jeudi 17 janvier 2019

*Groupes abéliens de type fini*

**Exercice 1 groupes abéliens de type fini**

a) Soit $M$ un groupe abélien engendré par $m$ éléments. Montrer (par récurrence sur $m$) que tout sous-groupe $N \leq M$ peut être engendré par $n \leq m$ éléments. *Indication : si $M = \mathbb{Z}e_1 + ... + \mathbb{Z}e_m$, appliquer l'hypothèse de récurrence à $N' = N \cap \mathbb{Z}e_1 + ... + \mathbb{Z}e_{m-1}$ et considérer*

$$\{\lambda \in \mathbb{Z} \ : \ ^{\exists}x \in \mathbb{Z}e_1 + ... + \mathbb{Z}e_{m-1},\ x + \lambda e_m \in \mathbb{N}\}$$

b) Soit $M$ un groupe abélien **libre** engendré par $m$ éléments. Montrer (par (récurrence sur $m$) que tout sous-groupe $N \leq M$ est libre et peut-être engendré par $n \leq m$ éléments.

c) Soit $G$ un groupe abélien de type fini. Montrer qu'il existe des entiers $n, m$ et

$$f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m$$

un morphisme de groupes tel que $G \simeq \mathbb{Z}^m / f(\mathbb{Z}^n)$.

d) En utilisant le théorème de réduction des matrices à coefficients entiers †, montrer que si $G$ est un groupe abélien de type fini, alors il existe des entiers $r \geq 0, d_1, ...d_k \geq 2$ uniques tels que :

$$G \simeq \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}/d_k\mathbb{Z}$$

et $d_1 | ... | d_k$.

*Indication pour l'unicité : on note $G_t$ la partie de torsion de $G$* i.e. $G_t := \{g \in G \ : \ ^{\exists}n > 0,\ ng = 0\}$. *Vérifier que $r$ est le rang de $G/G_t$. On est ramené à un groupe fini ! Montrer que $(d_k) = \{x \in \mathbb{Z} \ : \ xG_t = 0\}$ puis que $d_{k-1}G_t \simeq d_{k-1}\mathbb{Z}/d_k\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/(d_k/d_{k-1})\mathbb{Z}$ ...*

e) Déterminer (à isomorphisme près) tous les groupes abéliens d'ordre 24.

**Exercice 2 Éléments entiers sur $\mathbb{Z}$.**

a) Si $b \in \mathbb{C}$, montrer que sont équivalentes :

---

†. Si $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$, alors il existe $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ tels que $PMQ =$

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} e_1 & & \\ & \ddots & \\ & & e_K \end{matrix} & \\ \hline & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} \end{array}\right)$$

où $e_1 | ... | e_K$ sont des entiers non nuls ...

(i) il existe $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que $P(b) = 0$ ;

(ii) $\mathbb{Z}[b]$ est un $\mathbb{Z}-$module de type fini ;

(iii) il existe un $\mathbb{Z}[b]-$module fidèle qui est un $\mathbb{Z}-$module de type fini ‡.

*Indication : pour iii ⇒ i : soit $M$ un $\mathbb{Z}[b]-$module fidèle qui est un $\mathbb{Z}-$module de type fini. Soient $e_1, ..., e_n$ des générateurs. Il existe des coefficients $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$ tels que :*

$$\forall j,\ be_j = \sum_i a_{i,j} e_j \ .$$

*Vérifier que que $\forall n$, $\forall j$ $b^n e_j = \sum_i (M^n)_{i,j} e_i$ où $M := (a_{i,j})$. Et utiliser le théorème de Cayley-Hamilton.*

Un $b$ qui vérifie ces propriétés est dit entier sur $\mathbb{Z}$.

b) Vérifier que $\sqrt{2}$ et les racines de l'unité sont entiers sur $\mathbb{Z}$ et qu'en revanche $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ne l'est pas (*indication :* $\mathbb{Z}[1/2] \leq \mathbb{Z}[1/\sqrt{2}]$).

c) Si $z \in \mathbb{Q}$ est entier sur $\mathbb{Z}$, alors $z \in \mathbb{Z}$.

d) Montrer que l'ensemble $\overline{\mathbb{Z}}$ des éléments de $\mathbb{C}$ entiers sur $\mathbb{Z}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

**Exercice 3 Entiers des extensions quadratiques**

a) Soit $d$ un entier $\neq 1$ sans facteur carré. On note $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Vérifier que $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

b) On pose $\overline{a + b\sqrt{d}} = b\sqrt{d}$. Montrer que $x \mapsto \overline{x}$ est un automorphisme de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ et que $\overline{x} = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Q}$.

c) On note $\mathcal{O}_d = \overline{\mathbb{Z}} \cap \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] \leq \mathcal{O}_d$ et que si $d = 1 \bmod 4$, $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}] \leq \mathcal{O}_d$.

d) Soit $x = a + b\sqrt{d} \in \mathcal{O}_d$. Montrer que $\overline{x} \in \mathcal{O}_d$ et en déduire que $2a, 2bd \in \mathbb{Z}$.

e) En calculant $x\overline{x}$, montrer que $2b \in \mathbb{Z}$.

f) Montrer que $(2a)^2 - d(2b)^2 = 0 \bmod 4$ et conclure que :

$$\mathcal{O}_d = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{d}] & \text{si } d \neq 1 \bmod 4 \\ \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}] & \text{si } d = 1 \bmod 4 \end{cases}$$

**Exercice 4 Exemples de groupes de type fini avec un sous-groupe qui ne l'est pas**

‡. si $M$ est un $A-$module, on dit que c'est un module fidèle si $am = 0$ pour tout $m \in M \Rightarrow a = 0$.

*a) Soit $G$ le sous-groupe de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ *engendré par les matrices :*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

*Vérifier que* $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{Z}[1/2] \right\}$ *est un sous-groupe de $G$ et que $H$ n'est pas de type fini !*

*b) Soit $G$ le sous-groupe des permutations de $\mathbb{Z}$ engendré par la transposition* $(0,1)$ *et par le décalage* $k \mapsto k+1$. *Vérifier que le groupe $H$ des permutations de $\mathbb{Z}$ à support fini est un sous-groupe de $G$ mais n'est pas de type fini !*

*c) Soit $G$ un groupe de type fini. Soit $H \leq G$ un sous-groupe d'indice fini. Vérifier que $H$ est de type fini.*