MATRICES SYMÉTRIQUES RÉELLES ET MATRICES HERMITIENNES

DANS LE PLAN

– forme quadratique associée à une matrice symétrique $M : X \mapsto {}^tXMX$;
– forme hermitienne associée à une matrice hermitienne $M : X \mapsto {}^t\overline{X}MX$;
– définition de la signature : deux matrices symétriques réelles sont congruentes $\Leftrightarrow$ elles ont la même signature ; remarquer que deux matrices symétriques complexes sont congruentes $\Leftrightarrow$ elles ont même rang ;
– les matrices symétriques réelles sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$ dans une base orthonormée !
– les matrices hermitiennes sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$ dans une base orthonormée avec des valeurs propres réelles ;
– Orthogonalisation simultanée : si A est symétrique définie positive, si B est symétrique, alors il existe P inversible telle que

$$ {}^tPAP = I_n \text{ et } {}^tPBP = D $$

où D est diagonale. **De plus les coefficients diagonaux de D sont les racines du polynôme** dét $(xA - B)$**.**
Voici un exemple concret (*cf.* [2, §8.5] :
soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors A est définie positive car ses mineurs principaux sont $2, 2 \times 2 - 1 \times 1 = 3, \text{dét}\, A = 1 > 0$. On résout

$$ \text{dét}\,(xA - B) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2x & x-1 & 3x+1 \\ x-1 & 2x-2 & -x-1 \\ 3x+1 & -x-1 & 9x-1 \end{vmatrix} = 0 $$

$$ \Leftrightarrow x^3 - x^2 - x - 1 = 0 $$
$$ \Leftrightarrow (x-1)^2(x+1) = 0 \ . $$

Pour -1 on trouve $v_1 = {}^t(-32, 1)$ qui vérifie $(-A-B)v_1 = 0$ et ${}^tv_1Av_1 = 1$.
Ensuite on trouve $V = {}^t(u, v, w)$ qui est solution de $(A-B)V = 0 \Leftrightarrow V$ de la forme $V = {}^t(2a, b, -a),\ a, b \in \mathbb{R}$.
On peut prendre donc $v_2 = {}^t(0, 1, 0)$ et on choisit ensuite $v_3 = {}^t(2a, b, -a)$ tel que ${}^tv_2Av_3 = 0 \Leftrightarrow (1, 2, -1){}^t(2a, b, -a) = 0 \Leftrightarrow 3a + 2b = 0$. On peut

donc prendre $v_3 = (-4, 3, 2)$. On normalise pour obtenir v_2', v_3' tels que ${}^t v_i' A v_i' = 1$:
On prend $v_2' = \frac{v_2}{\sqrt{2}}$, $v_3' = \frac{v_3}{\sqrt{2}}$. Donc en posant $P = \left(\begin{array}{c|c|c} v_1 & v_2' & v_3' \end{array} \right) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 2 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -2\sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, on a bien ${}^tPAP = I_3$ et ${}^tPBP = \mathrm{diag}(-1, 1, 1)$.

Exercices

- Si M est antisymétrique réelle, alors M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ avec des valeurs propres dans $i\mathbb{R}$.
  Réponse : iM est hermitienne donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$ à valeurs propres réelles.
- La matrice $n \times n$: $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{C}$, sur $\mathbb{Q}$, sur le corps fini $\mathbb{F}_q$?
  Réponse : sur $\mathbb{R}$: oui car symétrique. Sur $\mathbb{C}$ oui car elle l'est sur $\mathbb{R}$. Sur $\mathbb{Q}$: on remarque que 0 est valeur prpore de multiplicité $\dim \ker J = n - \mathrm{rg}\, J = n - 1$ *et comme la trace est n, l'autre valeur propre est n. Donc oui ! Sur $\mathbb{F}_q$, on peut utiliser le critère : J diagonalisable $\Leftrightarrow J^q = J$. Or $J^q == \begin{pmatrix} n^{q-1} & \dots & n^{q-1} \\ \vdots & & \vdots \\ n^{q-1} & \dots & n^{q-1} \end{pmatrix}$. Donc sur $\mathbb{F}_q$, J est diagonalisable si et seulement si n est premier à q.*

