Leçon 150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices

1 Plan possible

Soit K un corps.

I.– Actions par multiplication à gauche et/ou à droite

(matrices équivalentes ⇔ de même rang, décomposition de Bruhat, transvections et simplicité de $\mathrm{PSL}_n(K)$*, ...).*

II.– Actions par conjugaison

(invariants de similitude, réduction de Jordan des matrices nilpotentes, ...)

III.– Actions par congruence

(formes quadratiques, rang, signature, cas $\mathbb{C}$*, cas* $\mathbb{R}$*, cas des corps finis, formes bilinéaires alternées (invariant = rang), définition du Pfaffien, ...)*

2 Développements possibles

Développement 1 (Décomposition de Bruhat, cf [3]) *Notons* B_n *le sous-groupe de* $\mathrm{GL}_n(K)$ *des matrices triangulaires supérieures inversibles. Le groupe* $B_n \times B_n$ *agit sur* $\mathrm{GL}_n(K)$ *par :* $(b_1, b_2).g := b_1 g b_2^{-1}$ *avec un nombre fini d'orbites : en effet, si on note pour* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1\leq i,j\leq n}$ *la matrice de permutation correspondante, alors :*

$$\mathrm{GL}_n(K) = \cup_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} B_n P_\sigma B_n$$

où l' union est disjointe.

Application : *Soit* $\mathscr{D} := \{0 < V_1 < ... < V_{n-1} < K^n \ : \ {}^\forall i, \dim V_i = i\}$*, on appele* $\mathscr{D}$ *l'ensemble des drapeaux de* K^n*. Le groupe* $\mathrm{GL}_n(K)$ *agit sur* $\mathscr{D}$ *par :*

$${}^\forall d = (V_1 < ... < V_{n-1}),\ {}^\forall g \in \mathrm{GL}_n(K),\ g.d := g(V_1) < ... < g(V_{n-1}) \ .$$

On en déduit une action de $\mathrm{GL}_n(K)$ *sur* $\mathscr{D}\times\mathscr{D}$ *par :* $g.(d, d') := (g(d), g(d'))$*. Cette action a* $n!$ *orbites en bijection avec* $\mathfrak{S}_n$*.*

Remarque : la décomposition de Bruhat avec cette application font un très bon développement.

Développement 2 (Simplicité de $\mathrm{PSL}_n(K)$**, cf [5, thm 8.4 et thm 9.6])** *Le groupe* $\mathrm{PSL}_n(K)$ *est un groupe simple si* $n \geq 3$ *ou* $n = 2$ *et* $|K| \geq 4$*.*

Remarques : Pour ce développement, on peut se contenter du cas $n \geq 3$. On commence par définir les transvections : ce sont les matrices conjuguées dans $\mathrm{GL}_n(K)$ à une matrice de la forme $T_{i,j}(\lambda) := I_n + \lambda E_{i,j}$, $\lambda \in K$, $1 \leq i \neq j \leq n$. Puis on montre que les transvections sont conjuguées dans $\mathrm{SL}_n(K)$ ... Il faut aussi remarquer que les groupes $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathfrak{S}_3$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \simeq A_4$ ne sont pas simples.

Ce développement peut servir aussi ailleurs.

Développement 3 (Réduction de Jordan des matrices nilpotentes) *Soit $N \in \mathscr{M}_n(K)$. Alors N est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme :*

$$\left(\begin{array}{c|c|c} J_{n_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & J_{n_r} \end{array}\right)$$

où pour tout $k \geq 1$, on note $J_k := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *le bloc de Jordan de taille k et où $n_1 \geq ... \geq n_r \geq 1$ sont des entiers tels que $n_1 + ... + n_r = n$. De plus la suite $n_1 \geq ... \geq n_r$ est unique.*

Remarques : excellent développement qui peut aussi servir dans la leçon sur la dualité. **Attention :** il ne faut surtout pas suivre la démonstration du Gourdon [4] au chapitre IV mais celle qui se trouve en annexe B sur les invariants de similitude (adaptable facilement au cas des matrices nilpotentes). On peut sauter l'unicité si on manque de temps. Il suffit de savoir retrouver la formule suivante :

$$k_m = \operatorname{rg} u^{m+1} - 2\operatorname{rg} u^m + \operatorname{rg} u^{m-1}$$

où k_m est le nombre de blocs de taille m dans la forme réduite.

