jeudi 31 janvier 2019

Théorème de Lüroth et théorème des invariants de Dickson

Exercice 1 Théorème de Lüroth

a) Soit K un corps commutatif. Soit $\frac{f}{g} \in K(X)$ une fraction irréductible (non constante). Montrer que $[K(X) : K(\frac{f}{g})] = \max\{\deg f, \deg g\}$. *Indication : vérifier que $Yg(T) - f(T)$ est irréductible dans $K[Y,T]$ et en déduire que $\frac{f}{g}g(T) - f(T)$ est irréductible sur le corps $K\left(\frac{f}{g}\right)$.*

b) En déduire un automorphisme de groupes $\mathrm{PGL}_2(K) \simeq \mathrm{Aut}_K(K(X))$.

c) En déduire que $\mathbb{F}_q(X)^{\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)} = \mathbb{F}_q\left(\frac{(X^{q^2}-X)^{q+1}}{(X^q-X)^{q^2+1}}\right)$.

Indication : montrer d'abord que la fraction $\frac{(X^{q^2}-X)^{q+1}}{(X^q-X)^{q^2+1}}$ peut s'écrire sous forme d'une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ où $\max\{\deg a, \deg b\} = q^3 - q = |\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)|$.

d) Soit $K \subseteq L \subseteq K(X)$. On suppose $K \neq L$. Montrer que X est algébrique sur L. On note :

$$f(T) = T^n + a_1T^{n-1} + ... + a_n \in L[T]$$

son polynôme minimal.

e) Montrer qu'il existe i tel que $\theta = a_i \notin K$.

f) soit $b_0(X)$ le *ppcm* des dénominateurs des a_i dans $K[X]$. On pose

$$F(X,T) := b_0(X)f(T) = b_0(X)T^n + b_1(X)T^{n-1} + ... + b_n(X) \in K[X,T]$$

et $m := \deg_X F(X,T)$. On écrit $\theta = \frac{g(X)}{h(X)}$ sous forme irréductible. Vérifier que $g(X), h(X)$ sont de degrés $\leq m$.

g) Montrer que $f(T)|g(T) - \theta h(T)$ dans $L[T]$.

h) En déduire que :

$$h(X)g(T) - g(X)h(T) = q(X,T)F(X,T)$$

pour un certain $q(X,T) \in K[X,T]$. *Indication : utiliser le contenu ...*

i) En comparant les degrés en X, montrer que $h(X)g(T) - g(X)h(T)$ est de degré m en X et que $q(X,T) \in K[T]$.

j) En déduire que $q \in K$ et que $n = m$.

k) En déduire que $L = K(\theta)$.

l)

Exercice 2 Théorème des invariants de Dickson

Soit $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$. Soit $K = \mathbb{F}_q(X_1, ..., X_n)$. Le groupe G agit sur K de la manière suivante :

$$^\forall g \in G,\ g^{-1}.P(X_1, ..., X_n) = P\left(\sum_{j=1}^{n} g_{1j}X_j, ..., \sum_{j=1}^{n} g_{nj}X_j\right) \quad .$$

On pose $f_n(T) = \prod_{\lambda \in \mathbb{F}_q^n}(T - \lambda_1 X_1 - ... - \lambda_n X_n)$.

a) Montrer que $f_n(T) \in K^G[T]$.

b) Montrer que $f_n(T) = T^{q^n} + \sum_{i=0}^{n-1} c_{n,i} T^{q^i}$ pour certains $c_{n,i} \in \mathbb{F}_q[X_1, ..., X_n]$ dedegrés $q^n - q^i$. *Indication : considérer :*

$$\Delta_n(T) := \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & ... & X_n & T \\ X_1^q & X_2^q & ... & X_n^q & T^q \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & & & \\ X_1^{q^n} & X_2^{q^n} & ... & X_n^{q^n} & T^{q^n} \end{vmatrix}$$

et montrer que $f_n(T) = \frac{\Delta_n(T)}{\Delta_{n-1}(X_n)}$.

c) Montrer que $[K : \mathbb{F}_q(c_{n,0}, ..., c_{n,n-1})] \leq (q^n - q^{n-1})...(q^n - 1)$.

d) En déduire que $K^G = \mathbb{F}_q(c_{n,0}, ..., c_{n,n-1})$.

e) Montrer que $\mathbb{F}_q[X_1, ..., X_n]^G = \mathbb{F}_q[c_{n,0}, ..., c_{n,n-1}]$.

Indication : vérifier que l'anneau $\mathbb{F}_q[c_{n,0}, ..., c_{n,n-1}]$ *est intégralement clos.*