Épreuve écrite de mathématiques générales

(2010)

Préambule et notations

On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbf{Q}$ le corps des nombres rationnels, $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels et $\mathbf{C}$ le corps des nombres complexes.

Soit K un sous-corps de $\mathbf{C}$. Pour p entier $\geqslant 1$, on note $M_p(\mathrm{K})$ l'algèbre des matrices carrées à p lignes à coefficients dans K.

Pour $A \in M_p(\mathrm{K})$ et n entier $\geqslant 1$, on note S_A l'ensemble des matrices $X \in M_p(\mathrm{K})$ telles que $X^n = A$.

- On note 0_p la matrice nulle et I_p la matrice unité de $M_p(\mathrm{K})$. Le groupe des matrices inversibles de $M_p(\mathrm{K})$ est noté $\mathrm{GL}_p(\mathrm{K})$.
- On note $C(A)$ le sous-groupe de $GL_p(\mathrm{K})$ formé des matrices P qui commutent avec A, c'est-à-dire telles que $AP = PA$.
- On note $\mathrm{K}[x]$ l'algèbre des polynômes à coefficients dans K à une indéterminée x. Un élément non nul de $K[x]$ est dit unitaire si son coefficient dominant est égal à 1.
- Le polynôme minimal de toute matrice A de $M_p(\mathrm{K})$ est noté m_A. C'est un polynôme unitaire de $K[x]$.
- On note K^p l'espace vectoriel des matrices-colonnes à p lignes à coefficients dans K. L'image $\mathrm{Im} A$, le noyau $\mathrm{Ker}\, A$, les sous-espaces stables de A, le déterminant $\det A$, sont ceux de l'endomorphisme $v \mapsto Av$ de K^p canoniquement associé à A.
- La matrice A de $M_p(\mathrm{K})$ est semblable sur K à une matrice A' de $M_p(\mathrm{K})$, s'il existe $P \in \mathrm{GL}_p(\mathrm{K})$ telle que $A = PA'P^{-1}$. Cette relation d'équivalence est la similitude.
- Pour k entier $\geqslant 1$, on note $N_k \in M_k(\mathrm{K})$ la matrice triangulaire inférieure

$$N_k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

  c'est-à-dire dont les coefficients sont

$$N_k(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j+1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $a \in \mathrm{K}$, on pose $J_k(a) = aI_k + N_k$. Pour k, ℓ entiers strictement positifs, on note $0_{k,\ell}$ la matrice nulle à k lignes et ℓ colonnes. On appelle matrice de Jordan une matrice J de la forme :

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(a_1) & 0_{k_1,k_2} & \cdots & 0_{k_1,k_r} \\ 0_{k_2,k_1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_{k_{r-1},k_r} \\ 0_{k_r,k_1} & \cdots & 0_{k_r,k_{r-1}} & J_{k_r}(a_r) \end{pmatrix}$$

où $a_i \in \mathrm{K}$ et k_i est entier $\geqslant 1$ pour tout indice i de 1 à r.

- Lorsque le polynôme caractéristique de A est scindé sur K, le théorème de Jordan établit l'existence et l'unicité, à permutation près de l'ensemble des indices i de 1 à r, d'une matrice J de Jordan semblable sur K à A. Une telle matrice J est dite réduction de Jordan de A.
- On note $\binom{n}{p}$ le coefficient binomial $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Partie I.
Dans cette partie, on fixe une matrice $A \in M_p(K)$.

1. Soit X un élément de S_A.

   a) Démontrer que X et A commutent.

   b) Montrer que le polynôme minimal m_X de X divise $m_A(x^n)$.

   c) On suppose que $n, p \geq 2$. Montrer que S_{O_p} est infini.

   d) On suppose n, p premiers entre eux. Soit $\lambda \in K$. Montrer que $S_{\lambda I_p}$ est vide si et seulement si le polynôme $x^n - \lambda^p$ n'a pas de racine dans K.

2. a) Soit A' semblable sur K à A. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_p(K)$ telle que :
$$S_{A'} = \{PXP^{-1} \ : \ X \in S_A\} \ .$$

   b) Soient $P \in \mathrm{GL}_p(K)$ et $X \in S_A$. Démontrer que $PXP^{-1} \in S_A$ si et seulement si P et A commutent.

