TD — *jeudi 3 novembre*

Exercice 1 (unicité dans la réduction dite de *Frobenius***)** *a) Soit P un polynôme unitaire. Justifier que P est le polynôme minimal de la matrice compagnon C_P. En déduire le polynôme minimal d'une matrice diagonale par blocs de la forme :*

$$\left(\begin{array}{c|c|c} C_{P_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & C_{P_r} \end{array}\right)$$

où les C_{P_i} sont les matrices compagnons associées à des polynômes unitaires P_i.

b) Soient $P_1|....|P_r$ des polynômes unitaires. On suppose que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à la matrice :

$$\left(\begin{array}{c|c|c} C_{P_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & C_{P_r} \end{array}\right)$$

montrer que P_r est le polynôme minimal de A, que $\chi_A = P_1...P_r$ et que $\sum_i \deg P_i = n$.

c) On suppose que $P_1|....|P_r$ et $Q_1|....|Q_s$ sont des polynômes unitaires à coefficients dans $\mathbb{K}$. On suppose que les matrices :

$$\left(\begin{array}{c|c|c} C_{P_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & C_{P_r} \end{array}\right) \text{ et } \left(\begin{array}{c|c|c} C_{Q_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & C_{Q_s} \end{array}\right)$$

sont semblables. Montrer que $r = s$ et $P_i = Q_i$ pour tout i. Indication : $P_r = Q_s$ et considérer $P_{r-1}(A)$ pour montrer que $Q_{s-1}|P_{r-1}$

Exercice 2 *En utilisant les invariants de similitudes, montrer que deux matrices réelles semblables sur $\mathbb{C}$ le sont aussi sur $\mathbb{R}$. Et sans utiliser les invariants de similitude ?*

Exercice 3 *a) Soit $(d_\alpha)_\alpha$ une famille d'endomorphismes diagonalisables d'un espace vectoriel E de dimension finie qui commutent deux à deux. Montrer qu'il existe une base de diagonalistion commune. Indication : récurrence sur la dimension de E !*

b) *En déduire que si K est un corps où $2 \neq 0$, les groupes $\mathrm{GL}_n(K)$ et $\mathrm{GL}_m(K)$ sont isomorphes si et seulement si $m = n$ indication : chercher le cardinal maximal d'un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(K)$ où tous les éléments $\neq 1_n$ sont d'ordre 2.*

c) *Montrer que $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ n'est pas isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.*

d) *Soit K un corps de caractéristique 2. Combien y a-t-il de matrices dans $\mathrm{GL}_n(K)$ d'ordre une puissance de 2 à conjugaison près ? Montrer que les groupes $\mathrm{GL}_n(K)$ et $\mathrm{GL}_m(K)$ sont isomorphes si et seulement si $m = n$.*

e) *Soit $n \geq 2$. Soit K un corps fini. Soit L un corps. Montrer que si $\mathrm{SL}_n(K) \simeq \mathrm{SL}_n(L)$, alors $K \simeq L$.*

f) *Soient K, L deux corps de caractéristique $\neq 2$. Donner trois éléments d'ordre qui divise 2 dans $\mathrm{SL}_3(K)$.*

g) *Soit $\Psi : \mathrm{SL}_3(K) \to \mathrm{SL}_2(L)$ un morphisme. Montrer qu'il existe A, B distincts dans $\mathrm{SL}_3(K)$ tels que $\Psi(A) = \Psi(B)$ et $A^2 = B^2 = I_3$. En déduire que Ψ est trivial (on admettra que $\mathrm{PSL}_3(K)$ est simple).*

