Leçon 106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications

1 Plan possible

I. Définitions et propriétés algébriques
II. Action de $GL(E)$
III. Sous-groupes remarquables de $GL(E)$
IV. Sur les corps finis
V. Propriétés topologiques sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2 Développements possibles

Développement 1 *Les sous-groupes finis de* $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$*.*
cf. [3] ou [4, t. I]

Développement 2 *Théorème de Burnside : un sous-groupe de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *d'exposant fini est fini.*
cf. [4, t. II]
remarques : contre-exemples : $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ *est d'exposant* 2 *est infini. Ou bien le sous-groupe des matrices de la forme* $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *dans* $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_2})$ *est d'exposant* 2 *mais infini.*

Développement 3 (Simplicité de $\mathrm{PSL}_n(K)$) *Le groupe* $\mathrm{PSL}_n(K)$ *est un groupe simple si* $n \geq 3$ *ou* $n = 2$ *et* $|K| \geq 4$*.*
Cf [5, ch. XIII, §8 et §9 (thm 9.6)] pour ce développement qui peut servir aussi ailleurs.

Remarques : Pour ce développement, on peut se contenter du cas $n \geq 3$. On commence par définir les transvections : ce sont les matrices conjuguées dans $\mathrm{GL}_n(K)$ à une matrice de la forme $T_{i,j}(\lambda) := I_n + \lambda E_{i,j}$, $\lambda \in K$, $1 \leq i \neq j \leq n$. Puis on montre que les transvections sont conjuguées dans $\mathrm{SL}_n(K)$ ... Il faut aussi remarquer que les groupes $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathfrak{S}_3$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \simeq A_4$ ne sont pas simples.

Développement 4 *Simplicité de* $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$*.*
cf. [7]

Développement 5 ($\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2/\pm 1 \simeq \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$) *Soit* SU_2 *le groupe des matrices* 2×2 *complexes unitaires de déterminant* 1*. On a un isomorphisme de groupes :*

$$\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2/\pm(I_2, I_2) \simeq \mathrm{SO}_4(\mathbb{R}) \ .$$

En particulier le groupe $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})/Z$ *n'est pas simple (*Z *est le centre (*$=\pm I_4$*)). cf. [6,] ou [7, ex. 12.56].*

Remarques : on fait agir $\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2$ sur $H := \left\{ \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \ : \ a, b \in \mathbb{C} \right\}$ le $\mathbb{R}-$ espace vectoriel des quaternions. Si $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, on note $M^* := {}^t\overline{M}$. Alors si $q_1, q_2 \in H$, on remarque que $q_1 q_2^* + q_2^* q_1 \in \mathbb{R} I_2$, on pose alors $\langle q_1, q_2 \rangle := \frac{q_1 q_2^* + q_2^* q_1}{2}$. C'est un produit scalaire sur H et $\langle q, q \rangle = \mathrm{dét}\, q$ si $q \in H$.

On a donc une action de $\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2$ qur H via :

$$\forall u, v \in \mathrm{SU}_2, \ \forall q \in H, \ (u, v).q := uqv^{-1} \ .$$

Cette action préserve le déterminant donc la norme euclidienne choisie sur H. D'où un morphisme $\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2 \to O_4(\mathbb{R})$. On peut admettre que SU_2 est connexe ; si demandé, il suffit de savoir trouver un chemin continu qui relie $g \in \mathrm{SU}_2$ à I_2 et pour cela, il suffit de diagonaliser : $g = P^* \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} P$ pour un θ réel et une matrice unitaire P ; voici un chemin continu :

$$t \in [0, 1] \mapsto P^* \begin{pmatrix} e^{it\theta} & 0 \\ 0 & e^{-it\theta} \end{pmatrix} P \ ...$$

Pour la surjectivité, on peut à la place de l'argument de Vinberg qui fait appel aux algèbres de Lie, utiliser cet argument plus élémentaire : comme les réflexions orthogonales engendrent $O_4(\mathbb{R})$ et comme toute rotation est un produit d'un nombre pair de réflexions, il suffit de montrer que le produit de 2 réflexions orthogonales est dans l'image de $\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2$. Or l'application $r_u : H \to H$, $q \mapsto -uq^*u$ est une réflection orthogonale d'hyperplan l'orthogonal de u. On vérifie facilement que si $u, v \in \mathrm{SU}_2$, alors, $r_u \circ r_v : q \mapsto uv^*qv^*u$ est dans l'image de $\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2$ car $uv^*, v^*u \in \mathrm{SU}_2$ ...

