3.3 Corrigé

Partie I.

1.

1.(a) Comme $A = X^n$, on a $XA = X^{n+1} = AX$ donc X commute avec A.
1.(b) On a $m_A(X^n) = m_A(A) = 0$ donc le polynôme minimal de X divise $m_A(x^n)$.
1.(c) Si $n, p \geqslant 2$, S_{0_p} contient l'ensemble des matrices $X = (x_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf $x_{1,p} \in K$. Comme K est infini, S_{0_p} est infini.
1.(d) Si $X \in S_{\lambda I_p}$ alors $(\det X)^n = \lambda^p$, donc le polynôme $x^n - \lambda^p$ a une racine dans K.
Réciproquement si $\lambda = 0$ le polynôme a une racine et S_{0_p} n'est pas vide. Supposons que $\lambda \neq 0$ et que le polynôme $x^n - \lambda^p$ ait une racine α dans K. Comme n et p sont premiers entre eux, il existe $u, v \in \mathbf{Z}$ tels que $nu + pv = 1$. Ainsi $\lambda = (\lambda^u)^n(\lambda^p)^v = (\lambda^u\alpha^v)^n$. Donc $x^n - \lambda$ a une racine $\beta = \lambda^u\alpha^v$ dans K. Alors $\beta I_p \in S_{\lambda I_p}$. Donc $S_{\lambda I_p}$ est vide si et seulement si le polynôme $x^n - \lambda^p$ n'admet pas de racine dans K.

2.

2.(a) Soit $P \in \mathrm{GL}_d(K)$, tel que $A' = PAP^{-1}$. Alors $X^n = A$ si et seulement si $PX^nP^{-1} = (PXP^{-1})^n = A'$. Donc $S_{A'} = \{PXP^{-1}, X \in S_A\}$.
2.(b) On a $PAP^{-1} = (PXP^{-1})^n$. Donc $PXP^{-1} \in S_A$ si et seulement si P commute avec A.

3.

3.(a) Soit $f \in K[X]$ avec degré de f égal à r. Soit a une racine complexe de f, alors $K[a]$ est de degré $\leqslant r$ sur K. Une autre racine complexe b de f annule un polynôme de $K[a][x]$ de degré $\leqslant r-1$ donc engendre une extension $K[a,b]$ de degré inférieur à $r(r-1)$. Par induction on obtient que le corps de décomposition de f sur K est de degré inférieur à $r!$ sur K.
3.(b) Le résultat est vrai pour $d = 1$ car tout polynôme non nul admet une valeur non nulle dans le corps infini K. On suppose le résultat établi pour $d-1$. Soit $f \in \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_d]$ non nul sur $\mathbf{C}^d$. On écrit $f(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{i=0}^{r} f_i(x_1, \ldots, x_{d-1})x_d^i$. Le polynôme f est non nul sur $\mathbf{C}^d$ donc il existe i avec $f_i(x_1, \ldots, x_{d-1})$ non nul sur $\mathbf{C}^{d-1}$. Il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{d-1}) \in K^d$ tel que $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{d-1}, x_d)$ est un polynôme non nul sur $\mathbf{C}$ donc sur K.
3.(c) Comme A et A' sont semblables sur $\mathbf{C}$, elles ont même polynôme minimal $m_A \in K[x]$. Ce polynôme m_A est scindé dans L donc A et A' sont semblables sur L à la même réduction de Jordan. Donc A et A' sont semblables dans L.
3.(d) Notons $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ une base de L sur K. Comme A est semblable à A' sur L, il existe $P \in \mathrm{GL}_p(\mathrm{L})$ avec $A' = PAP^{-1}$. Écrivons $P = \sum_{i=1}^{d} P_i e_i$ pour $P_i \in M_p(\mathrm{K})$. Pour $1 \leqslant i \leqslant d$, $A'P_i = P_iA$ et le polynôme en d variables $\det(\sum_{i=1}^{d} P_i x_i)$ est non nul dans L^d donc non nul dans K^d. Ainsi il existe une matrice $Q \in M_p(\mathrm{K})$ avec $A'Q = QA$ et A est semblable à A' sur K.

4.