Développement 4 (Réduction de Frobenius) *Si A est une matrice, il existe une suite de polynômes $P_1|...|P_r$ unitaires de degré ≥ 1 tels que A est semblable à la matrice diagonale par blocs*

$$\left(\begin{array}{c|c|c} C_{P_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & C_{P_r} \end{array}\right)$$

où les C_{P_i} sont les matrices compagnons des polynômes P_i. De plus, la suite de polynômes unitaires $P_1|...|P_r$ est unique.

Remarques : si $P = X^n + a_1X^{n-1} + ... + a_n$, la matrice compagnon associée est la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 \cdots 0 & 1 & & -a_1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

est de polynôme minimal et de polynôme caractéristique P. Les invariants de similitude de A sont les polynômes P_i, ils sont indépendants du corps K où sont les coefficients de A (au sens où si $K \leq K'$, alors les invariants calculés dans $\mathscr{M}_n(K')$ restent dans K). De plus deux matrices A, B sont semblables si et seulement si les invariants de similitude sont les mêmes. Pour l'unicité, on peut l'admettre si on trouve la démo trop longue mais c'est bien de savoir la démontrer rapidement ; dans ce cas il vaut mieux raisonner ainsi : supposons que A est semblable à une matrice $\left(\begin{array}{c|c|c} C_{P_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & C_{P_r} \end{array}\right)$ et à une matrice $\left(\begin{array}{c|c|c} C_{Q_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & C_{Q_s} \end{array}\right)$ où $P_1|...|P_r$ et $Q_1|...|Q_s$. Alors $P_r = Q_s =$ le polynôme minimal de A. Si on applique P_{r-1} à A on trouve une matrice semblable à la matrice $\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & P_{r-1}(C_{P_r}) \end{array}\right)$ et aussi à la matrice $\left(\begin{array}{c|c|c} P_{r-1}(C_{Q_1}) & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & P_{r-1}(C_{Q_s}) \end{array}\right)$ et comme $P_{r-1}(C_{P_r}) = P_{r-1}(C_{Q_s})$, on a (par exemple en comparant les rangs) $P_{r-1}(C_{Q_{s-1}}) = 0 \Rightarrow Q_{s-1}|P_{r-1}$. De même, on a $P_{r-1}|Q_{s-1}$ et donc $P_{r-1} = Q_{s-1}$, *etc* par récurrence.

Très bon développement qui peut aussi servir dans la leçon sur la dualité 159 mais aussi dans les leçons 153, 154.

Développement 5 ($\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2/\pm 1 \simeq \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$, *cf.* **[7, ex. 12.56] ou [6, chap. 7])**
Soit SU_2 *le groupe des matrices* 2×2 *complexes unitaires de déterminant* 1.
On a un isomorphisme de groupes :

$$\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2/\pm(I_2, I_2) \simeq \mathrm{SO}_4(\mathbb{R}) \ .$$

En particulier le groupe $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})/Z$ *n'est pas simple (*Z *est le centre (*$=\pm I_4$*)).*

Remarques : on fait agir $\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2$ sur $H := \left\{ \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}$ le $\mathbb{R}-$ espace vectoriel des quaternions. Si $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, on note $M^* := {}^t\overline{M}$. Alors si $q_1, q_2 \in H$, on remarque que $q_1 q_2^* + q_2^* q_1 \in \mathbb{R} I_2$, on pose alors $\langle q_1, q_2 \rangle := \frac{q_1 q_2^* + q_2^* q_1}{2}$. C'est un produit scalaire sur H et $\langle q, q \rangle = \operatorname{dét} q$ si $q \in H$.

