

**Feuille 5**  
**Nombres complexes**

Exercice 5-1 Soit  $f: \mathbb{C} \setminus \{0, -3\} \rightarrow \mathbb{C}$  l'application définie par

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{z(z + 3)}$$

Calculer  $f(1 - i)$  et  $f(1 + i)$

Correction exercice 5-1

$$\begin{aligned} f(1 - i) &= \frac{(1 - i)^2 - 1}{(1 - i)(1 - i + 3)} = \frac{1 - 2i - 1 - 1}{(1 - i)(4 - i)} = \frac{-1 - 2i}{4 - i - 4i - 1} = \frac{-1 - 2i}{3 - 5i} = \frac{(-1 - 2i)(3 + 5i)}{9 + 25} \\ &= \frac{-3 - 5i - 6i + 10}{34} = \frac{7 - 11i}{34} = \frac{7}{34} - \frac{11}{34}i \\ f(1 + i) &= \overline{f(1 - i)} = \frac{7}{34} + \frac{11}{34}i \end{aligned}$$

Exercice 5-2 Calculer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe

$$z = \frac{1 + im}{2m + i(m^2 - 1)}, \quad m \in \mathbb{R}$$

Correction exercice 5-2

$$\begin{aligned} z &= \frac{1 + im}{2m + i(m^2 - 1)} = \frac{(1 + im)(2m - i(m^2 - 1))}{4m^2 + (m^2 - 1)^2} = \frac{2m - i(m^2 - 1) + 2im^2 + m(m^2 - 1)}{4m^2 + m^4 - 2m^2 + 1} \\ &= \frac{2m - im^2 + i + 2im^2 + m^3 - m}{m^4 + 2m^2 + 1} = \frac{m(m^2 + 1) + i(m^2 + 1)}{(m^2 + 1)^2} = \frac{m + i}{m^2 + 1} \\ &= \frac{m}{m^2 + 1} + i \frac{1}{m^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \operatorname{Re}(z) = \frac{m}{m^2 + 1} \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{m^2 + 1}$$

Exercice 5-3 Calculer le module et un argument de

$$z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}$$

Correction exercice 5-3

$$\frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i} = \frac{(1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{3} - i + 3i + \sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Donc  $|z| = 1$  et un argument de  $z$  est  $\frac{\pi}{6}$ .

Exercice 5-4

Calculer le module et un argument de

$$u = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad v = 1 - i$$

En déduire le module et un argument de  $\frac{u}{v}$ .

Correction exercice 5-4

$$\begin{aligned} |u| &= \frac{|\sqrt{6} - i\sqrt{2}|}{2} = \frac{\sqrt{6 + 2}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{\sqrt{4 \times 2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \\ u &= \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2 \times 3} - i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3} - i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{3} - i}{2} \right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

Donc  $|u| = \sqrt{2}$  et un argument de  $u$  est  $-\frac{\pi}{6}$ .

$$|v| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$v = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Donc  $|v| = \sqrt{2}$  et un argument de  $v$  est  $-\frac{\pi}{4}$ .

$$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Donc  $\left| \frac{u}{v} \right| = 1$  et un argument de  $\frac{u}{v}$  est  $\frac{\pi}{12}$ .

Exercice 5-5 Déterminer l'ensemble des nombres complexes  $z$  tels que :

1.  $|1 - z| \leq \frac{1}{2}$
2.  $\operatorname{Re}(1 - z) \leq \frac{1}{2}$
3.  $\operatorname{Re}(iz) \leq \frac{1}{2}$
4.  $\left| 1 - \frac{1}{z} \right|^2 = 2$
5.  $\left| \frac{z-3}{z+3} \right| = 2$
6.  $\left| \frac{z-3}{z+3} \right| < 2$

Correction exercice 5-5

1. L'ensemble des points d'affixe  $z \in \mathbb{C}$ , tels que  $|1 - z| \leq \frac{1}{2}$  est le cercle de centre  $\Omega$  d'affixe 1 et de rayon  $\frac{1}{2}$ .
2. On pose  $z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  réels

$$1 - z = 1 - x - iy$$

$$\operatorname{Re}(1 - z) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

L'ensemble des solutions est le demi-plan complexe à droite de la droite verticale  $x = \frac{1}{2}$ .

