Cours du jeudi 6 octobre 2016

Théorème 5.9 *Soit K un corps. Si $A \in \mathscr{M}_n(K)$, alors il existe une unique suite $P_1|...|P_r$ de polynômes unitaires de degrés ≥ 1, avec $r \geq 1$, telle que A est semblable à la matrice diagonale par blocs :*

$$\begin{pmatrix} C_{P_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{P_r} \end{pmatrix} .$$

Les polynômes $P_1, ..., P_r$ sont appelés les invariants de similitude de A.

Remarque : nous verrons que les P_i sont indépendants du corps K (*i.e.* si $K \leq K'$ alors on trouve les mêmes invariants de similitude sur K et sur K'.

6 Polynômes d'endomorphismes

Soit $\mathbb{K}$ un corps.
Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

6.1 Définition

On remplace X^k par u^k (ou A^k) et 1 par Id_E (ou I_n).
Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + ... \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. On pose :

$$P(u) := a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 u + a_2 u^2 + ... \text{ et } P(A) := a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + ...$$

Proposition 6.1 *L'application :*

$$\mathbb{K}[X] \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \, , \, P(X) \mapsto P(A)$$

est un morphisme d'algèbres i.e. *: c'est linéaire et :*

$$^\forall P, Q \in \mathbb{K}[X] \, , \, (PQ)(A) = P(A)Q(A)$$

de même l'application :

$$\mathbb{K}[X] \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E) \, , \, P(X) \mapsto P(u)$$

est aussi un morphisme d'algèbres.

Remarque : [importante] En particulier, pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, les matrices $P(A)$ et $Q(A)$ commutent :

$$P(A)Q(A) = Q(A)P(A)$$

de même les endomorphismes $P(u)$ et $Q(u)$ commutent. En particulier, $\ker P(A)$ est stable par A.

EXEMPLE : — **Polynôme d'une diagonale :**

$$D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

on a :

$$P(D) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

pour tout polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$.

— **polynôme et conjugaison :** Si Q est inversible, si $A = QA'Q^{-1}$, alors pour tout polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$, $P(A) = QP(A')Q^{-1}$.

Exercice 22 *Montrer que plus généralement, pour une matrice triangulaire :*

$$T := \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \vdots \\ & \ddots & \vdots \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

on a :

$$P(T) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & \cdots & \vdots \\ & \ddots & \vdots \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

pour tout polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ (les coefficients hors de la diagonale peuvent avoir une expression compliquée mais les coefficients diagonaux sont obtenus simplement en leur appliquant le polynôme P).

6.2 Théorème de Cayley-Hamilton

Définition 14 *On dit qu'un polynôme $P(X)$ est un polynôme annulateur de la matrice A ou de l'endomorphisme u si $P(A) = 0$, ou si $P(u) = 0$.*

Théorème 6.2 (de Cayley-Hamilton) *Soit* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. *Alors* $\chi_A(A) = 0$.

Démonstration (s) du théorème :

1ère démonstration (algébrique) :

Notons $B(X) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X])$ la transposée de la comatrice de $XI_n - A$. Tous les coefficients de la matrice $B(X)$ sont des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré $\leq n-1$. Il existe donc des matrices :

$$B_0, ..., B_{n-1} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

telles que :

$$B(X) = B_0 + XB_1 + ... + X^{n-1}B_{n-1} \ .$$

On a alors :

$$B(X)(XI_n - A) = \text{dét}\,(XI_n - A)I_n$$

$$\Leftrightarrow (B_0 + XB_1 + ... + X^{n-1}B_{n-1})(XI_n - A) = \chi_A(X)I_n$$

(on développe la partie gauche)

$$\Leftrightarrow -B_0A + X(B_0 - B_1A) + X^2(B_1 - B_2A) + ... + X^{n-1}(B_{n-2} - B_{n-1}A) + X^nB_{n-1}$$

$$(2) \qquad = \chi_A(X)I_n$$

Notons $c_0, ..., c_n \in \mathbb{K}$ les coefficients du polynôme caractéristique :

$$\chi_A(X) = c_0 + ... + c_nX^n$$

($c_0 = \pm\text{dét}\,A, c_n = 1$) On a donc d'après (2) :

$$-B_0A = c_0I_n$$

$$B_0 - B_1A = c_1I_n$$

$$...$$

$$B_{n-1} = c_nI_n$$

et donc :

$$\chi_A(A) = c_0I_n + c_1A + ... + c_nA^n$$

$$= -B_0A + (B_0 - B_1A)A + (B_1 - B_2A)A^2 + ... + (B_{n-2}A^{n-1} - B_{n-1})A^{n-1} + B_{n-1}A^n$$

$$= 0$$

car « tout se simplifie » .

2ème démo : plus loin ... *q.e.d.*

Exercices

Exercice 23 *Où chercher les valeurs propres, connaissant un polynôme annulateur mais ne connaissant pas le polynôme caractéristique ?*

Si P est un polynôme annulateur de u, respectivement de A, alors :

$$\mathrm{Sp}(u) \subseteq \{ \textit{ racines de } P \}$$

respectivement

$$\mathrm{Sp}(A) \subseteq \{ \textit{ racines de } P \} \ .$$

Exercice 24 *Vérifier directement le théorème de Cayley-Hamilton pour une matrice compagnon et montrer que si P est unitaire, P est le polynôme unitaire de plus bas degré qui annule C_P.*

Exercice 25 *Soit M un $A-$module de type fini où A est un anneau commutatif. Montrer qu'un endomorphisme surjectif $M \to M$ (de $A-$module) est forcément bijectif.*

6.3 Polynôme minimal

Définition 15 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'en semble des polynômes $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ annulateurs de A forme un idéal non nul de $\mathbb{K}[X]$ donc est engendré par un unique polynôme unitaire noté $m_A(X) \in \mathbb{K}[X]$; c'est le polynôme minimal de A . Le polynôme $m_A(X)$ peut aussi être défini comme le polynôme unitaire de plus bas degré qui annule A.*

Théorème 6.3 *Pour une matrice $A \in \mathscr{M}_n(K)$, sont équivalentes :*

(i) la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$;

(ii) le polynôme minimal de A est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$;

(iii) il existe un polynôme scindé à racines simples sur K qui annule A.