3. a) Soit $M \in M_p(K[x])$ une matrice $p \times p$ à coefficients dans l'anneau $K[x]$. On note $\mathrm{GL}_p(K[x])$ le groupe des matrices de $M_p(K[x])$ inversibles pour la multiplication des matrices dans $M_p(K[x])$.
   Montrer que $M \in \mathrm{GL}_p(K[x])$ si et seulement si son déterminant est dans $K \setminus \{0\}$.
   Si $M_1, M_2 \in M_p(K[x])$, on note $M_1 \sim M_2$ s'il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_p(K[x])$ telles que $M_1 = PM_2Q$.

   b) Soit $r(x) = x^p + r_1 x^{p-1} + ... + r_p \in K[x]$. On pose $C_r := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -r_p \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots\ 0 & 1 & -r_1 \end{pmatrix} \in$ $M_p(K)$. C'est la *matrice compagnon* associée au polynôme r. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de C_r.

   c) Montrer que $XI_p - C_r \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 & \\ & & & r(x) \end{pmatrix}$.

   d) On admettra que si $M \in M_p(K)$ alors $XI_p - M \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & P_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & P_r \end{pmatrix}$ pour une **unique** famille de polynômes unitaires $P_1, ..., P_r \in K[x]$ de degrés > 0 tels que $P_1|...|P_r$ dans $K[x]$. On dit que les polynômes P_i sont les invariants de similitude de la matrice M.

Montrer que le polynôme caractéristique de M est $\chi_M(x) = P_1...P_r$ et que le nombre de 1 sur la diagonale ci-dessus est égal à $(\deg P_1 - 1) + ... + (\deg P_r - 1)$.

e) On admet que si $M_1, M_2 \in M_p(K)$, alors $XI_p - M_1 \sim XI_p - M_2$ dans $M_p(K[x])$ si et seulement si M_1 est semblable à M_2 dans $M_p(K)$. On note $P_1, ..., P_r \in K[x]$ les invariants de similitude de A. Montrer que A est semblable à la matrice diagonale par blocs :

$$\left(\begin{array}{c|c|c} C_{P_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & C_{P_r} \end{array}\right)$$

où les C_{P_i} sont les matrices compagnons associées aux polynômes P_i.

f) En déduire que $P_r = m_A$.

g) Soit $A' \in M_p(K)$ une matrice semblable à A sur $\mathbb{C}$. Montrer que A et A' sont semblables sur K.

4. a) Soit $m \in K[x]$ un polynôme unitaire de degré $\leq p$. Montrer que l'ensemble des matrices de $M_p(K)$ de polynôme minimal m est la réunion d'un nombre fini de classes de similitude sur K de matrices de $M_p(K)$.

b) En déduire que S_A est la réunion d'un nombre fini d'orbites pour l'action de $C(A)$ sur $M_p(K)$ par automorphismes intérieurs.

5. a) On suppose que $C(Y) = C(A)$ pour toute solution Y dans S_A. Montrer que S_A est fini.

b) On suppose que $C(Y) \neq C(A)$ pour un certain $Y \in S_A$. Montrer que S_A est infini.

6. a) Montrer qu'il existe $q \in K[x]$ tel que $q(N_p)^n = I_p + N_p$.

b) si $K = \mathbb{C}$, montrer que si A est inversible, alors $S_A \neq \emptyset$.

Partie II.

1. Montrer qu'il existe une norme N sur le $\mathbb{C}-$espace vectoriel $M_p(\mathbb{C})$ vérifiant $N(BC) \leq N(B)N(C)$ pour toutes matrices $B, C \in M_p(\mathbb{C})$.

Dans toute cette partie, N est une telle norme et A est une matrice de $\mathrm{GL}_p(K)$; une matrice X est dans S_A si et seulement si $X^{-n} - B = 0_p$ où $B = A^{-1}$. Ceci conduit à introduire la suite :

$$X_{k+1} := (1 + 1/n)X_k - (1/n)BX_k^{n+1}$$

de premier terme X_0 commutant avec A.

2. On suppose dans cette question que la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice Y de $\mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$.

a) Démontrer que pour tous $k, k' \in \mathbb{N}$, les matrices $X_k, X_{k'}, Y$ et A commutent deux à deux.

b) Démontrer que $Y^n = A$.

c) On pose $U_k = X_kY^{-1} - I_p$. Démontrer que la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence :

$$nU_{k+1} + \sum_{2\leq j\leq n+1} \binom{n+1}{j} U_k^j = 0_p \ .$$

3. Soit $\mathbb{R}$ le corps des réels.

   a) Démontrer qu'il existe un unique nombre réel $r > 0$ tel que :

$$nr = \sum_{2 \leq j \leq n+1} \binom{n+1}{j} r^j \ .$$

   b) Démontrer que la suite récurrente définie par $x_0 \in \mathbb{R}$, $0 \leq x_0 < r$ et :

$$x_{k+1} = (1/n) \sum_{2 \leq j \leq n+1} \binom{n+1}{j} x_k^j$$

   converge en précisant sa limite.