Développement 6 (Théorèmes de Sylow) *Avec la démonstration du [6] où on commence par donner un* $p-$*Sylow de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ *puis on remarque que tout groupe d'ordre* n *est isomorphe à un sous-groupe de* S_n *lui-même isomorphe à un sous-groupe de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ *et où l'on montre le lemme suivant :*

Lemme : *si* $H \leq G$*, si* P *est un* $p-$*Sylow de* G*, alors il existe* $g \in G$ *tel que* $gPg^{-1} \cap H$ *est un* $p-$*Sylow de* H*.*

Développement 7 (Sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$) *Soit $K \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ un sous-groupe compact, alors G est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.*

Remarques : savoir démontrer facilement le cas fini en « moyennant »une forme quadratique définie positive. Cf [1]

Développement 8 (Lie-Kolchin) *Soit $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ résoluble connexe. Alors G est conjugué à un sous-groupe du groupe des matrices triangulaires supérieures.*

cf. [2]

remarques : savoir démontrer que le groupe des matrices triangulaires supérieures est lui-même résoluble. Connaître un contre-exemple si on ne suppose pas G connexe : par exemple, $\mathfrak{S}_3$ se réalise comme un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ mais n'est pas conjugué à un sous-groupe du groupe des matrices triangulaires supérieures (il y aurait sinon une droite propre commune à tous les éléments ce qui n'est pas possible ...)

3 Exercices / questions possibles

1. Soit P_σ la matrice de permutation : $(P_\sigma)_{ij} = \delta_{i\sigma(j)}$. Calculer dét P_σ.
   Réponse : dét $P_\sigma = \sum_{s\in S_n} \epsilon(s)(P_\sigma)_{s(1)1}...(P_\sigma)_{s(n)n} = \epsilon(\sigma)$.
2. Existe-t-il un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?
   Réponse : non car les éléments d'un tel sous-groupe seraient simultanément diagonalisables donc un tel sous-groupe serait conjugué à un sous-groupe du groupe des matrices diagonales
   $$\left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \right\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^2$$
   IMPOSSIBLE !
3. Des exemples d'isomorphismes exceptionnels : $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq A_5$.
   En effet : $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4)$ *agit sur* $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_4)$ *de cardinal* 5 *d'où un morphisme* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4) \to S_5$. *On montre que c'est injectif et on remarque que l'image est d'indice* 2 *dans* S_5. *D'un autre côté :* $PSL_2(\mathbb{F}_5)$ *agit sur* $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5)$ *de cardinal* 6 *d'où un morphisme* $f : PSL_2(\mathbb{F}_5) \to S_6$. *On montre facilement que c'est injectif et que l'image est dans* A_6 *(par exemple comme* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$ *est simple le noyau de* $\epsilon \circ f : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5) \to$

$\{\pm 1\}$ est tout le groupe !). On a donc un morphisme dont l'image dans A_6 est d'indice 6 (il suffit de calculer le cardinal de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$!). Donc c'est A_5.

4. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{GL}_m(\mathbb{C}) \Rightarrow m = n$.

   Réponse : les éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ d'ordre 2 ont pour valeurs propres ± 1. Donc à similitude près, il n'y a que n éléments d'ordre 2 :

$$\begin{pmatrix} -1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} -1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   avec $1, 2, 3, \ldots,$ ou n « -1 » sur la diagonale. C-à-d : il y a n classes de conjugaison d'éléments d'ordre 2 dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ....

5. Calculer $|\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})|$ lorsque p est premier. Donner un $p-$Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

   Réponse : le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est en bijection avec les bases du $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}-$espace$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^n$ donc d'ordre $(p^n-1)\ldots(p^n-p^{n-1}) = p^{1+\ldots+(n-1)}(p^n-1)(p^{n-1}-1)\ldots(p-1)$. Donc les $p-$Sylow sont d'ordre $p^{1+\ldots+(n-1)} = p^{n(n-1)/2}$. Voici justement un sous-groupe de cet ordre :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \ldots & & a_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & \ldots & a_{2n} \\ & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

   où les $a_{ij} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $1 \leq i < j \leq n$. C'est donc un $p-$Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

6. Calculer l'ordre de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$. Mais $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3) \not\simeq S_4$.