Démonstration : ***i* $\Rightarrow$ *ii*** : Si A est diagonalisable, A est semblable à une diagonale. Or deux matrices semblables ont le même polynôme minimal (*exo*) . Donc il suffit de calculer le polynôme minimal d'une matrice diagonale ce qui est l'objet d'un exercice précédent.

iii* $\Rightarrow$ *i : Si $m_A(X) = (X - \lambda_1)...(X - \lambda_r)$ avec $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts annule A, la décomposition en éléments simples de la fraction $\frac{1}{m_A(X)}$ donne :

$$\frac{1}{m_A(X)} = \frac{a_1}{X - \lambda_1} + ... + \frac{a_r}{X - \lambda_r}$$

où $a_i = \frac{1}{m'_A(\lambda_i)}$ pour tout i.

Donc
$$1 = a_1 Q_1(X) + ... + a_r Q_r(X)$$
où pur tout i :
$$Q_i(X) = \frac{m_A(X)}{X - \lambda_i} = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} (X - \lambda_j)$$
est un polynôme. Si on applique cette égalité à la matrice A, on trouve :
$$I_n = a_1 Q_1(A) + .. + a_r Q_r(A)$$
donc si $Z \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on a :
$$Z = a_1 Q_1(A)(Z) + .. + a_r Q_r(A)(Z)$$
or, pour tout $1 \leq i \leq r$, $Q_i(A)(Z) \in \ker(A - \lambda_i I_n)$ car :
$$(A - \lambda_i I_n)(Q_i(A)(Z)) = m_A(A)(Z) = 0 \ .$$

Par conséquent
$$\oplus_{i=1}^r \ker(A - \lambda_i I_n) = \mathbb{K}^n$$
et A est diagonalisable.

Remarque : on peut utiliser aussi le lemme des noyaux. Si $m_A(X) = (X - \lambda_1)...(X - \lambda_r)$ avec $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, on a :
$$m_A(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{K}^n = \ker m_A(A) = \ker(A - \lambda_1 I_n) \oplus .... \oplus \ker(A - \lambda_r I_n)$$
car les polynômes $X - \lambda_i$ sont deux à deux premiers entre eux. En effet si $D(X)$ divise $X - \lambda_i$ et $X - \lambda_j$, $i \neq j$ dans $\mathbb{K}[X]$, alors $D(X)$ divise $X - \lambda_i - (X - \lambda_j) = \lambda_j - \lambda_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ donc $D(X)$ est constant. Donc A est diagonalisable.

q.e.d.

Lemme 6.4 (des noyaux) *Soit u un endomorphisme de E.*

Soient $P(X), Q(X)$ des polynômes premiers entre eux. ALors :
$$\ker((PQ)(u)) = \ker(P(u)) \oplus \ker(Q(u)) \ .$$

Généralisation : soient $P_1, ..., P_r$ des polynômes deux à deux premiers entre eux. Alors :
$$\ker(P_1 ... P_r)(u) = \ker(P_1(u)) \oplus ... \oplus \ker(P_r(u))$$

(énoncés similaires avec des matrices)

Démonstration :

On écrit $1 = AP + BQ$ pour certains polynômes $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On a donc :

$$\mathrm{Id}_E = P(u)A(u) + Q(u)B(u) \ .$$

Soit $x \in \ker((PQ)(u))$, alors :

$$x = P(u)A(u)(x) + Q(u)B(u)(x) \ .$$

Or,

$$P(u)Q(u)B(u)(x) = B(u)P(u)Q(u)(x) = 0 \ .$$

Donc $Q(u)B(u)(x) \in \ker(P(u))$. De même, $P(u)A(u)(x) \in \ker(Q(u))$. Donc :

$$x \in \ker(P(u)) + \ker(Q(u)) \ .$$

Réciproquement, il est clair que

$$\ker(P(u)) \subseteq \ker((PQ)(u)) \text{ et } \ker(Q(u)) \subseteq \ker((PQ)(u)) \ .$$

Donc :

$$\ker(PQ)(u) = \ker P(u) + \ker Q(u)$$

montrons que cette somme est directe : soit $x \in \ker P(u) \cap \ker Q(u)$. Alors :

$$x = A(u)P(u)(x) + B(u)Q(u)(x) = 0 \ .$$

Pour le cas général : on raisonne par récurrence sur r :

