Université Lyon I
L2 — 1er semestre 2010

Math-IV-Algèbre
Contrôle continu écrit 1

Mardi 2 novembre 2010
13h45-15h45

Documents et calculatrices interdits

Exercice 1

Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré 2 au maximum, à coefficients réels.

0. Quelle est la dimension de E ?

1. On considère les quatre applications suivantes de E dans $\mathbb{R}$:
$\phi_1(P) = P(0)$
$\phi_2(P) = P(1)$
$\phi_3(P) = P(2)$
$\phi_4(P) = \int_0^\pi sin(x)P(x)dx$.
Montrer qu'il existe trois scalaires α, β, γ réels tels que pour tout $P \in E$:

$$\phi_4(P) = \alpha\phi_1(P) + \beta\phi_2(P) + \gamma\phi_3(P) \ .$$

Trouver ensuite α, β, γ.

2. Étant donné $P \in E$, on considère les scalaires $P(0), P'(0)$, et $P''(0)$. On définit la fonction : $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$;

$$q(P) = P''(0)P'(0) + P''(0)P(0) + P'(0)P(0) \ .$$

a) Démontrer que q est une forme quadratique sur E et trouver la matrice dans la base canonique de E de la forme polaire f_q associée a q.

b) Calculer le rang de f_q. Quel est l'espace $E^\perp$?

c) Trouver :
— deux polynômes $P_1, P_2 \in E$ tels que $f_q(P_1, P_2) \neq 0$;
— un polynôme $P \in E$ tel que $q(P) \neq 0$;
— une base de E formée de vecteurs isotropes pour q.

d) Trouver une base de E orthogonale pour q et donner la matrice de q dans cette base. Quelle est la signature de q ?

Exercice 2

Soit E l'espace des matrices carrées de taille 2×2 à coefficients réels.

Posons : $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

et soit ϕ l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\phi(A, B) = \mathrm{tr}({}^t A J B)$$

pour tous $A, B \in E$,

On admettra que ϕ est une forme bilinéaire sur E.

(1) Dire si ϕ est symétrique, ou antisymétrique.

(2) Calculer le rang de ϕ.

(3) Soit F l'espace des matrices de E de trace nulle. Donner une base de F. Calculer $F^\perp$ et montrer que $F^\perp$ est contenu dans F.

(4) Soit T l'espace des matrices de E qui sont triangulaires supérieures. Donner une base de T et calculer le rang de la restriction de ϕ à T.

(5) (Question bonus) Montrer que, si f est une forme linéaire non nulle sur E, la restriction de ϕ à $\ker(f)$ est de rang au plus *2*.