3. On pose  $z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  réels

$$iz = i(x + iy) = -y + ix$$

$$\operatorname{Re}(iz) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -y \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow y \geq -\frac{1}{2}$$

L'ensemble des solutions est le demi-plan complexe au-dessus de la droite horizontale  $y = -\frac{1}{2}$ .

4. On pose  $z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  réels

$$\left| 1 - \frac{1}{z} \right|^2 = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{z-1}{z} \right|^2 = 2 \Leftrightarrow |z-1|^2 = 2|z|^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 2x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow 1 = x^2 + 2x + y^2 \Leftrightarrow 1 = (x+1)^2 - 1 + y^2$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 2$$

L'ensemble des solutions est le cercle de centre  $(-1,0)$  et de rayon  $\sqrt{2}$ .

5.
 
$$\left| \frac{z-3}{z+3} \right| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{z-3}{z+3} \right|^2 = 4 \Leftrightarrow |z-3|^2 = 4|z+3|^2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 4((x+3)^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 = 4(x^2 + 6x + 9 + y^2) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 = 4x^2 + 24x + 36 + 4y^2$$

$$\Leftrightarrow 0 = 3x^2 + 30x + 27 + 3y^2 \Leftrightarrow 0 = x^2 + 10x + 9 + y^2$$

$$\Leftrightarrow 0 = (x+5)^2 - 25 + 9 + y^2 \Leftrightarrow 16 = (x+5)^2 + y^2$$

L'ensemble des solutions est le cercle de centre  $(-5,0)$  et de rayon 4.

- 6.

$$\begin{aligned} \left| \frac{z-3}{z+3} \right| < 2 &\Leftrightarrow \left| \frac{z-3}{z+3} \right|^2 < 4 \Leftrightarrow |z-3|^2 < 4|z+3|^2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 < 4((x+3)^2 + y^2) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 < 4(x^2 + 6x + 9 + y^2) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 \\ &< 4x^2 + 24x + 36 + 4y^2 \Leftrightarrow 0 < 3x^2 + 30x + 27 + 3y^2 \Leftrightarrow 0 < x^2 + 10x + 9 + y^2 \\ &\Leftrightarrow 0 < (x+5)^2 - 25 + 9 + y^2 \Leftrightarrow 16 < (x+5)^2 + y^2 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est l'extérieur du disque de centre  $(-5,0)$  et de rayon 4.

Exercice 5-6 Soit  $z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

1. Résoudre en coordonnées cartésiennes l'équation dans  $\mathbb{C}$  :

$$z^2 = 2 + 2i$$

2. Ecrire  $2 + 2i$  sous forme polaire. Résoudre alors l'équation en coordonnées polaires.

3. Dédire des deux questions qui précèdent la valeur de  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ .

Correction exercice 5-6

1.

$$\begin{aligned} z^2 &= \left( \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}} \right)^2 = 2 + \sqrt{3} - (2 - \sqrt{3}) + 2i\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}} \\ &= 2\sqrt{3} + 2i\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2\sqrt{3} + 2i\sqrt{2^2 - 3} = 2\sqrt{3} + 2i \end{aligned}$$

$$|z^2| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{4 \times 3 + 4} = \sqrt{16} = 4$$

Si on pose  $\theta = \arg(z^2)$ ,  $\cos(\theta) = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\sin(\theta) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$  donc  $\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Autre méthode :

$$z^2 = 2\sqrt{3} + 2i = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}, \text{ donc } \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

2.

On déduit de la première question que  $|z^2| = 4$  donc  $|z|^2 = 4$  et que  $|z| = 2$ . Et que les arguments possible de  $z$  sont  $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ,  $k \in \{0,1\}$ , donc  $z = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$  ou  $z = -2e^{i\frac{\pi}{12}}$ . Mais  $z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$  entraîne que le cosinus et le sinus de ses arguments sont positifs, donc  $z = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$ .