Montrons d'abord que :

$$\ker(P_1(u)) + ... + \ker(P_r(u)) = \ker((P_1...P_r)(u)) \ .$$

Soit $x \in \ker((P_1...P_r)(u))$. Alors comme P_1 et P_2 sont premiers entre eux, on a :

$$1 = AP_1 + BP_2$$

pour certains polynômes $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Donc en appliquant cette égalié à u :

$$x = A(u)P_1(u)(x) + B(u)P_2(u)(x)$$

or : $A(u)P_1(u)(x) \in \ker(P_2...P_r)(u)$ car :

$$(P_2...P_r)(u)A(u)P_1(u)(x) = A(u)(P_1....P_r)(u)(x) = 0 \ .$$

Donc par hypothèse de récurrence :

$$A(u)P_1(u)(x) \in \ker(P_2(u)) + ... + \ker(P_r(u))$$

et de même :

$$B(u)P_2(u)(x) \in \ker(P_1(u)) + \ker(P_3(u)) + ... + \ker(P_r(u))$$

et donc :

$$x = A(u)P_1(u)(x) + B(u)P_2(u)(x) \in \ker(P_1(u)) + ... + \ker(P_r(u)) \ .$$

Il reste à montrer que cette somme est directe :
Supposons que

$$x_1 + ... + x_r = 0$$

pour certains $x_1 \in \ker(P_1(u)), ..., x_r \in \ker((P_r(u))$. si on applique $P_1(u)$, on trouve :

$$P_1(u)(x_2) + ... + P_1(u)(x_r) = 0$$

Or, $P_1(u)(x_2) \in \ker(P_2(u)), ..., P_1(u)(x_r) \in \ker((P_r(u))$ donc par hypothèse de récurrence :

$$P_1(u)(x_2) = ... = P_1(u)(x_r) = 0$$

Or : $\ker P_1(u) \cap \ker P_i(u) = 0$ si $i > 1$ car P_1 et P_i sont premiers entre eux !.
Donc :

$$x_2 = ... = x_r = 0$$

et forcément, $x_1 = 0$. *q.e.d.*

Corollaire 6.4.1 *Si une matrice E est de dimension finie, si $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$ est un edomorphisme diagonalisable et si $F \leq E$ est un sous-espace stable par u, alors $u|_E$ est aussi diagonalisable sur $\mathbb{K}$.*

Démonstration : En effet,

$$m_u(u) = 0 \Rightarrow m_u(u|_F) = 0 \Rightarrow m_{u|_F} \text{ divise } m_u$$

mais si m_u est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$, tous ses diviseurs le sont aussi. *q.e.d.*

Exercices

Exercice 26 *Démontrer l'unicité dans le théorème de décomposition en blocs compagnons. Indications : si* $\mathrm{diag}(C_{P_1}, ..., C_{P_r})$ *est semblable à* $\mathrm{diag}(C_{Q_1}, ..., C_{Q_s})$ *alors* $P_r = Q_s =$ *le polynôme minimal commun ! Ensuite montrer que* P_{r-1} *annule tous les* C_{Q_i}, $1 \leq i < s$ *donc* $Q_{s-1}|P_{r-1}$ *et de mm̂eme* $Q_{s-1}|P_{r-1}$ *donc* $P_{r-1} = Q_{s-1}$, *etc*

Exercice 27 *Montrer que si* $d = \mathrm{pgcd}(P, Q)$, *alors* $\ker d(u) = \ker P(u) \cap Q(u)$ *si* u *est un endomorphisme. De même si* $p = \mathrm{ppcm}(P, Q)$, *montrer que* $\ker P(u) + \ker Q(u) = \ker p(u)$.

Exercice 28 *Justifier que l'idéal des polynômes annulateurs d'une matrice est non nul sans utiliser Cayley-Hamilton.*

Exercice 29 *Montrer que si* $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *est une matrice nilpotente (*i.e. $N^q = 0$ *pour un* q *assez grand), alors* $N^n = 0$.

Exercice 30 *Déterminer les polynômes minimaux d'une matrice diagonale, d'une homothétie d'un bloc de Jordan, d'une matrice compagnon.*

Exercice 31 *Déduire du théorème de réduction en blocs compagnons que* A *et*$^t(A)$ *sont semblables (pour toute matrice carrée* A*). Indications : il suffit de le montrer lorsque* A *est la matrice compagnon* C_P. *Si* $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0$, *et si on note* e_1 *le premier vecteur de la base canonique, considérer la base* $v_1, ..., v_n$ *où* $v_k = A^{n-k}(e_1) + a_{n-1}A^{n-k-1}(e_1) + ... + a_k e_1$.

Exercice 32 *Sur* $\mathbb{C}$, *on note* Sp *le spectre. Montrer que pour une matrice* A *et un polynôme* $P(X) \in \mathbb{C}[X]$, $\mathrm{Sp}(P(A)) = P(\mathrm{Sp}(A))$.

Exercice 33 *Si* E *est de dimension finie, le polynôme minimal de* u *coïncide avec le polynôme minimal de sa matrice dans n'importe quelle base de* E.

Exercice 34 *Soit* P *un polynôme annulateur de* u *un endomorphisme de* E. *Alors, pour tout* $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $P(\lambda) = 0$. *En particulier si le polynôme minimal* m_u *existe,* $m_u(\lambda) = 0$ *pour toute valeur propre* λ *de* u.

Démonstration : Si $u(x) = \lambda x$, $0 \neq x \in E$. Alors, $0 = P(u)(x) = P(\lambda)x \Rightarrow P(\lambda) = 0$. <u>*q.e.d.*</u>

Exercice 35 *Les racines de* $m_u(X)$ *sont exactement les valeurs propres de* u *c-à-d (si* $m_u(X)$ *existe) :*

$$^\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad m_u(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \mathrm{Sp}(u) \ .$$

Démonstration : Il suffit de démontrer que si $m_u(\lambda) = 0$, alors λ est une valeur propre de u. Or dans ce cas, $m_u(X) = (X - \lambda)Q(X)$ pour un certain polynôme $Q(X)$ de degré $< \deg m_u(X)$. Donc :

$$0 = m_u(u) = (u - \lambda \mathrm{Id}_E)Q(u) \ .$$

Forcément $Q(u) \neq 0$ par minimalité de m_u. Donc $u - \lambda\mathrm{Id}_E$ n'est pas injective et donc λ est une valeur propre de u. *q.e.d.*

6.4 Décomposition de Dunford-Jordan

Soit E un $K-$espace vectoriel de dimension quelconque. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe un polynôme P scindé sur $\mathbb{K}$ qui annule u : $P(X) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{a_i}$, pour certains $\lambda_i \in K$ deux à deux distincts et des entiers $a_i \geq 1$.