On a donc une action de $\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2$ qur H via :

$$^\forall u, v \in \mathrm{SU}_2,\ ^\forall q \in H,\ (u, v).q := uqv^{-1} \ .$$

Cette action préserve le déterminant donc la norme euclidienne choisie sur H. D'où un morphisme $\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2 \to O_4(\mathbb{R})$. On peut admettre que SU_2 est connexe ; si demandé, il suffit de savoir trouver un chemin continu qui relie $g \in \mathrm{SU}_2$ à I_2 et pour cela, il suffit de diagonaliser : $g = P^* \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} P$ pour un θ réel et une matrice unitaire P ; voici un chemin continu :

$$t \in [0, 1] \mapsto P^* \begin{pmatrix} e^{it\theta} & 0 \\ 0 & e^{-it\theta} \end{pmatrix} P \ ...$$

Pour la surjectivité, on peut à la place de l'argument de Vinberg qui fait appel aux algèbres de Lie, utiliser cet argument plus élémentaire : comme les réflexions orthogonales engendrent $O_4(\mathbb{R})$ et comme toute rotation est un produit d'un nombre pair de réflexions, il suffit de montrer que le produit de 2 réflexions orthogonales est dans l'image de $\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2$. Or l'application $r_u : H \to H$, $q \mapsto -uq^*u$ est une réflection orthogonale d'hyperplan l'orthogonal de u. On vérifie facilement que si $u, v \in \mathrm{SU}_2$, alors, $r_u \circ r_v : q \mapsto uv^*qv^*u$ est dans l'image de $\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2$ car $uv^*, v^*u \in \mathrm{SU}_2$ ...

Développement 6 (Sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$**, cf [1])** *Soit* $K \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *un sous-groupe compact, alors* G *est conjugué à un sous-groupe de* $O_n(\mathbb{R})$.

Remarques : savoir démontrer facilement le cas fini en « moyennant »une forme quadratique définie positive : si q est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$ et si K est un groupe fini, alors la forme quadratique $x \mapsto \sum_{g \in G=K} q(gx)$ est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$ qui est $K-$invariante. Donc $K \leq O(q) = PO_nP^{-1}$ pour une certaine matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ...

Développement 7 (Pfaffien, *cf.* **[2, §8.6])** *Si $\varphi : K^n \times K^n \to K$ est une forme bilinéaire alternée (*i.e. $^\forall x$, $\varphi(x,x) = 0$*), alors φ a pour matrice*

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & & \\ \hline & \cdots & & \\ \hline & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \\ \hline & & & 0 \end{array}\right)$$

dans une certaine base de K^n. En particulier le rang est toujours pair ! En termes de matrices :

$$^\forall A \textit{ matrice antisymétrique }, \ ^\exists P \in \mathrm{GL}_n(K),$$

$$^tPAP = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & & \\ \hline & \cdots & & \\ \hline & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \\ \hline & & & 0 \end{array}\right)$$

où une matrice antisymétrique est une matrice A telle que $^tA = -A$. Pour que cela reste vrai en caractéristique 2 il faut ajouter la condition que la diagonale est nulle.

Applications : *si $A \in \mathscr{M}_{2n}(K)$ est antisymétrique (et si la diagonale est nulle en caractéristique 2), alors* $\det A = \mathrm{Pf}(A)^2$ *où* Pf *est une fonction polynomiale à coefficients entiers en les coefficients $A_{i,j}$, $i < j$, homogène de degré n. On choisit* Pf *qui a un coefficient > 0 devant $A_{1,2}A_{3,4}...A_{2n-1,2n}$. On en déduit que toutes les matrices du groupe $\mathrm{Sp}_{2n}(K)$ sont de déterminant 1.*

Remarques : Rappelons que $\mathrm{Sp}_{2n}(K)$ est le sous-groupe des matrices $M \in \mathrm{GL}_{2n}(K)$ telles que ${}^tMJM = J$ où $J := \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right)$. Par exemple :

$$\mathrm{Pf}\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = a \,,$$

$$\mathrm{Pf}\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix} = a_{12}a_{34} + a_{23}a_{14} - a_{13}a_{24} \;.$$

3 Exercices / questions possibles

1. Montrer que deux matrices réelles conjuguées sur $\mathbb{C}$ le sont sur $\mathbb{R}$.

   Solution : (avec les invariants de similitude (si on a donné une version matricielle)) soient A, B deux matrices réelles semblables sur $\mathbb{C}$. Par unicité des invariants de similitude, les invariants de similitude sur $\mathbb{R}$ de la matrice A sont aussi ses invariants de similitude sur $\mathbb{C}$. Ce sont donc des polynômes $P_{1,A}, ..., P_{r,A} \in \mathbb{R}[X]$. De même pour B : ce sont des polynômes $Q_{1,B}, ..., Q_{s,B} \in \mathbb{R}[X]$. Comme A, B sont semblables sur $\mathbb{C}$, $r = s$ et $P_i = Q_i$ pour tout i. Ayant les mêmes invariants de similitude, les deux matrices A, B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