3. D'après la question précédente

$$\begin{aligned} 2e^{i\frac{\pi}{12}} &= \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}} \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 5-7

1. Déterminer la forme trigonométrique de  $(1+i)^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . (Utiliser la formule de Moivre).

2. En déduire une expression simple de  $(1+i)^n + (1-i)^n$ .

Correction exercice 5-7

1.  $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ , on en déduit que

$$(1+i)^n = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = (\sqrt{2})^n \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n$$

D'après la formule de Moivre  $\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$ , par conséquent

$$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}} e^{i\frac{n\pi}{4}}$$

2.  $(1-i)^n = \overline{(1+i)^n} = \overline{(1+i)^n} = 2^{\frac{n}{2}} e^{-i\frac{n\pi}{4}}$ , donc

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}} e^{\frac{ni\pi}{4}} + 2^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{ni\pi}{4}} = 2^{\frac{n}{2}} \left( e^{\frac{ni\pi}{4}} + e^{-\frac{ni\pi}{4}} \right) = 2^{\frac{n}{2}} \times 2 \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 2^{\frac{n+2}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Exercice 5-8

1. Calculer les racines carrées des nombres complexes

a)  $z_1 = 7 + 24i$

b)  $z_2 = 9 + 40i$

c)  $z_3 = 1 + i$

2. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

a)  $z^2 = -2\sqrt{3} + 2i$     b)  $z^2 = 3 - 4i$

Correction exercice 5-8

1.

a. Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que :

$$(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = 7 + 24i$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires

$$\begin{cases} L_1 & a^2 - b^2 = 7 \\ L_2 & 2ab = 24 \end{cases}$$

En prenant le module de  $(a + ib)^2 = 7 + 24i$ , on trouve

$$\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = \sqrt{7^2 + 24^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25 \quad L_3$$

En calculant  $L_1 + L_3$ , on obtient  $2a^2 = 32$ , par conséquent  $a^2 = 16$  et  $a = \pm 4$

En calculant  $L_3 - L_1$ , on obtient  $2b^2 = 18$ , par conséquent  $b^2 = 9$  et  $b = \pm 3$

La ligne  $L_2$  montre que  $a$  et  $b$  sont de même signe, les racines de  $7 + 24i$  sont

$$4 + 3i \quad \text{et} \quad -4 - 3i = -(4 + 3i)$$

b. Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que :

$$(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = 9 + 40i$$

En identifiant les parties réels et imaginaires

$$\begin{cases} L_1 & a^2 - b^2 = 9 \\ L_2 & 2ab = 40 \end{cases}$$

En prenant le module de  $(a + ib)^2 = 9 + 40i$ , on trouve

$$\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = \sqrt{9^2 + 40^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{81 + 1600} = \sqrt{1681} = 41 \quad L_3$$

En calculant  $L_1 + L_3$ , on obtient  $2a^2 = 50$ , par conséquent  $a^2 = 25$  et  $a = \pm 5$

En calculant  $L_3 - L_1$ , on obtient  $2b^2 = 32$ , par conséquent  $b^2 = 16$  et  $b = \pm 4$

La ligne  $L_2$  montre que  $a$  et  $b$  sont de même signe, les racines de  $9 + 40i$  sont

$$5 + 4i \quad \text{et} \quad -5 - 4i = -(5 + 4i)$$

c. Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que :

$$(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = 1 + i$$

En identifiant les parties réels et imaginaires

$$\begin{cases} L_1 & a^2 - b^2 = 1 \\ L_2 & 2ab = 1 \end{cases}$$

En prenant le module de  $(a + ib)^2 = 1 + i$ , on trouve

$$\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = \sqrt{1^2 + 1^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{2} \quad L_3$$

En calculant  $L_1 + L_3$ , on obtient  $2a^2 = 1 + \sqrt{2}$ , par conséquent  $a^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$  et  $a = \pm \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$