Proposition 6.5 (projecteurs spectraux) *(i) Il existe pour tout i un polynôme $Q_i(X) \in K[X]$ tel que $Q_i = 1 \bmod (X - \lambda_i)^{a_i}$ et $Q_i = 0 \bmod (X - \lambda_j)^{a_j}$ pour tous $j \neq i$.*

(ii) On a $E = \oplus_{i=1}^r \ker(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{a_i}$. On note π_i les projecteurs associés.

(iii) Pour tout i, $\pi_i = Q_i(u)$.

(iv) Si $\lambda \in K$, on a $E^\lambda(u) := \cup_{n \geq 0} \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^n = 0$ si $\lambda \notin \{\lambda_i : 1 \leq i \leq r\}$ et $\ker(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{a_i}$ si $\lambda = \lambda_i$.

On dit que les projecteurs π_i s'ils existent sont les *projecteurs spectraux* de u.

Démonstration : On décompose en éléments simples : $1/P = \sum_i U_i/(X - \lambda_i)^{a_i}$ pour certains polynômes U_i. On a alors $1 = \sum_i U_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r (X - \lambda_j)^{a_j}$. Il suffit de poser $Q_i := U_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r (X - \lambda_j)^{a_j}$. Comme $Q_i(X) = 0 \bmod (X - \lambda_j)^{a_j}$, si $x \in \ker(u - \lambda_j \mathrm{Id}_E)^{a_j}$, $Q_i(u)(x) = 0$. De même, comme $Q_i(X) = 1 \bmod (X - \lambda_i)^{a_i}$, on a $Q_i(u)(x) - x = 0$ si $x \in \ker(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{a_i}$. Enfin si $\lambda \notin \{\lambda_i : 1 \leq i \leq r\}$, si $n \geq 0$, les polynômes $P(X)$ et $(X - \lambda)^n$ sont premiers entre eux donc $\ker(P(u)) = E$ et $\ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^n$ sont en somme directe d'après le lemme des noyaux donc $\ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^n = 0$. Si $\lambda = \lambda_i$, si $n \geq a_i$ et $x \in \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^n$, alors $x - \pi_i(x) \in \ker(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^n \cap \oplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \ker(u - \lambda_j \mathrm{Id}_E)^{a_j} = 0$ (d'après le lemme des noyaux). Donc $x = \pi_i(x) \in \ker(u - \lambda_i)^{a_i}$. *q.e.d.*

à retenir : *les projecteurs spectraux sont des polynômes en u.*

Théorème 6.6 *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que u est annulé par un polynôme scindé sur K. Alors il existe un unique couple (d, n) tels que :*

0) $d, n \in \mathscr{L}(E)$;

i) d diagonalisable, n nilpotent ;

ii) $dn = nd$;

iii) $u = d + n$.

De plus, d, n sont des polynômes en u.

Cette décomposition

$$u = d + n$$

est appelée *décomposition de Dunford-Jordan* .

Remarque : Même énoncé avec une matrice A à la place de u.

Démonstration :

soient π_i les projecteurs spectraux de u.

— **existence :** $d := \lambda_1\pi_1 + ... + \lambda_r\pi_r$, $n := u - d$.

Pour tout $x \in E^{\lambda_i}$, $d(x) = \lambda_i x$. Donc

$$E^{\lambda_i} \subseteq \ker(d - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$$

et :

$$E = \oplus_i \ker(d - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$$

et d est diagonalisable avec les mêmes valeurs propres que u.

Pour tout $x \in E^{\lambda_i}$,

$$\begin{aligned} n(x) &= u(x) - d(x) \\ &= (u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)(x) \end{aligned}$$

et par récurrence :

$$n^k(x) = (u - \lambda_i)^k(x) \ .$$

Donc si $k \geq \max_{1 \leq i \leq r}\{k_i\}$, $n^k(x) = 0$.

On a construit d et n comme des polynômes en u ce qui est important pour la suite.

— **unicité :** supposons que $u = d + n$ avec d diagonalisable, n nilpotent et $dn = nd$. Alors : d commute avec u donc $E_i := \ker(u - \lambda_i)^{a_i}$ est stable par d. Or $d - \lambda_i|_{E_i} = (u - \lambda_i)|_{E_i} - n|_{E_i}$ est nilpotent car $u - \lambda_i$ et n commutent et $(u - \lambda_i)^{a_i}$ est nul sur E_i. Donc $d - \lambda_i|_{E_i}$ est diagonalisable et nilpotent donc nul ! Conclusion : on n'a pas le choix pour d, $d = \lambda_i \mathrm{Id}$ sur E_i et $E = \oplus_i E_i$.

q.e.d.

À retenir :

— $d = \lambda_1\pi_1 + ...\lambda_r\pi_r$ et les valeurs propres de u sont les valeurs propres de d.

Exercices

Exercice 36 *Si E est de dimension finie, si χ_u est scindé dans K, alors on a une décomposition de Dunford-Jordan $u = d + n$ et $\chi_u(X) = \chi_d(X)$.*

indication : si $\lambda_1, ..., \lambda_r$ sont les valeurs propres distinctes de u, si $\chi_u(X) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{a_i}$, alors les valeurs propres de d sont les λ_i et comme d est diagonalisable, $\chi_d(X) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\dim E_{\lambda_i}(d)}$. Or $E_{\lambda_i}(d) = \Im \pi_i = \ker(u - \lambda_i)^{a_i}$ qui est de dimension a_i.

