E_1, E_2, E_3, E_4 est

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

C'est une matrice inversible (de déterminant 1) donc rang $(\phi) = 4$

3) Une base de F est donnée par les matrices

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(F = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} \middle| \; x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \right)$$

Donc $A \in F^{\perp} \Leftrightarrow \phi(A, e) = \phi(A, f) = \phi(A, h) = 0$ Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -d = 0 \\ a = 0 \\ -c - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = d = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$$

Donc $F^{\perp}$ est la droite $\mathbb{R}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Comme $tr\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$, $F^{\perp} \subset F$

4) On a : $T = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \;/\; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$

Une base de T est donnée par $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dans cette base, calculons la matrice de ϕ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang 2 donc $\operatorname{rang}(\phi_{|T}) = 2$

5) Si $f \neq 0$ est une forme linéaire non nulle,

$\dim \operatorname{Ker} f = 3$.

Donc la restriction $\phi_{/\operatorname{Ker} f}$ a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

(dans une base de $\operatorname{Ker} f$)

Or $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = -abc + abc = 0$

Donc $\operatorname{rang}(\phi_{/\operatorname{Ker} f}) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \leq 2$.