En calculant  $L_3 - L_1$ , on obtient  $2b^2 = \sqrt{2} - 1$ , par conséquent  $b^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$  et  $b = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$

La ligne  $L_2$  montre que  $a$  et  $b$  sont de même signe, les racines de  $1 + i$  sont

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \quad \text{et} \quad -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} = -\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$$

2.

a. On utilise la même méthode que précédemment mais dans cet exemple il y a mieux

$$z^2 = -2\sqrt{3} + 2i = 4 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 4 e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

$$\text{Donc } z = \pm 2e^{\frac{i\pi}{3}}$$

b. Utilisons une « petite ruse »

$$z^2 = 3 - 4i = 4 - 2 \times 2i - 1 = 2^2 - 2 \times 2i + i^2 = (2 - i)^2$$

$$\text{Donc } z = \pm(2 - i)$$

Exercice 5-9 Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

1.  $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$
2.  $2z^2 + (5 + i)z + 2 + 2i = 0$
3.  $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$
4.  $z^3 + 3z - 2i = 0$
5.  $(1 + 2i)z^2 - (9 + 3i)z - 5i + 10 = 0$

Correction 5-9

1.

$$\Delta = (1 - 5i)^2 - 4i(6i - 2) = 1 - 10i - 25 + 24 + 8i = -2i = 1 - 2i - 1 = (1 - i)^2$$

Les racines de l'équation sont

$$z_1 = \frac{-(1 - 5i) - (1 - i)}{2i} = \frac{-2 + 6i}{2i} = -\frac{1}{i} + 3 = i + 3 = 3 + i$$

$$\text{Car } \frac{1}{i} = -i$$

Et

$$z_2 = \frac{-(1 - 5i) + (1 - i)}{2i} = \frac{4i}{2i} = 2$$

2.

$$\begin{aligned} \Delta &= (5 + i)^2 - 4 \times 2(2 + 2i) = 25 + 10i - 1 - 16 - 16i = 8 - 6i = 9 - 2 \times 3i - 1 \\ &= 3^2 - 2 \times 3i + i^2 = (3 - i)^2 \end{aligned}$$

Les racines de l'équation sont

$$z_1 = \frac{-(5 + i) - (3 - i)}{4} = -\frac{8}{4} = -2$$

Et

$$z_2 = \frac{-(5 + i) + (3 - i)}{4} = \frac{-2 - 2i}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

3. On pose  $Z = z^2$ ,  $Z^2 + 10Z + 169 = 0$  a pour discriminant

$$\Delta = 10^2 - 4 \times 169 = 10^2 - (2 \times 13)^2 = (10 - 26)(10 + 26) = -16 \times 36 = -4^2 \times 6^2 = (24i)^2$$

$$Z_1 = \frac{-10 + 24i}{2} = -5 + 12i$$

$$Z_2 = \frac{-10 - 24i}{2} = -5 - 12i$$

On cherche  $z = a + ib$  tel que

$$z^2 = Z_1 \Leftrightarrow (a + ib)^2 = -5 + 12i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab = -5 + 12i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 & \left\{ \begin{array}{l} a^2 - b^2 = -5 \\ 2ab = 12 \end{array} \right. \\ L_2 & \\ L_3 & \left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \end{array} \right. \end{cases}$$

En faisant la somme de  $L_1$  et de  $L_3$ , on trouve que  $2a^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$ ,

En faisant la différence de  $L_3$  et de  $L_1$ , on trouve que  $2b^2 = 18 \Leftrightarrow b^2 = 9 \Leftrightarrow b = \pm 3$ ,

D'après  $L_2$ ,  $a$  et  $b$  sont de même signe donc  $z^2 = Z_1$  a deux solutions

$$z_1 = 2 + 3i \quad \text{et} \quad z_2 = -2 - 3i$$

On peut résoudre de la même façon  $Z_2 = z^2$  ou dire que  $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$  est une équation à coefficients réels et que donc si une racine complexe est solution alors son conjugué est aussi solution, par conséquent  $\bar{z}_1 = 2 - 3i$  et  $\bar{z}_2 = -2 + 3i$  sont aussi solution, ce qui donne 4 solutions pour une équation de degré 4, il n'y en a pas plus, on les a toutes.