Exercice 37 *Soit u un endomorphisme avec une décomposition de Dunford-Jordan : $u = d + n$, d diagonalisable, n nilpotent et $dn = nd$. Alors :*

— *u diagonalisable $\Leftrightarrow u = d \Leftrightarrow n = 0$;*

— *u nilpotent $\Leftrightarrow u = n \Leftrightarrow d = 0$.*

Exercice 38 — *si $A = \begin{pmatrix} \lambda & & \vdots \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$, $D = \lambda I_n$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & & \vdots \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$;*

— **ATTENTION !** *si $u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $d = u$, $n = 0$. Mais si $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors $d = I_2$ et $n = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

Exercice 39 *Diagonalisable et nilpotent implique nul.*

Exercice 40 *Déterminer les projecteurs spectraux de $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$*

6.5 Exponentielle

Dans ce chapitre, les matrices sont complexes !

Définition 16 *On dit qu'une suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices complexes converge vers une matrice A si pour tous i, j la suite des coefficients $A_{k,i,j}$ converge vers le coefficient $A_{i,j}$ dans $\mathbb{C}$.*

On pose :

$$|||A||| := \max_i \sum_j |a_{i,j}|$$

pour toute matrice A.

— propriétés : c'est une norme multiplicative ! *c-à-d* : pour toutes matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

i) $|||A||| = 0 \Leftrightarrow A = 0$;

ii) $|||A + B||| \leq |||A||| + |||B|||$;

iii) $|||\lambda A||| = |\lambda||||A|||$;

iv) $|||AB||| \leq |||A||||||B|||$.

Remarque : Si $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, alors pour tous i, j, $|a_{i,j}| \leq |||A|||$. On en déduit qu'une suite de matrices $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice A si :

$$\lim_{k\to\infty} |||A_k - A||| = 0 \ .$$

Exercice 41 *En déduire que si* (A_k) *et* (B_k) *sont des suites de matrices qui convergent vers* A *et* B*, alors :*

$$\lim_{k\to\infty} A_k B_k = AB \ .$$

Exercice 42 *On pose pour tout* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ *:* $||X|| := \max_{i=1}^n |x_i|$.

Alors :

$$|||A||| = \max_{\substack{X\in\mathbb{K}^n \\ X\neq 0}} \frac{||AX||}{||X||}$$

pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Théorème 6.7 *Pour toute matrice* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$*, la série :*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

converge dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$*. On note :*

$$\exp A := e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

sa limite. C'est la matrice exponentielle de A*.*

Démonstration : Il suffit de démontrer que les séries de coefficients convergent. Or pour tous i, j, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{A^k_{i,j}}{k!}\right| &\le \sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{|||A^k|||}{k!}\right| \\ &\le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|||A|||^k}{k!} \\ &= e^{|||A|||} < \infty \ .\end{aligned}$$

Donc pour tous i, j, la série $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k_{i,j}}{k!}$ converge dans $\mathbb{C}$. <u>*q.e.d.*</u>

Théorème 6.8 (propriétés de l'exponentielle) *On a :*

$$\exp 0 = I_n \text{ et } \exp(A+B) = \exp A \exp B$$

pour toutes matrices A et B qui commutent. En particulier, pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice $\exp A$ est inversible d'inverse $\exp(-A)$. On a aussi :

$$\exp(kA) = (\exp A)^k$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque : Attention ! si A, B ne commutent pas, en général $\exp(A+B) \neq \exp A \exp B$.

Démonstration : Montrons que $\exp(A+B) = \exp A \exp B$:

$$\begin{aligned}\forall m \ge 0 \ : \left(\sum_{i=0}^{m}\frac{A^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{m}\frac{B^j}{j!}\right) - \sum_{k=0}^{m}\frac{(A+B)^k}{k!} &= \sum_{0\le i,j\le m}\frac{A^i}{i!}\frac{B^j}{j!} - \sum_{k=0}^{m}\sum_{\substack{i,j\ge 0\\ i+j=k}}\frac{A^i}{i!}\frac{B^j}{j!} \\ &= \sum_{0\le i,j\le m}\frac{A^i}{i!}\frac{B^j}{j!} - \sum_{\substack{0\le i,j\le m\\ i+j\le m}}\frac{A^i}{i!}\frac{B^j}{j!} \\ &= \sum_{\substack{0\le i,j\le m\\ i+j>m}}\frac{A^i}{i!}\frac{B^j}{j!}\end{aligned}$$

donc :

$$\forall m \ge 0, \ |||\left(\sum_{i=0}^{m}\frac{A^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{m}\frac{B^j}{j!}\right) - \sum_{k=0}^{m}\frac{(A+B)^k}{k!}|||$$

$$\leq |||\sum_{\substack{0\leq i,j\leq m\\ i+j>m}} \frac{A^i}{i!}\frac{B^j}{j!}|||$$

$$\leq \sum_{\substack{0\leq i,j\leq m\\ i+j>m}} |||\frac{A^i}{i!}\frac{B^j}{j!}|||$$

$$\leq \sum_{\substack{0\leq i,j\leq m\\ i+j>m}} \frac{|||A|||^i}{i!}\frac{|||B|||^j}{j!}$$

$$\leq \left(\sum_{i=0}^m \frac{|||A|||^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^m \frac{|||B|||^j}{j!}\right) - \sum_{k=0}^m \frac{(|||A|||+|||B|||)^k}{k!}$$

et si « on fait tendre m vers $+\infty$ » on trouve :

$$|||\exp A \exp B - \exp(A+B)||| \leq e^{|||A|||}e^{|||B|||} - e^{|||A|||+|||B|||} = 0$$

donc : $\exp A \exp B = \exp(A+B)$. <u>*q.e.d.*</u>

Exercices

Exercice 43 *Vérifier que :*

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

pour tout t réel.