   Réponse : $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ est le noyau du morphisme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q) \to \mathbb{F}_q^*$. Or ce morphisme est surjectif (une matrice diagonale avec des 1 sur la diagonale sauf en première possition où l'on a un $x \in ff_q^*$ a pour déterminant x). Donc $\frac{|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)|}{|\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)|} = q - 1$.

   Dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$, l'élément $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est le seul d'ordre 2, alors que $\mathfrak{S}_4$ a 6 transpositions et 3 doubles-transpositions ...(Ou bien on peut remarquer *que dans* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$*, il y a un seul* $2-$*Sylow : c'est le groupe dérivé* $D(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3))$ *isomorphe au groupe* Q_8*, sous-groupe des quaternions d'ordre* 8*. En revanche* S_4 *a* 3 $2-$*Sylow : tous isomorphes à* D_4 *le groupe diédral d'ordre* 8*).*

7. Réaliser $\mathfrak{S}_3$ comme un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
   Réponse : le groupe $\mathfrak{S}_3$ *agit (linéairement) sur le sous-espace de dimension* 2 $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y + z = 0\}$ *par permutation des coordonnées. On obtient un morphisme de groupes* $S_3 \to \mathrm{GL}(E) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ *qui est clairement injectif ! Explicitement, si on prend pour base de* E *les vecteurs* $v_1 = (1, -1, 0)$ *et* $v_2 = (0, 1, -1)$ *on obtient le morphisme suivant :*

$$(12) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } (23) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

8. *(Si on parle de représentations des groupes finis)* Quelles sont les représentations irréductibles de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}$?
   Réponse : si V *est un* $\mathbb{C}-$*espace vectoriel de dimension finie et si* $\rho : \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(V)$ *est une représentation irréductible, alors les éléments de* $\rho(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$ *sont diagonalisables (car d'ordre fini !) et commutent 2 à 2 (car* $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ *est abélien). Donc ces éléments sont simultanément diagonalisables* i.e. *il existe une base de diagonalisation commune en particulier il existe au moins un vecteur propre commun et donc comme* V *est irréductible, ce vecteur engendre* V *et* ρ *est de dimension* 1*. Les morphismes de* $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ *dans* $\mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ *sont les applications* $k \mapsto e^{2i\pi kl/d}$ *pour un certain* $l = 0, ..., d - 1$*.*
9. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathfrak{S}_3$?
   Réponse : oui. On peut par exemple faire agir $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ *sur les trois éléments non nuls de* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^2$*.*
10. Quels sont à isomorphisme près les sous-groupes de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$? de $O_2(\mathbb{R})$? de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$? Montrer qu'un sous-groupe fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est cyclique.
    Réponses : $\mathbb{C}^* > S^1 \simeq \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, $e^{it} \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ *donc les sous-groupes finis de* $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ *sont cycliques. Si* $G < O_2(\mathbb{R})$ *est un sous-groupe fini, alors* $G \cap \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ *est distingué d'indice* 1 *ou* 2 *dans* G *et cyclique (car sous-groupe fini de* $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$*. On en déduit facilement que* G *est soit cyclique soit isomorphe à un groupe diédral. Pour les sous-groupes de* $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ *qui sont finis il faut aussi ajouter les groupes du tétraèdre, du cube et du dodécaèdre (sous-entendu les sous-groupes des rotations qui laissent stable l'ensemble des sommets d'un tétraèdre/cube/dodécaèdre régulier centré en* 0*) respectivement isomorphes à* A_4, S_4, A_5

11. Centre de $\mathrm{GL}_n(K)$?
Réponse : un élément g qui commute avec $I_n + E_{ij}$, $i \neq j$ vérifie $gE_{ij} = E_{ij}g$ et donc tous les éléments hors de la diagonale sont nuls et $g_{ii} = g_{jj}$ pour tous ij. Donc le centre est formé des matrices tI_n, $t \in K^*$.
12. Montrer que $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable si et seulement si sa classe de conjugaison est fermé !

Références

[1] Alessandrini. *Thèmes de géométrie.* Dunod.

[2] Antoine Chambert-Loir. *Algèbre corporelle.*

[3] Combes. *Algèbre et géométrie.*

[4] Francinou, Gianella, and Nicolas. *Oraux x-ens, algèbre 1.* Cassini.

[5] S. Lang. *Algèbre.* Dunod, 2014.

[6] Daniel Perin. *cours d'algèbre.*

[7] E. B. Vinberg. *A course in algebra*, volume 56 of *Graduate text in mathematics.* American mathematical society, 2003.