Exercice 4 (Cauchy-Binet et début du sujet de 2014) *Soient $A \in M_{m,n}(K)$ et $B \in M_{n,p}(K)$. On pose $C = AB$.*

a) *Soit H, J des parties à k éléments de $[1, m]$ et $[1, p]$. On note $X_1, ..., X_n$ les colonnes de $A_H := (A_{i,j})_{i \in H, 1 \leq j \leq n}$ et $Y_1, ..., Y_k$ les colonnes de $C_{H,J} := (C_{i,j})_{i \in H, j \in J}$. Exprimer $Y_1, ..., Y_k$ en fonction de $X_1, ...X_n$ et des coefficients de B.*

b) *Soit $f : E^k \to K$ une forme $k-$linéaire alternée où $E := M_{k,1}(K)$. Montrer que $f(Y_1, ..., Y_k) = \sum_\phi b_{\phi(1),j_1} ... b_{\phi(k),j_k} f(X_{\phi(1)}, ..., X_{\phi(k)})$ où ϕ décrit les injections $[1, k] \to [1, n]$ et $J = \{j_1 < ... < j_k\}$.*

c) *Montrer que $f(Y_1, ..., Y_k) = \sum_I \sum_\sigma b_{i_{\sigma(1)},j_1} ... b_{i_{\sigma(k)},j_k} f(X_{i_{\sigma(1)}}, ..., X_{i_{\sigma(k)}})$ où $I = \{i_1 < ... < i_k\}$ décrit les parties à k éléments de $[1, n]$ et σ décrit S_k.*

d) *En déduire :*

$$\Delta_{H,J}(C) = \sum_I \Delta_{H,I}(A) \Delta_{I,J}(B) \ .$$

Exercice 5 (d'après agrég 2008) *a)* *Déterminer tous les polynômes cyclotomiques de degré 1 ou 2.*

b) *Soit $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ d'ordre $m \geq 1$. Montrer que $\chi_M(X)$ est daans la liste :*

$$(X \pm 1)^2, X^2 - 1, X^2 + X + 1, X^2 + 1, X^2 - X + 1 \ .$$

c) *Montrer que $m = 1, 2, 3, 4$ ou 6 et donner un exemple pour chaque cas.*

d) *Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ d'ordre $m \geq 2$. Soit $p \geq 3$ premier. On suppose que $M = I_n + p^r N$ avec $r \geq 1$ et $N \in M_n(\mathbb{Z}) \setminus pM_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $mp^r N \in p^{2r} M_n(\mathbb{Z})$ et que $p|m$. Montrer en considérant M^p que $p^2|m$. Obtenir une contradiction.*

e) *Soit $p \geq 3$ premier. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$. En déduire qu'il existe un nombre fini de sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ à isomorphisme près.*

f) *Montrer qu'il existe un nombre fini de sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ à isomorphisme près (indication : si $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ est fini, justifier l'existence d'un réseau de $\mathbb{C}^n$ stable par G.)*

g) *Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ fini. Montrer que l'ordre de G divise 48. En considérant $\Phi_8(X)$ comme un polynôme à coefficients dans $\mathbb{F}_3$, montrer que l'ordre de G n'est pas 48.*

Exercice 6 (sur la réduction de Jordan) *a)* *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. La matrice A est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme :*

$$\left(\begin{array}{c|c|c} J_1 & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & J_r \end{array}\right)$$

où les J_i sont des blocs de Jordan :

$$J_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n_i}(\mathbb{K})$$

pour certais entiers $n_i \geq 1$.

Montrer que le nombre de blocs de taille m est donné par la formule :

$$\mathrm{rg}\,(u^{m+1}) - 2\mathrm{rg}\,(u^m) + \mathrm{rg}\,(u^{m-1}) \ .$$

b) *Montrer que $\mathrm{rg}\, A = n - r$.*

c) *Montrer que deux matrices nilpotentes A et B sont semblables si et seulement si $\mathrm{rg}\, A^\nu = \mathrm{rg}\, B^\nu$ pour tous $\nu \leq n/2$. Indication : A est semblable à une matrice de Jordan de la forme $\left(\begin{array}{c|c} A' & 0 \\ \hline 0 & A" \end{array}\right)$ et B à une matrice de*

Jordan de la forme $\left(\begin{array}{c|c} B' & 0 \\ \hline 0 & B" \end{array}\right)$ *où* $A"$ *et* $B"$ *sont constitués de blocs de tailles* $< \left[\frac{n}{2}\right]$ *et* A', B' *de blocs de tailles* $\geq \left[\frac{n}{2}\right]$*. Alors on peut supposer que* $A" = B"$ *et on voit que* A' *et* B' *ont* 1 *ou* 2 *blocs ou* 3 *si* $n = 3$*...*