4.(a) A polynôme minimal m fixé, il n'existe qu'un nombre fini de matrices de Jordan, donc un nombre fini de classes de similitude sur K.
4.(b) Le polynôme minimal m_X divise $m_A(x^n)$ donc par réduction sur $\mathbf{C}$, le nombre d'orbites est fini sur $\mathbf{C}$ donc aussi sur K.

5.

5.(a) D'après I.4.(b), l'ensemble S_A est réunion finie d'orbites pour l'action de $C(A)$. Comme le commutant de tout élément de (S_A) est $C(A)$, les orbites sont réduites à un élément. Donc l'ensemble S_A est fini.

5.(b) Soit $P \in C(A) - C(Y)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, $I_p + \varepsilon P \in C(A) - C(Y)$ et pour ε assez petit $I_p + \varepsilon P \in \mathrm{GL}_p(\mathrm{K})$. Ainsi pour tous les $\varepsilon > 0$ assez petits $(I_p + \varepsilon P)Y(I_p + \varepsilon P)^{-1}$ décrivent des éléments distincts de S_A. Donc S_A est infini.

6.

6.(a) Considérons le développement limité à l'ordre $p-1$ de $f(x) = (1+x)^{1/n}$:

$$f(x) = q(x) + O(x^p)$$

avec $q \in \mathbf{Q}[X]$ et degré de $q \leqslant p-1$. Par unicité de la partie régulière, le développement limité à l'ordre $p-1$ de $f(x)^n$ s'obtient en tronquant à l'ordre $p-1$ le polynôme $q(x)^n$. Or $f(x)^n = 1 + x = q(x) + x^p h(x)$ avec $h \in \mathbf{Q}[x]$. Alors $q(N_p)^n = I_p + N_P$ avec $q \in \mathbf{Q}[x] \subset K[x]$.

6.(b) Soit $A \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{C})$. D'après le théorème de Jordan, il existe $r \geqslant 1$, $(k_1, \ldots, k_r) \in \mathbf{N}^r_{>0}$, $(a_1, \ldots, a_r) \in \mathbf{C}^{*\,r}$ et $P \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{C})$ tels que $P^{-1}AP$ soit la matrice de Jordan de blocs $J_{k_1}(a_1), \ldots, J_{k_r}(a_r)$. D'après I.6.(a), pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, il existe un polynôme $q_{k_i} \in K[x]$ tel que $q_{k_i}(N_{k_i})^n = I_{k_i} + N_{k_i}$. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$ choisissons $\alpha_i \in \mathbf{C}^*$ une racine n-ième de $a_i \neq 0$. Ainsi

$$(\alpha_i q_{k_i}(N_{k_i}/a_i))^n = a_i I_{k_i} + N_{k_i}.$$

Soit X' la matrice bloc $\alpha_i q_{k_i}(N_{k_i}/a_i)$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Alors $PX'P^{-1} \in S_A$. Donc si A est inversible et $K = \mathbf{C}$ alors S_A n'est pas vide.

Partie II.

1. On peut prendre pour N la norme uniforme sur la boule unité pour une norme $z \mapsto |z|$ quelconque de $\mathbf{C}^p$, autrement dit $N(A) = max_{|v|=1}|Av|$.

2.

2.(a) Les matrices X_k et A sont dans l'algèbre commutative $K[A, X_0]$ et par continuité du produit, Y commute avec toute matrice de $K[A, X_0]$.

2.(b) Par continuité du produit et convergence de toute suite extraite, on a $Y = (1 + 1/n)Y - (1/n)BY^{n+1}$. D'où $Y^n = A$.

2.(c) Comme $X_k = (U_k + I_p)Y$ avec la récurrence et la formule du binôme, on obtient

$$nU_{k+1} + \sum_{j=2}^{n+1} \binom{n+1}{j} U_k^j = 0_p, k \geqslant 0.$$

3.

3.(a) La fonction polynôme $t \mapsto n - \sum_{j=1}^{n} \binom{n+1}{j+1} t^j$ est strictement décroissante, vaut n en 0 et tend vers $-\infty$ en $+\infty$. Par conséquent, il existe un unique $r > 0$ satisfaisant l'égalité annoncée.

3.(b) La fonction polynôme $t \mapsto (1/n) \sum_{j=2}^{n+1} \binom{n+1}{j} t^j$ est croissante, convexe et a pour seuls points fixes positifs r et 0. Donc x_k décroît et converge vers 0 pour $0 \leqslant x_0 < r$.