4. On voit que  $i$  est une solution évidente (car  $i^3 + 3i - 2i = 0$ ) donc on peut mettre  $z - i$  en facteur.

$$z^3 + 3z - 2i = (z - i)(az^2 + bz + c) \Leftrightarrow z^3 + 3z - 2i = az^3 + (-ia + b)z^2 + (-ib + c)z - ic$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ -ia + b = 0 \\ -ib + c = 3 \\ -ic = -2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = ia = i \\ c = 3 + ib = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$z^3 + 3z - 2i = (z - i)(z^2 + iz + 2)$$

Le discriminant de  $z^2 + iz + 2$  est  $\Delta = i^2 - 4 \times 2 = -9 = (3i)^2$

Il y a deux solutions

$$z = \frac{-i - 3i}{2} = -2i \quad \text{et} \quad z = \frac{-i + 3i}{2} = i$$

Il y a donc deux solutions,  $z_1 = i$  et  $z_2 = -2i$ .

5.

$$\begin{aligned} \Delta &= (-(9 + 3i))^2 - 4(1 + 2i)(-5i + 10) = (3(3 + i))^2 - 4(-5i + 10 + 10 + 20i) \\ &= 9(9 - 1 + 6i) - 4(-25) = 9(8 + 6i) - 4(20 + 15i) = 72 + 54i - 80 - 60i \\ &= -8 - 6i \end{aligned}$$

On pose  $\delta = a + ib$ ,  $\Delta = \delta^2 \Leftrightarrow -8 - 6i = (a + ib)^2 \Leftrightarrow -8 - 6i = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ 2ab = -6 \end{cases}$$

On rajoute l'équation  $|\Delta| = |\delta^2| \Leftrightarrow |-8 - 6i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{64 + 36} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{100} = 10$

Avec le système  $\begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases}$ , en faisant la somme des deux équations, on trouve  $2a^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 1$ , d'où l'on tire  $b^2 = 9$ . Les valeurs possibles de  $a$  sont  $\pm 1$  et les valeurs possibles de  $b$  sont  $\pm 3$ , d'après l'équation  $2ab = -6 \Leftrightarrow ab = -3$ , on en déduit que  $ab < 0$  et que donc  $a$  et  $b$  sont de signe opposé.

Si  $a = 1$  alors  $b = -3$  et  $\delta = 1 - 3i$  et si  $a = -1$  alors  $b = 3$  et  $\delta = -1 + 3i$

Deuxième méthode

On reprend le système

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ 2ab = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \left(\frac{-3}{a}\right)^2 = -8 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{9}{a^2} = -8 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 9 = -8a^2 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a^4 + 8a^2 - 9 = 0 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 + 8A - 9 = 0 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases}, \text{ le discriminant de } A^2 + 8A - 9 = 0 \text{ est}$$

$$\Delta' = 8^2 + 4 \times 9 = 100 = 10^2 \text{ donc ses solutions sont } A_1 = \frac{-8-10}{2} = -9 \text{ et } A_2 = \frac{-8+10}{2} = 1, A_2 < 0$$

donc il n'y a pas de solution de  $a^2 = -9$ , par contre  $a^2 = 1$  admet deux solutions  $a = -1$  et  $a = 1$ .

Si  $a = -1$  alors  $b = \frac{-3}{a} = 3$  et si  $a = 1$  alors  $b = \frac{-3}{a} = -1$ , on retrouve les mêmes solutions.