Exercice 7 ***Théorème 0.1 (Frobenius)*** *Soit* u *un endomorphisme de* E*. Notons* $P_1, ..., P_r$ *ses facteurs invariants. On note :*

$$\mathscr{C}(u) := \{v \in \mathscr{L}(E) \ : \ uv = vu\}$$

l'espace des endomorphismes qui commutent à u*. Alors :*

$$\dim \mathscr{C}(u) = (2r-1)d_1 + (2r-3)d_2 + ... + d_r$$

où $d_i := \deg P_i$ *pour tout* i*.*

Démonstration :

1. *Montrer qu'il existe une décomposition* $E = E_1 \oplus ... \oplus E_r$ *où les* E_i *sont stables par* u *et les endomorphismes* $u|_{E_i}$ *cycliques de polynôme minimal* P_i*.*
2. *On note* $u_i := u|_{E_i}$*. Si* $f \in \mathcal{L}(E)$*, pour tout* $x \in E$ *on pose* $f_j(x)$ *la composante du vecteur* $f(x)$ *dans* E_j *:*

   $$f(x) = f_1(x) + ... + f_r(x)$$

   avec $f_j(x) \in E_j$ *pour tout* j*. Alors* $f_j : E \to E_j$*,* $x \mapsto f_j(x)$ *est linéaire. Pour tous* $1 \leq i, j \leq r$*, on pose :*

   $$f_{i,j} := f_j|_{E_i} : E_i \to E_j \ .$$

   Montrer que l'application :

   $$\mathscr{L}(E) \to \oplus_{1 \leq i,j \leq r} \mathscr{L}(E_i, E_j)$$

   est un isomorphisme.
   Pour tous $1 \leq i, j \leq r$*, on pose*

   $$\mathscr{C}_{i,j} := \{F \in \mathscr{L}(E_i, E_j) \ : \ u_j F = F u_i\} \ .$$

   Montrer que $\mathscr{C}(u) \simeq \oplus_{1 \leq i,j \leq r} \mathscr{C}_{i,j}$ *et :*

   $$\dim \mathscr{C}(u) = \sum_{1 \leq i,j \leq r} \dim \mathscr{C}_{i,j} \ .$$

3. *Calculons* $\dim \mathscr{C}_{i,j}$ *: soit* $x \in E_i$ *tel que :*

$$E_i = \langle x, ..., u_i^{d_i-1}(x) \rangle = \langle x, ..., u^{d_i-1}(x) \rangle$$

   (en particulier, $x, ..., u^{d_i-1}(x)$ *est une base de* E_i*).*
   Soit $\Phi : \mathscr{C}_{i,j} \to E_j$*,* $F \mapsto F(x)$*.*
   Vérifier que Φ *est injective.*
4. *Montrer :* $\operatorname{Im} \Phi = \ker P_i(u_j) \subseteq E_j$*.*
   On a donc $\dim \mathscr{C}_{i,j} = \dim \ker P_i(u_j)$*.*
5. *Montrer que :*

$$\dim \ker P_i(u_j) = \begin{cases} d_i \text{ si } i \leq j \\ d_j \text{ si } i \geq j \end{cases} .$$

6. *Conclure.*

q.e.d.

Remarques :

— si $u = \lambda \mathrm{Id}_E$*, alors* $r = n$ *et les facteurs invariants de* u *sont* $P_1 = ... = P_r = (X - \lambda)$ *et on retrouve que :*

$$\dim \mathscr{C}(u) = \sum_{1 \leq i \leq r} (2n - 2i - 1)$$

$$= 2n - 1 + 2n - 3 + ... + 1$$

$$= n^2 = \dim \mathscr{L}(E) .$$

D'où $\mathscr{C}(u) = \mathscr{L}(E)$*.*

— si u *est cyclique, alors :* $r = 1$ *et* $P_1 = \chi_u(X)$ *donc :*

$$\dim \mathscr{C}(u) = n .$$

On en déduit dans ce cas que :

$$\mathscr{C}(u) = \mathbb{K}[u]$$

$$= \{P(u) \ : \ P \in \mathbb{K}[X]\}$$

$$= \langle \mathrm{Id}_E, u, ..., u^{n-1} \rangle .$$