4. Pour $N(U_0) = N(X_0 - Y)N(Y)^{-1} = x_0 \leqslant r$, on a par récurrence, $N(U_k) \leqslant x_k$. Par conséquent X_k converge vers Y.

Partie III.

1.

1.(a) Par hypothèse, il existe $h \in K[x]$ de degré $\leqslant p-1$ tel que $Xv = h(A)v$. Comme $X \in S_A$, X commute avec A, donc $XA^j v = h(A)A^j v$, $0 \leqslant j < p$. Donc $X = h(A)$.
1.(b) Pour tout $f \in K[x]$,

$$X = f(A) \in S_A \Longleftrightarrow f(A)^n = A \Longleftrightarrow m_A | f^n - x \Longleftrightarrow \overline{f^n} = \overline{x} \in K[x]/m_A.$$

L'évaluation $\varphi : \{f \in K[x] | \overline{f}^n = \overline{x}\} \to S_A,\ f \mapsto f(A)$ se factorise donc par l'injection $\overline{\varphi} : \{\overline{f} \in K[x]/(m_A) | \overline{f}^n = \overline{x}\} \to S_A,\ \overline{f} \mapsto f(A)$ qui est surjective d'après III.1.(a). Donc $\overline{\varphi}$ est une bijection.
1.(c) Si m_A est irréductible, $K[x]/(m_A)$ est un corps. Le polynôme $t^n - \overline{x}$ a au plus n solutions dans $K[x]/(m_A)$. Donc $\{\overline{f} \in K[x]/(m_A) | \overline{f}^n = \overline{x}\}$ et S_A (d'après III.1.(b)) ont au plus n éléments.
1.(d) Soit $f = \sum_{j=0}^{\ell} a_j x^j \in K[x]$. Si $\overline{f}^n = \overline{x} \in K[x]/(x^p)$ alors $a_0 = 0$. Donc $\overline{f}^n = \overline{x}^n h\overline{x}$ pour $h \in K[x]$. Or $n, p \geqslant 2$, $\overline{f}^n \neq \overline{x} \in K[x]/(x^p)$. Donc $\{\overline{f} \in K[x]/(m_A) | \overline{f}^n = \overline{x}\}$ et S_A (d'après III.1.(b)) sont vides.
1.(e) Posons dans $K[x]$, $y_2 = y_1 + f^r q$ et $y_1^n = g + f^r h$. Ainsi il existe $w \in K[x]$, $y_2^n = y_1^n + ny_1^{n-1} f^r q + f^{r+1} w = g + f^r(ny_1^{n-1} + h) + f^{r+1} w$. Donc $y_2^n \equiv g \mod f^{r+1}$ si et seulement si $f | ny_1^{n-1} q + h$ dans $K[x]$. Or $y_1^n \equiv g \mod f^r$ et $f \wedge g = 1$, donc $y_1 \wedge f = 1$. Ainsi y_1^{n-1} est inversible dans $K[x]/(f)$. Donc il existe un unique $q \in K[x]/(f)$ tel que $ny_1^{n-1} q + h \equiv 0 \mod f$. Donc il existe un élément $y_2 \in K[x]$ unique modulo f^{r+1} tel que le système de congruence de III.1.(e) soit satisfait.
1.(f) Ecrivons $m_A = \Pi_{i=1}^{s} f_i^{r_i}$, où les f_i sont des facteurs irréductibles distincts. D'après le théorème chinois de résolution des congruences simultanées

$$\{z \in K[x]/(m_A) | z^n = \overline{x}\} \cong \Pi_{i=1}^{s} \{z_i \in K[x]/(f_i^{r_i}) | z_i^n \equiv x \mod f_i^{r_i}\}.$$

Si $f_i \wedge x = 1$ d'après III.1.(e), les cardinaux de $\{z_i \in K[x]/(f_i^{r_i}) | z_i^n \equiv x \mod f_i^{r_i}\}$ et de $\{z_i \in K[x]/(f_i^{r_i}) | z_i^n \equiv x \mod f_i\}$ sont égaux et inférieurs à n d'après III.1.(c). Si $f_i = x$ et si $r_i = 1$ alors le cardinal de $\{z_i \in K[x]/(x) | z^n \equiv x \mod x\} \leqslant n$ car K est un corps. Si $f_i = x$ et $r_i > 1$, $\{z \in K[x]/(x^{r_i}) | z^n \equiv x \mod x^{r_i}\}$ est vide d'après III.1.(d). Par conséquent, les cardinaux de $\{z \in K[x]/(m_A) | z^n = \overline{x}\}$ et de S_A (d'après III.1.(b)) sont inférieurs à n^s.