4. Soit $Y \in M_p(\mathbb{C})$ une solution de $Y^n = A$. On suppose que X_0 est une matrice de $M_p(K)$ qui commute à Y. Déterminer $\alpha > 0$ tel que $N(X_0 - Y) < \alpha$ entraîne que la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers Y.

Partie III.

Dans cette partie A est une matrice de $M_p(K)$, telle qu'il existe un vecteur v de K^p tel que $(A^j v)_{0 \leq j < p}$ est une base de K^p.

1. a) Soit X un élément de S_A. Montrer qu'il existe $h \in K[x]$, de degré $< p$ tel que $X = h(A)$.

   b) En déduire que S_A est en bijection avec l'ensemble des éléments $z \in K[x]/(m_A)$ tels que $z^n = \overline{x}$, où $\overline{x}$ est la classe de x modulo m_A.

   c) Montrer que, si m_A est irréductible dans $K[x]$, S_A admet au plus $n$éléments. En déduire que, si m_A est un produit de s polynômes irréductibles distincts, S_A admet au plus n^séléments.

   d) Montrer que, si $p, n \geq 2$, et si $m_A = x^p$, alors S_A est vide.

   e) Soient f et g deux éléments de $K[x]$ premiers entre eux, et r un entier ≥ 1. On suppose qu'il existe $y_1 \in K[x]$ tel que $y_1^n = g \bmod f^r$. Montrer qu'il existe un élément $y_2 \in K[x]$, unique modulo f^{r+1}, tel que :

$$\begin{cases} y_2 & = & y_1 \bmod f^r \\ y_2^n & = & g \bmod f^{r+1} \end{cases}$$

   (on pourra poser $y_2 := y_1 + f^r q$, et développer y_2^n).

   f) Soit s le nombre de facteurs irréductibles distincts de m_A. Montrer que S_A a au plus n^s éléments.

2. Montrer que, si $K = \mathbb{R}$, et si m_A n'a pas de racine réelle, S_A est non vide.

3. Soient r, s des rationnels tels que $\cos(r\pi) = s$.

   a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $a_n = 2\cos(2^n r\pi)$. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n. Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres rationnels, périodique à partir d'un certain rang.

   b) Démontrer que si b_n est le dénominateur > 0 de la forme irréductible de a_n, alors b_n^2 est celui de a_{n+1}.

   c) En déduire que $|s| \in \{0, 1/2, 1\}$.

4. Soient n un entier > 1 et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

a) Déterminer S_A lorsque $K = \mathbb{R}$.

b) Déterminer S_A lorsque $K = \mathbb{Q}$.

c) Déterminer S_A lorsque $K = \mathbb{C}$.

Partie IV.

On note $d_1 := \dim \ker A$, et pour tout $i \geq 2$, $d_i := \dim \ker A^i - \dim \ker A^{i-1}$.

1. On suppose dans cette question qu'il existe $k \geq 1$ tel que le polynôme minimal de A est x^k.

   a) Démontrer que pour tout X dans S_A, il existe un entier r tel que $m_X = x^r$ et
   $$(k-1)n < r \leq kn \ .$$

   b) En déduire que, si $(k-1)n \geq p$, alors S_A est vide.

   c) Soit X une matrice de $M_p(K)$ telle qu'il existe v dans $\ker X^p$ pour lequel $(X^j v)_{0 \leq j < p}$ est une base $\mathscr{B}$ de K^p.

   a) Calculer la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à X^n dans la base $\mathscr{B}$.

   b) En déduire une réduction de Jordan de X^n.

   c) Soit $A = \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix}$. Quel est l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles S_A est non vide ?

2. On suppose dans cette question que
   $$\begin{pmatrix} N_{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & N_{k_r} \end{pmatrix}$$
   est une réduction de Jordan de A.

   a) Montrer que $d_i = |\{j \leq r \ : \ k_j \geq i\}|$.

   b) On suppose S_A non vide. Montrer que pour tout entier $s \geq 0$, il existe au plus un indice i tel que $d_i \in]ns, n(s+1)[$.

   c) Soit $J = \begin{pmatrix} N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 \end{pmatrix}$. Pour quels n a-t-on $S_J = \emptyset$?

   d) Établir la réciproque de la question b) (*on pourra raisonner par récurrence*).

3. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où B et C sont des matrices carrées à coefficients dans K telles que $B^p = 0$ et $\text{dét}\, C \neq 0$, puis qu'il existe une application bijective $\varphi : S_B \times S_C \to S_A$.

4. On suppose ici que $K = \mathbb{C}$. Montrer que S_A est non vide si et seulement si, pour tout entier $s \geq 0$, il existe au plus un indice i tel que $d_i \in]ns, n(s+1)[$.