Développements possibles :

Développement 1 (Sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, cf [1]) *Soit $K \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ un sous-groupe compact, alors G est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.*

Remarques : savoir démontrer facilement le cas fini en « moyennant »une forme quadratique définie positive : si q est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$ et si K est un groupe fini, alors la forme quadratique $x \mapsto \sum_{g \in G = K} q(gx)$ est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$ qui est $K-$invariante. Donc $K \leq O(q) = PO_nP^{-1}$ pour une certaine matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ...

Développement 2 (Pfaffien, *cf.* **[2, §8.6])** *En termes de matrices :*

$$^\forall A \textit{ matrice antisymétrique }, \ ^\exists P \in \mathrm{GL}_n(K),$$

$$^tPAP = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & & \\ \hline & \ldots & & \\ \hline & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \\ \hline & & & 0 \end{array}\right)$$

où une matrice antisymétrique est une matrice A telle que $^tA = -A$. Pour que cela reste vrai en caractéristique 2 il faut ajouter la condition que la diagonale est nulle.

Applications : *si $A \in \mathscr{M}_{2n}(K)$ est antisymétrique (et si la diagonale est nulle en caractéristique 2), alors* $\det A = \mathrm{Pf}(A)^2$ *où* Pf *est une fonction polynomiale à coefficients entiers en les coefficients $A_{i,j}$, $i < j$, homogène de degré n. On choisit* Pf *qui a un coefficient > 0 devant $A_{1,2}A_{3,4}...A_{2n-1,2n}$. On en déduit que toutes les matrices du groupe* $\mathrm{Sp}_{2n}(K)$ *sont de déterminant* 1.

Remarques : Rappelons que $\mathrm{Sp}_{2n}(K)$ est le sous-groupe des matrices $M \in \mathrm{GL}_{2n}(K)$ telles que $^tMJM = J$ où $J := \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right)$. Par exemple :

$$\mathrm{Pf}\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = a\,,$$

$$\mathrm{Pf}\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix} = a_{12}a_{34} + a_{23}a_{14} - a_{13}a_{24} \ .$$

Quel rapport avec le titre de la leçon ? eh bien si A est antisymétrique, iA est hermitienne !

Développement 3 *Cf [4, th. 8] Matrices de Gram. Ce sont les matrices de la forme* $G(v_i) = (\langle v_i, v_j \rangle)_{ij}$ *où les* v_i *sont des vecteurs d'un espace euclidien* E.

Théorème : *si* $x \in E$, *si* $F \leq E$ *est un sous-espace de base (pas forcément orthogonale* $v_1, ..., v_r$*), alors* $d(x, F) = \inf_{y \in F} ||x - y|| = \frac{G(v_1,...,v_r,x)}{G(v_1,...,v_r)}$.

Application : inégalité d'Hadamard (cf. [4, th. 7]) ou un calcul de borne inférieure d'une certaine classe d'intégrales cf. [4, exo 5, ch. V]

Développement 4 *Les inégalités de Weyl (cf. [3]).*

Si M *est une matrice symétrique réelle de taille* n, *on note* $\lambda_1(M) \geq ... \geq \lambda_n(M)$ *ses valeurs propres.*

Théorème : *si* A, B *sont symétriques réelles, alors pour tous* i, j *on a :*

$$\lambda_{i+j-1}(A + B) \leq \lambda_i(A) + \lambda_j(B) \ .$$

Références

[1] Alessandrini. *Thèmes de géométrie*. Dunod.

[2] Cohn. *Algebra 1*. John Wiley & sons.

[3] J. Fresnel et M. Matignon. *Algèbre et géométrie : 81 thèmes pour l'agrégation de mathématiques*. Ellipses.

[4] X. Gourdon. *Les maths en tête, algèbre*. Ellipses.