2. Si $K = \mathbf{R}$ et m_A n'a pas de racine réelle, alors ses facteurs irréductibles sont de degré 2. Soit f un tel facteur, ainsi $\mathbf{R}[x]/(f) \cong \mathbf{C}$ est algébriquement clos. Donc si f est de multiplicité 1 dans la décomposition de m_A, $\{z \in R[x]/(f) | z^n \equiv x \mod f\}$ est non vide. D'après l'isomorphisme III.1.(f) donné par le théorème chinois et III.1.(b), les ensembles $\{z \in K[x]/(m_A) | z^n = \overline{x}\}$ et S_A sont non vides. Si f n'est pas de multiplicité 1 dans m_A, comme m_A n'a pas de racine reelle, 0 n'est pas racine de m_A, et S_A n'est pas vide d'apres III.1.(f).

3.

3.(a) Pout tout réel t, on a $2\cos(2t) = 4\cos t - 2$. Donc $a_{n+1} = a_n^2 - 2$. Comme $a_0 = 2s$, par récurrence a_n est rationnelle. Elle est périodique à partir d'un certain rang car récurrente et ayant un nombre fini de valeurs puisque a_n est deux fois la partie réelle d'une racine $2d$-ième de l'unité pour d dénominateur > 0 de r.
3.(b) Soit $c_n = a_n b_n$, alors $a_{n+1} = (c_n^2 - 2b_n^2)/b_n^2$ et b_n est premier avec $c_n^2 - 2b_n^2$ donc aussi b_n^2.
3.(c) Puisque $b_{n+1} = b_n^2$ et que la suite des entiers b_n est périodique à partir d'un certain rang, $b_n = 1$ pour tout n, $2s$ est entier et $|s| \leqslant 1$ car $|\cos t| \leqslant 1$ pour tout réel t. Donc $|s| \in \{0, 1/2, 1\}$.

4.

4.(a) Pour K = $\mathbf{R}$, on obtient les solutions des n racines n-ièmes de i. Soit

$$\cos(2k\pi/n + \pi/2n)I_2 + \sin(2k\pi/n + \pi/2n)A,\ \ 0 \leqslant k \leqslant n-1;$$

ou encore : A est la rotation d'angle $\pi/2$; ses n racines n-ièmes sont donc les rotations d'angle $\pi/2n + 2k\pi/n$.
4.(b) Pour K = $\mathbf{Q}$, vu les solutions réelles, les solutions ne peuvent être que A et $-A$. La matrice A convient

si et seulement si n est congru à 1 modulo 4 et $-A$ pour n congru à 3 modulo 4.
4.(c) Pour K = **C**, la matrice A admet n^2 racines n-ièmes, $uI_2 + vA$ semblables aux matrices diagonales de valeurs propres les racines n-ièmes de i et $-i$. Autrement dit, avec les traces et le déterminant, $2u = \alpha\omega^k + \beta\omega^{k'}$ avec $\omega = e^{2i\pi/n}$ et α, β dans $\{e^{i\pi/2n}, e^{-i\pi/2n}\}$ et v l'une ou l'autre des racines carrées de $\omega^{k+k'} - u^2$.
Pour déterminer quelle est la bonne racine carrée, on utilise le cas $K = \mathbf{R}$: si n est impair, les n^2 solutions sont les rotations ci-dessus multipliées par les matrices scalaires z_n^k, avec $z_n = e^{2\pi i/n}$. Pour n pair, ce sont d'une part ces matrices, d'autre part leurs inverses multipliées par z_{2n}.
Solution alternative : il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ avec $A = PA'P^{-1}$ avec $A' = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. Les éléments de S_A sont donc les n^2 matrices de la forme $PX'P^{-1}$ où X' décrit l'ensemble des matrices diagonales $\begin{pmatrix} e^{i\pi/2n+2ki\pi/n} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/2n+2k'i\pi/n} \end{pmatrix}$, $(k, k') \in \{0, \dots, n-1\}^2$.