Exercice 44 *Pour une matrice diagonale* $D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$*, on a*

$$\exp D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} .$$

Exercice 45 *Si* $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *(par exemple D diagonale), alors :*

$$\exp(PDP^{-1}) = P \exp DP^{-1} .$$

En déduire que pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$*,*

$$\text{dét} \exp A = e^{\mathrm{tr} A} .$$

Exercice 46 *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Soit*

$$m_A(X) = (X-\lambda_1)^{k_1}...(X-\lambda_r)^{k_r}$$

le polynôme minimal de A, les λ_i étant les valeurs propres deux à deux distinctes de A. Notons $\pi_1, ...\pi_r$ les projecteurs spectraux associés aux λ_i.

Alors :

$$\exp(tA) = \sum_{i=1}^{r} e^{t\lambda_i} \left(\sum_{j=0}^{k_i-1} t^j \frac{(A-\lambda_i I_n)^j}{j!} \right) \pi_i \ .$$

En particulier, $\exp A$ *est un polynôme en A.*

Remarque : Si A est diagonalisable, alors, pour tout $t \in \mathbb{C}$, $\exp(tA) = e^{t\lambda_1}\pi_1 + ... + e^{t\lambda_r}\pi_r$.

Exercice 47 *Si*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

alors

$$\exp(tA) = e^{2t}(I_3 + t(A-2I_3))\pi_2 + e^t\pi_1$$

$$= e^{2t} \begin{pmatrix} 3t-3 & -6t+6 & -9t+6 \\ 3t-2 & -6t+4 & -9t+3 \\ -t & 2t & 3t+1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Exercice 48 *L'application* $\exp : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *est surjective. Montrer que* $\mathrm{diag}(-1,-2)$ *n'est pas l'exponentielle d'une matrice réelle. Indication : si N est nilpotente, alors* $\exp(\sum_{k\geq 1} \frac{N^k}{k}) = I - N$.

7 Matrices à coefficients polynomiaux

Lemme 7.1 *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X])$. La matrice A est inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X])$ si et seulement si* $\det A$ *est une constante non nulle. Autrement dit :*

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}[X]) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X]) \ : \ \mathrm{dét}\, A \in \mathbb{K}^*\} \ .$$

Démonstration : Si $AB = I_n$ pour une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X])$, alors :

$$\text{dét}\, A \text{dét}\, B = 1$$

donc $\text{dét}\, A$ est un polynôme inversible. Donc $\text{dét}\, A \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Réciproquement, si $\text{dét}\, A \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{dét}\, A} \widetilde{{}^t}(A) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X]) \ .$$

<u>*q.e.d.*</u>

Définition 17 *On notera pour toute matrice non nulle $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X])$*

$$d_1(A) := \text{ le pgcd unitaire des coefficients de } A$$

c'est le polynôme unitaire de degré maximal qui divise tous les coefficients de A.

Proposition 7.2 *Si $P, Q \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X])$ sont des matrices inversibles (c-à-d dont le déterminant est une constante non nulle), alors $d_1(PAQ) = d_1(A)$.*

Démonstration : Notons $c_{i,j}$ les coefficients de PAQ. Alors :

$$\forall i, j\ ,\ c_{i,j} = \sum_{k,l=1}^{n} P_{i,k} A_{k,l} Q_{l,j}$$

donc $d_1(A)$ divise $c_{i,j}$ pour tous i, j. Donc $d_1(A)$ divise $d_1(PAQ)$. De même $d_1(PAQ)$ divise $d_1(A) = d_1(P^{-1}(PAQ)Q^{-1})$. Ainsi, $d_1(A) = d_1(PAQ)$. <u>*q.e.d.*</u>

7.1 Matrices élémentaires

Ce sont les matrices de l'une des formes suivantes :

$T_{i,j}(\lambda)$ « la matrice I_n à laquelle on a ajouté un polynôme $\lambda \in \mathbb{K}[X]$ en position i, j »

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & \lambda(X) & & \\ & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

— Σ_i « la matrice obtenue à partir de I_n en permutant les colonnes i et $i+1$ » :

$$\Sigma_i := \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \overset{i-1 \text{ fois}}{\ddots} & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \overset{i-1 \text{ fois}}{\ddots} \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

— $D_i(\alpha)$ « la matrice obtenue à partir de I_n en remplaçant le $i$ème coefficient diagonal par $\alpha \in \mathbb{K}^*$:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : Ces matrices sont toutes inversibles dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X])$.

7.2 Facteurs invariants

Théorème 7.3 *Soit $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K}[X])$. Il existe un unique $r \geq 0$ et une unique suite de polynômes unitairs $d_1|...|d_r$ de degrés ≥ 0 tels que :*

$$PAQ = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & d_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

pour certaines matrices $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K}[X])$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}[X])$.

Remarque : on peut remplacer $\mathbb{K}[X]$ par un anneau principal.

Lemme 7.4 *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X])$ une matrice non nulle. Alors, A est équivalente à une matrice de la forme :*

$$\begin{pmatrix} d_1(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{A'} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

pour une certaine matrice $A' \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K}[X])$.