   (sans les invariants de similitude) : Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $PA = BP$. Il existe U, V des matrices réelles telles que $P = U + iV$. Alors $UA = BU$ et $VA = BV$. Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(U + tV)A = B(U + tV)$. Il reste à choisir t tel que $\mathrm{dét}\,(U + tV) \neq 0$. *C'est possible car le polynôme* $\mathrm{dét}\,(U + TV)$ *ne s'annule pas en i ...*

2. Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, justifier que l'adhérence de l'ensemble des matrices de rang r contient toutes les matrices de rang $\leq r$.

3. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, alors A est diagonalisable si et seulement si sa classe de conjugaison est fermée dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

   Indications : si A est diagonalisable, alors B est semblable à A si et seulement si $\chi_B = \chi_A$ et $m_A(B) = 0$ (où m_A est le polynôme minimal de A). Or l'application qui à une matrice B associe les coefficients de son polynôme caractéristique est continue ... Dans l'autre sens, il suffit *de traiter le cas des blocs de Jordan : par exemple* $\lim_{\epsilon\to 0}\begin{pmatrix}1 & \epsilon\\ 0 & 1\end{pmatrix} = I_2$ *et pour tout* $\epsilon > 0$, *la matrice* $\begin{pmatrix}1 & \epsilon\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ *reste dans la classe de conjugaison de* $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

4. Combien y a-t-il de matrices 4×4 nilpotentes à similitude près ?
5. si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, alors A est semblable à ${}^tA$.
   Indication : il suffit de le montrer pour un bloc de Jordan ou pour une matrice compagnon.
6. Existe-t-il des matrices non semblables avec le même polynôme caractéristique ET le même polynôme minimal ?
7. Quels sont les invariants de similitude de la matrice $\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \mu\end{pmatrix}$?
8. Justifier que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
   Réponse : Soit $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, *alors* $M = P_1 ... P_r$ *où pour tout* k, $P_k = T_{i_k,j_k}(\lambda_k)$ *pour certains* $i_k \neq j_k$ *et* $\lambda_k \in \mathbb{R}$ *(on suppose que cet énoncé a été mis dans le plan). On pose* $P_{k,t} := T_{i_k,j_k}(\lambda_k t)$ *si* $t \in \mathbb{R}$. *L'application :*
   $$[0,1] \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}),\ t \mapsto P_{1,t} ... P_{r,t}$$
   est continue et vaut I_n *en* $t = 0$, M *en* $t = 1$.*(Si on a énoncé que toute matrice de* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ *est produit d'un nombre fini de matrices de la forme* $T_{i,j}(\lambda$.
9. Combien de matrices nilpotentes dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{F}_q)$?
   Réponse : sont nilpotentes la matrice nulle et les conjugués de $J = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. *Or le stabilisateur de l'action par conjugaison de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ *en* J *est*
   $$S = \left\{ \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} J = J \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \right\}$$

(rapide calcul)

$$= \{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \ : \ a \neq 0\}$$

Donc le nombre de matrices semblables à J *est* $\frac{|\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)|}{|S|} = q^2 - 1$. *Il y a donc* $1 + q^2 - 1 = q^2$ *matrices nilpotentes ...*

Références

[1] Alessandrini. *Thèmes de géométrie.* Dunod.

[2] Cohn. *Algebra 1.* John Wiley & sons.

[3] Francinou, Gianella, and Nicolas. *Oraux x-ens, algèbre 1.* Cassini.

[4] X. Gourdon. *Les maths en tête, algèbre.* Ellipses.

[5] S. Lang. *Algèbre.* Dunod, 2014.

[6] Daniel Perin. *cours d'algèbre.*

[7] E. B. Vinberg. *A course in algebra*, volume 56 of *Graduate text in mathematics.* American mathematical society, 2003.