Partie IV.

1.
1.(a) Comme A^{k-1} n'est pas nulle, $X^{(k-1)n}$ non plus. Comme A^k est nulle, X^{kn} aussi. Donc k est le plus petit entier $\geqslant r/n$.
1.(b) On a $r \leqslant p$.

2.
2.(a) Soit E_{ij} la matrice élémentaire dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne i colonne j égal à 1. Puisque $X^n X^j v = X^{n+j} v$, la matrice cherchée est $\sum_{1 \leqslant j \leqslant p-n} E_{j,j+n}$.
2.(b) La réduction de Jordan de X^n est donc nulle si $n \geqslant p$. Autrement pour $0 \leqslant j \leqslant n-1$ le cycle engendré par les images par X^n de $X^j v$ est de longueur $\lfloor (p-j)/n \rfloor$. Donc la réduction de Jordan de X^n est constituée de n matrices carrées de Jordan de taille $\lfloor (p-j)/n \rfloor$ pour $0 \leqslant j < n$. En résumé si $p = nq + r$, avec q et r quotient et reste de la division euclidienne de p par n, la réduction de Jordan de X^n est constituée de r blocs de taille $q+1$ et de $n-r$ blocs de taille q. (Ceci reste vrai pour $n \geqslant p$).
2.(c) Ici $k = 2$. Donc d'après IV.1.(b), $S_A = \emptyset$ si $n \geqslant 4$. Si $n = 1$, $S_A = \{A\}$ non vide. Si $n = 2$, il existe $P \in G_4(K)$ tel que $PN_4P^{-1} \in S_A$ non vide. Si $n = 3$ et $X \in S_A$, alors $X^3 \neq 0$ dont X est nilpotente d'ordre 4. Donc $\mathrm{rg} X^3 = 1 \neq \mathrm{rg} A$ absurde ! Donc S_A est vide. L'ensemble des valeurs de n pour lesquelles S_A est non vide est $\{1, 2\}$.

3.
3.(a) On a

$$\dim N_k^i - \dim N_k^{i-1} \begin{cases} 1 & \text{si } k \geqslant i \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } k < i \end{cases}$$

D'où $d_i = \mathrm{Card}\{j \leqslant r, k_j \geqslant i\}$.
3.(b) Pour $B \in M_p(K)$ et $i \geqslant 2$, notons $d_i(B) = \dim B^i - \dim B^{i-1}$. Ainsi

$$d_i(A) = \dim(X^n)^i - \dim(X^n)^{i-1} = \sum_{j=(i-1)n+1}^{in} d_j(X).$$

Remarquons que les suites $(d_i)_{i \geqslant 2}$ et $(d_i(X))_{i \geqslant 2}$ sont décroissantes. Donc $nd_{in}(X) \leqslant d_i \leqslant nd_{(i-1)n+1}$ et $nd_{i(n+1)}(X) \leqslant d_{i+1} \leqslant nd_{in+1}(X)$. Supposons qu'il existe $i \geqslant 2$ et $s \in \mathbf{N}$ tels que $ns < d_{i+1} \leqslant d_i < n(s+1)$. Alors $s < d_{in+1}(X) \leqslant d_{in}(X) < s+1$. Ces inégalités entre entiers sont absurdes. Pour tout entier $s \geqslant 0$, il existe au plus un indice i tel que $d_i \in]ns, n(s+1)[$.
3.(c) Pour $A = J$, on a $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 1$ et $d_j = 0$ si $j \geqslant 4$. D'après IV.3.(b), les seuls n possibles pour avoir $S_J \neq \emptyset$ sont donc 1 et 3. Si $n = 1$, alors $S_J = \{J\} \neq \emptyset$. Si $n = 3$, d'après IV.2.(b), N_7^3 est semblable à J donc S_J est non vide. L'ensemble des n tels que $S_J = \emptyset$ est $\mathbf{N} - \{0, 1, 3\}$.