Démonstration : On utilise la multiplication à gauche et à droite par des matrices élémentaires. Dans le tableau suivant, on rappelle l'effet de la multiplication d'une matrice A par les matrices élémentaires :

Matrices élémentaires E	effet de la multiplication à gauche EA	effet de la multiplication à droite AE
$T_{i,j}(\lambda)$	« ajoute $\lambda\times$ la ligne i à la ligne j »	« ajoute $\lambda\times$ la colonne i à la colonne j »
$D_i(\alpha)$	« multiplie la ligne i par α »	« multiplie la colonne i par α »
Σ_i	« échange les lignes i et $i+1$ »	« échange les colonnes i et $i+1$ »

Soit d le degré minimal d'un coefficient non nul $b_{i,j}$ d'une matrice B équivalente à A. Quitte à permuter des lignes ou des colonnes de B, on peut supposer que $b_{1,1}$ est de degré d. Soit $2 \leq j \leq n$, la division euclidienne de $b_{1,j}$ par $b_{1,1}$ donne :

$$b_{1,j} = qb_{1,1} + r_{1,j}$$

où $\deg r_{1,j} < \deg b_{1,1}$. Donc en retranchant $q\times$ la colonne 1 à la colonne j de B on obtient une matrice équivalente à B donc à A dont la première ligne est de la forme :

$$b_{1,1} ... r_{1,j} ...$$

Si $r_{1,j} \neq 0$, on a contredit la minimalité de d. Donc $r_{1,j} = 0$ et $b_{1,1}$ divise $b_{1,j}$. En raisonnant comme cela avec tous les colonnes $2 \leq j \leq n$ et de même avec toutes les lignes $2 \leq i \leq n$, on s'aperçoit que l'on peut supposer que les coefficients $b_{1,j}$ et $b_{i,1}$ sont nuls si $2 \leq i, j \leq n$. Soit $b_{i,j}$ un coefficient de B avec $i, j \geq 2$. En ajoutant la ligne i à la ligne 1, on trouve une matrice équivalente à A dont la première ligne comprend les termes :

$$b_{1,1} ... b_{i,j} ...$$

On a alors vu que $b_{1,1}$ divise $b_{i,j}$.

On a donc montré que A est équivalente à une matrice B de la forme :

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où $b_{1,1}$ divise tous les coefficients de la matrice A' et où l'on peut supposer que $b_{1,1}$ est unitaire (quitte à multiplier la ligne 1 par un coefficient constant non nul) . Mais alors $d_1(B) = b_{1,1}$. Et comme A est équivalente à B, $d_1(A) = b_{1,1}$.

<u>*q.e.d.*</u>

EXEMPLE :

$$\begin{pmatrix} X & -1 \\ 0 & X \end{pmatrix} \underset{C_1 \leftrightarrow C_2}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & X \\ X & 0 \end{pmatrix} \underset{-C_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & X \\ -X & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + XL_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & X^2 \end{pmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 - XC_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X^2 \end{pmatrix} .$$

Démonstration : Unicité : *cf.* exos. Existence : Récurrence + le lemme ci-dessus.

<u>*q.e.d.*</u>

Exercices

Exercice 49 *Quels sont les invariants de similitude d'une matrice compagnon ? Il n'y en a qu'un !*

Montrer que $XI_n - C_P \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 & \\ & & & P \end{pmatrix}$

Démonstration :

$$XI_n - C_P := \begin{pmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X + a_1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + XL_2 + \ldots + X^{n-1}L_n}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & P(X) \\ -1 & X & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X + a_1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftrightarrow L_n}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & X & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & X & a_2 \\ \vdots & & & \ddots & -1 & X + a_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & P(X) \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 & \\ & & & P(X) \end{pmatrix}$$

<u>*q.e.d.*</u>

Exercice 50 (Formule de Cauchy-Binet) *Soit $\mathbb{K}$ un anneau. Si $I = i_1 < .. < i_p \subseteq \{1, ..., m\}$ et $J = \{j_1, ..., j_p\} \subseteq \{1, ..., n\}$, on note pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\Delta_{I,J}A$ le déterminant de la matrice $p \times p$: $(A_{i_k,j_l})_{1 \leq k,l \leq p}$. Soient $B \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, soient I, J des parties de même cardinal de (respectivement) $\{1, ..., m\}$ et $\{1, ..., q\}$; montrer que $\Delta_{I,J}BC = \sum_K \Delta_{I,K}B\Delta_{K,J}C$ où K décrit les parties de cardinal $|I| = |J|$ de $\{1, ..., n\}$.*

En déduire que le pgcd des mineurs de taille i de PAQ est le même que pour A. Dans le théorème, montrer que $(d_1, ..., d_r, 0, ..., 0) = (\Delta_1, ..., \Delta_{\min\{m,n\}})$ où δ_k est le pgcd des mineurs de taille k de A.

Exercice 51 *Le nombre r est le rang de la matrice vue dans $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K}(X))$.*

7.3 Équivalence et similitude

Théorème 7.5 *Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K}$ est un corps. Les matrices A et B sont semblables sur $\mathbb{K}$ si et seulemnt si les matrices $XI_n - A$et $XI_n - B$ sont équivalentes dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X])$.*

Démonstration : Soit $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X])$ alors $P = \sum_{k\geq 0} X^k P_k$ pour certaines matrices $P_k \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Or $XI_n = XI_n - B + B \Rightarrow {}^\forall k$, $X^k I_n = \sum_{j\geq 1}^{k} (XI_n - B)^j B^{k-j} + B^k$. Donc $P = (XI_n - B)R_1 + R_0$ pour une matrice $R_1 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X])$ et une matrice $R_0 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Soient $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}[X])$ telles que $P(XI_n - A)Q = XI_n - B$. Soient $P_1, Q_1 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X])$, $P_0, Q_0 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $P = (XI_n - B)P_1 + P_0$ et $Q = Q_1(XI_n - B) + Q_0$.