Troisième méthode

$$\Delta = -8 - 6i = 1 - 6i - 9 = (1 - 3i)^2 \text{ donc } \delta = 1 - 3i \text{ et } \delta = -1 + 3i$$

Les solutions de  $(1 + 2i)z^2 - (9 + 3i)z - 5i + 10 = 0$  sont :

$$z_1 = \frac{(9 + 3i) - (1 - 3i)}{2(1 + 2i)} = \frac{8 + 6i}{2(1 + 2i)} = \frac{4 + 3i}{1 + 2i} = \frac{(4 + 3i)(1 - 2i)}{1^2 + 2^2} = \frac{4 - 8i + 3i + 6}{10} = 2 - i$$

$$z_2 = \frac{(9 + 3i) + (1 - 3i)}{2(1 + 2i)} = \frac{10}{2(1 + 2i)} = \frac{5}{1 + 2i} = \frac{5(1 - 2i)}{1^2 + 2^2} = 1 - 2i$$

Exercice 5-10 Pour rappel : Soient  $z \in \mathbb{C}^*$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Il existe exactement  $n$  nombres complexes  $\omega$  vérifiant  $\omega^n = z$

Ces nombres sont appelés les  $n$  racines  $n$ -ième de  $z$ .

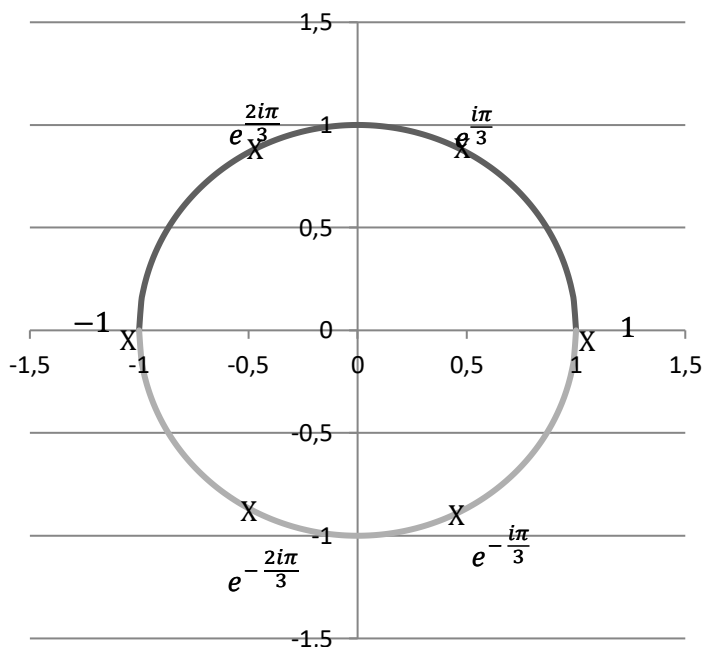
1. Représenter dans le plan complexes  $\mathbb{C}$  les 6 racines 6-ième de 1 et les 4 racines quatrième de  $-1$ .
2. Soit  $n \geq 2$  un entier. Déterminer les  $n - 1$  racines du polynôme complexe  $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$ .

Correction exercice 5-10

1.  $z^6 = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \{0,1,2,3,4,5\}, z = e^{\frac{2ik\pi}{6}} = e^{\frac{ik\pi}{3}}$

Il y a donc six racines :

$$z_0 = 1; z_1 = e^{\frac{i\pi}{3}}; z_2 = e^{\frac{2i\pi}{3}}; z_3 = e^{\frac{3i\pi}{3}} = e^{i\pi} = -1; z_4 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \overline{z_2} \text{ et } z_5 = e^{\frac{5i\pi}{3}} = \overline{z_1}$$