3.(d) D'après I.2.(a), nous pouvons nous ramener au cas $J = A$. Effectuons une récurrence sur le nombre de blocs M de J : si $M < n$, $d_1 = M$, $d_2 < d_1$, donc par l'hypothese $d_2 = 0$, donc $J = 0$, et est une puissance n-ième. Sinon, soit m la plus grande taille des blocs de Jordan. Si $d_m \geqslant n$, nous enlevons n blocs de taille m, qui forment une puissance n-ième d'après la question VI.2.(b). Les "nouveaux" d_i sont obtenus à partir des anciens en leur soustrayant n, donc l'hypothèse est conservée. Si $d_m < n$, l'hypothèse implique que $d_{m-1} \geqslant n$, et nous enlevons d_m blocs de taille m et $n - d_m$ de taille d_{m-1}, qui, d'après VI.2.(b), forment les blocs d'un puissance n-ième. Par ailleurs, les nouveaux d_k sont égaux aux anciens moins n (sauf pour d_m, qui devient nul.)

4. Ecrivons $m_A = x^r f$ avec $x \wedge f = 1$. D'après le théorème des noyaux $K^p = \operatorname{Ker} A^r \oplus \operatorname{Ker} f(A)$. La matrice A laisse stable les espaces propres $E_1 = \operatorname{Ker} A^r$ et $E_2 = \operatorname{Ker} f(A)$. Donc A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où B (resp. C) est la projection de A_{E_1} (resp. A_{E_2}) sur E_1 (resp. E_2). Ainsi $B^r = 0 = B^p$ (car $p \leqslant r$) et le polynôme minimal de C est f avec $f(0) \neq 0$ donc 0 n'est pas valeur propre de C et $\det C \neq 0$. Soit $X \in S_A$. D'après I.1.(a), X commute avec A donc laisse stable $\operatorname{Ker} A^p$ et $\operatorname{Ker} f(A)$ (si $v \in \operatorname{Ker} f(A)$, $f(A)Xv = Xf(A)v = 0$ et $Xv \in \operatorname{Ker} f(A)$), donc $X = P\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}P^{-1}$. Donc on a la bijection

$$\varphi : S_B \times S_C \to S_A,\ (X_1, X_2) \mapsto P\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

5. Si $K = \mathbf{C}$, alors d'après I.6.(b) S_C est non vide. D'après IV.3.(d), S_B est non vide si et seulement si, pour tout $s \geqslant 0$, il existe au plus un indice i tel que $d_i(B) \in]ns, n(s+1)[$. Comme C est inversible, $d_i(A) = d_i(B)$, $i \geqslant 2$. D'après IV.4. les ensembles S_A et $S_B \times S_C$ sont en bijection. Donc S_A est non vide si et seulement si, pour tout $s \geqslant 0$, il existe au plus un indice i tel que $d_i(A) \in]ns, n(s+1)[$.

Chapitre 4

Épreuve écrite d'analyse et probabilités

4.1 Énoncé

Objectif et notations

Dans ce problème, nous allons nous intéresser aux niveaux d'énergie de l'oscillateur classique et de l'oscillateur harmonique quantique.

Les différentes parties du problème peuvent être, dans une assez large mesure, traitées de manière indépendante.

- $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des réels, $\mathbf{C}$ celui des nombres complexes, $\mathbf{N}$ celui des entiers naturels, et $\mathbf{N}^*$ celui des entiers naturels non nuls.
- Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $[\![1, n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et n.
- Pour $n \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ et $d \in \mathbf{N}$, on note $\mathscr{C}^n(\mathbf{R}^d)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}$.
- On note $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ l'ensemble des fonctions infiniment dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$.
- On note $L^1(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ (respectivement $L^2(\mathbf{R})$) l'ensemble des classes de fonctions intégrables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ (respectivement de classes de fonctions réelles de carré intégrable) au sens de Lebesgue.
- Étant donnée une mesure μ sur une tribu d'un ensemble X, on note $L^2(\mu)$ l'ensemble des (classes de) fonctions de X dans $\mathbf{R}$ de carré intégrable pour la mesure μ.
- Étant donnée $f \in L^1(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, on note $\widehat{f}$ sa transformée de Fourier définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} f(y)\, \mathrm{e}^{-iy\xi}\, \mathrm{d}y.$$

- Étant donnée une matrice M, on note M^T sa transposée.
- La notation $M_n(\mathbf{R})$ recouvre l'ensemble des matrices carrées à n lignes et à coefficients réels.