On a :

$$XI_n - B = P(XI_n - A)Q$$

$= (XI_n - B)P_1P^{-1}(XI_n - B) + P_0(XI_n - A)Q_1(XI_n - B) + P_0(XI_n - A)Q_0$

$(XI_n - B)P_1P^{-1}(XI_n - B) + (P - (XI_n - B)P_1)(XI_n - A)Q_1(XI_n - B) + P_0(XI_n - A)Q_0$

$= (XI_n - B)P_1P^{-1}(XI_n - B) + (XI_n - B)Q^{-1}Q_1(XI_n - B) - (XI_n - B)P_1(XI_n - A)Q_1(XI_n - B)$

donc

$$XI_n - B - P_0(XI_n - A)Q_0 = (XI_n - B)\left(P_1P^{-1} + Q^{-1}Q_1 - P_1(XI_n - A)Q_1\right)(XI_n - B).$$

Le terme de gauche a tous ses coefficients de degrés ≤ 1 donc le terme de droite est nul (sinon il aurait un coefficient non nul de degré ≥ 2.

Conclusion : $XI_n - B = P_0(XI_n - A)Q_0$. Forcément : $P_0Q_0 = I_n$ et $B = P_0AQ_0$. *q.e.d.*

Exercices

Exercice 52 *Dans le théorème de réduction en blocs compagnons, montrer que P_r est le polynôme minimal et que $P_1 ... P_r$ est le polynôme caractéristique.*

Exercice 53 *En déduire le théorème de réduction en blocs de matrices compagnons.*

Exercice 54 *Déduire du théorème de réduction en blocs compagnons le théorème de Cayley Hamilton.*

Exercice 55 *Déterminer les invariants de similitude de $J_{\lambda,n}$, C_P, λI_n et $\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ où les λ_i sont deux à deux distincts.*

7.4 Réduction de Jordan

Nous allons montrer que toute matrice dont le polynôme caractéristique est scindé est semblable à une matrice diagonale par blocs avec des blocs « presque » diagonaux.

7.4.1 Blocs de Jordan

Définition 18 *Un bloc de Jordan est une matrice de la forme :*

$$J_{\lambda,n} := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

où $\lambda \in \mathbb{K}, n \geq 0$.

On a :

$$(J_{\lambda,n} - \lambda I_n)^k = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & k & & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & 1 \\ \vdots & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \text{ si } 0 \leq k \leq n-1$$

$$\text{et } (J_{\lambda,n} - \lambda I_n)^k = 0 \text{ si } n < k.$$

On a aussi $J_{\lambda,n} - \mu I_n$ inversible si $\mu \neq \lambda$.

Exercice 56 *Le polynôme caractéristique et le polynôme minimal d'un bloc de Jordan sont égaux à $(X - \lambda)^n$.*

Définition 19 *Une matrice de Jordan est une matrice diagonale par blocs de la forme :*

$$\left(\begin{array}{c|c|c} J_1 & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & J_r \end{array}\right)$$

où les J_i sont des blocs de Jordan.

Exercice 57 *Une matrice de Jordan est diagonalisable si et seulement si ses blocs sont tous de taille* 1.

Théorème 7.6 *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de polynôme caractéristique scindée. Alors, a est semblable à une matrice de Jordan. De plus, si $\lambda \in \mathbb{K}$, le nombre de blocs de la forme $J_{\lambda,n}$, $n \geq 1$, ne dépend que de A, ainsi que le nombre de blocs de la forme $J_{\lambda,n}$ où λ et n sont fixés.*

Démonstration : Existence : il suffit de le faire pour les matrices compagnons.. Et d'utiliser les exercices qui suivent.

Unicité : *cf.* exos ... *q.e.d.*

Exercices

Exercice 58 *Si P, Q sont des polynômes unitaires de degrés > 0 premiers entre eux, alors les matrices C_{PQ} et* $\left(\begin{array}{c|c} C_P & 0 \\ \hline 0 & C_Q \end{array}\right)$ *sont semblables.*

Exercice 59 *Les matrices $C_{(X-\lambda)^n} - \lambda I_n$ et $J_{\lambda,n}$ sont semblables.*

Exercice 60 *Pour une matrice de Jordan, on note $N_{\lambda,m}$ le nombre de blocs $J_{\lambda,m}$ qui apparaissent, $\lambda \in \mathbb{K}, m \geq 1$. Montrer que :*

$$N_{\lambda,m} = \mathrm{rg}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{m+1} - 2\mathrm{rg}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^m + \mathrm{rg}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{m-1}$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $m \geq 1$.

Indication : vérifier que

$$\mathrm{rg}\,(J_{\lambda,n} - \mu I_n)^k = \begin{cases} n & \text{si } \mu \neq \lambda \\ n-k & \text{si } \mu = \lambda \text{ et } 0 \leq k \leq n-1 \\ 0 & \text{si } \mu = \lambda \text{ et } n \leq k \end{cases}$$

Exercice 61 *Si $N \in \mathscr{M}_4(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors N est semblable à une et une seule des 5 matrices suivantes :*

$$0, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il y a une infinité de matrices nilpotentes 4×4 *mais il n'y en a que* 5 *à similitude près.*

Si $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ *a pour polynôme caractéristique :* $\chi_A(X) = (X-1)(X-2)^2$ *alors* A *est semblable*

$$\text{à} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ou à } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 62 *Soient* A *et* B *deux matrices nilpotentes de taille* n. *Les matrices* A *et* B *sont semblables* $\Leftrightarrow \forall 1 \leq \nu \leq n/2$, $\operatorname{rg}(A^\nu) = \operatorname{rg}(B^\nu)$.