TD — *jeudi 10 novembre*

Exercice 1 *a) Soient P_1, P_2 deux matrices réelles. On suppose que $P_1 + iP_2$ est inversible. Montrer que $P_1 + \lambda P_2$ est inversible pour une infinité de $\lambda \in \mathbb{R}$.*

b) En déduire que si M_1, M_2 deux matrices réelles semblables sur $\mathbb{C}$, alors elles sont semblables sur $\mathbb{R}$ (sans utiliser les invariants de similitude).

Exercice 2 *a) (sujet de 2013) Montrer qu'il existe une norme $|\ \ |$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour toutes matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $|AB| \leq |A||B|$.*

b) En déduire que $\sum_n \frac{A^n}{n!}$ converge dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ pour toute matrice A. On note $\exp A$ la somme.

c) Montrer que si A, B commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp B$.

d) Calculer $\exp \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$.

e) Montrer la surjectivité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $A \mapsto \exp A$. Et sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3 *a) (D'après le sujet de 2010) Soit A une matrice nilpotente. On pose $d_i := \dim\ker A^i - \dim\ker A^{i-1}$. On suppose que A est semblable à une matrice diagonale par blocs de Jordan :* $\left(\begin{array}{c|c|c} J_{k_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & J_{k_r} \end{array}\right)$*. Montrer que $d_i = |\{j \leq r\ :\ k_j \geq i\}|$.*

b) En déduire une formule pour le nombre de blocs de taille i.

Exercice 4 *a) (D'après le sujet de 2013) Soit $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On pose*

$$C := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots\ 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}).$$

Montrer que si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, alors il existe $(b_0, ..., b_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $Me_1 = \sum_{k=0}^{n-1} b_k C^k e_1$.

b) En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent à C est la sous-algèbre $\mathbb{C}[C]$.

c) *Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $E = \oplus_{i=1}^r E_i$ pour certains sous-espaces de E stables par u. Si $f \in \mathscr{L}(E)$, on note $f_{i,j} : E_i \to E_j$, $x \mapsto f_j(x)$ la composante de $f(x)$ dans E_j. Montrer que l'application :*

$$\mathscr{L}(E) \to \oplus_{1\leq i,j\leq r}\mathscr{L}(E_i, E_j)$$
$$f \mapsto \oplus_{i,j} f_{i,j}$$

est un isomorphisme.

d) *On note $C(u)$ le sous-espace des endomorphismes de E qui commutent à u. On pose $C_{i,j} := \{F \in \mathscr{L}(E_i, E_j) \ : \ Fu = uF\}$. Montrer que* $\dim C(u) = \sum_{i,j} \dim C_{i,j}$.

e) *Soit P_i le polynôme minimal de $u|_{E_i}$. On suppose que E_i est de dimension d et que $E_i = \langle x, ..., u^{d-1}(x)\rangle$ pour un certain $x \in E_i$. Montrer que $F \mapsto F(x)$, $C_{i,j} \to E_j$ est injective d'image* $\ker P_i(u\big|_{E_j})$.

f) *Notons $P_1|...|P_r$ les invariants de similitude de u. Montrer que :*

$$\dim \mathscr{C}(u) = (2r-1)d_1 + (2r-3)d_2 + ... + d_r$$

où $d_i := \deg P_i$ pour tout i.

Exercice 5 a) *Soit $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ d'ordre fini $n > 1$. On suppose que $M = I_2 \bmod 3$. Montrer que $3|n$.*

b) *Soit $G \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ un sous-groupe fini. Montrer que $G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/3)$ est injective. Indication : montrer que sinon, il existe un élément d'ordre 3 dans le noyau ...*

c) *Soit $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ d'ordre fini n. Montrer que $n = 1, 2, 3, 4$ ou 6.*

d) *Montrer que M est conjuguée dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ à une des matrices suivantes :*

$$\pm I_2, \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

e) *Montrer que dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/3)$ il n'y a qu'un élément d'ordre 2, pas de sous-groupe d'ordre 12, un seul sous-groupe d'ordre 8 (isomorphe au groupe des quaternions) et que les autres sous-groupes propres sont cycliques d'ordre $1, 2, 4$ ou 6.*

f) *En déduire que $G \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est cyclique. (Indication : sinon il y aurait un élément d'ordre 4 dans le noyau de $G \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/2)$).*

g) *Montrer que si $g \in G$ n'est pas de déterminant 1, alors g est d'ordre 2.*

h) *En déduire que G est isomorphe à un sous-groupe de D_4 ou D_6 les groupes diédraux d'ordre 8 et 12. Généraliser à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ à la place de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ indication : justifier l'existence d'un réseau de $\mathbb{Q}^2$ qui est $G-$stable.*