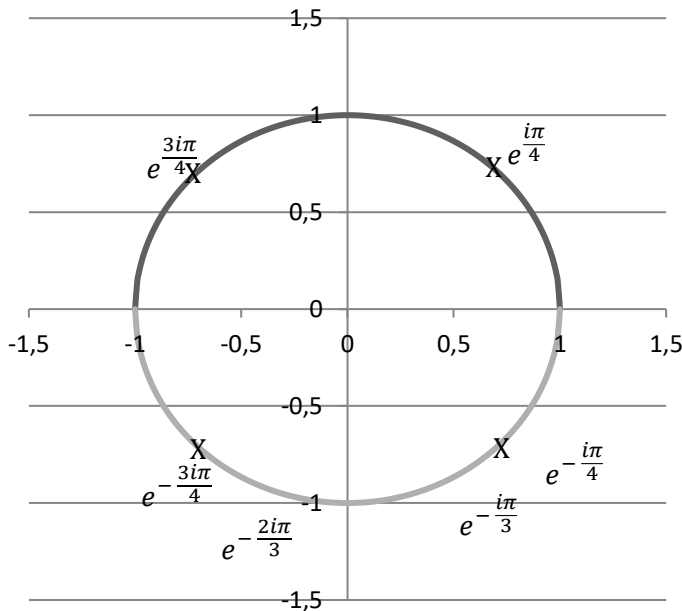


$$z^4 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} |z^4| = |-1| \\ \arg(z^4) = \arg(-1) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^4 = 1 \\ 4 \arg(z) = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}, k \in \{0,1,2,3\} \end{cases}$$

Il y a donc 4 solutions

$$z_0 = e^{\frac{i\pi}{4}}; z_1 = e^{\frac{3i\pi}{4}}; z_2 = e^{\frac{5i\pi}{4}} = e^{-\frac{3i\pi}{4}} = \overline{z_1} \text{ et } z_3 = e^{\frac{7i\pi}{4}} = e^{-\frac{i\pi}{4}} = \overline{z_0}$$



2. Pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

Les racines du polynôme complexe  $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$  sont les racines  $n$ -ièmes de l'unité privées de 1, c'est-à-dire

$$\left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \{1, 2, \dots, n\} \right\}$$

#### Exercice 5-11

- Déterminer les racines cubiques de 1
- On note  $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ . Montrer que  $1 + j + j^2 = 0$ .
- Exprimer toutes les racines cubiques de 1 en fonction de  $j$ .

#### Correction exercice 5-11

1. Les trois racines de  $z^3 = 1$  sont :

$$z_k = e^{\frac{2ik\pi}{3}}, k \in \{0, 1, 2\}$$

Soit  $z_0 = 1$ ,  $z_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $z_2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2.  $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = z_1$

Première méthode

$$1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = \frac{0}{1 - j} = 0$$

Deuxième méthode

$$z_2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = \left( e^{\frac{2i\pi}{3}} \right)^2 = z_1^2 = j^2$$

Donc  $1 + j + j^2 = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

3.  $1 = j^0$ ,  $z_1 = j$  et  $z_2 = j^2$

#### Exercice 5-12

- Donner les solutions complexes de  $z^4 = 1$ .
- Résoudre  $z^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- Résoudre  $z^8 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z^4 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

#### Correction exercice 5-12

1. Les racines quatrième de l'unité sont  $\{1, i, -1, -i\}$ .



2.  $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$  donc

$$z^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow X^4 = e^{\frac{4i\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} |X^4| = \left| e^{\frac{4i\pi}{3}} \right| \\ \arg(X^4) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X|^4 = 1 \\ 4 \arg(X) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 1 \\ \arg(X) = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \{0,1,2,3\} \end{cases} \Leftrightarrow X_k = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\right)}, k \in \{0,1,2,3\}$$

Il y a quatre solutions :

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{\frac{5i\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right)} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2}\right)} = e^{\frac{11i\pi}{6}} = e^{-\frac{i\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

Autre solution

$-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = j^2$ . Donc  $z^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = j^2 \Leftrightarrow z^4 - j^2 = 0$ . Or

$$z^4 - j^2 = (z^2 - j)(z^2 + j) = (z^2 - j^4)(z^2 - i^2j^4) = (z - j^2)(z + j^2)(z - ij^2)(z + ij^2)$$

D'où les solutions :

$$z = j^2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, z = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, z = i\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \text{ et } z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

3. On pose  $Z = z^4$ , l'équation est alors du second degré.

$$Z^2 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

Le discriminant est

$$\Delta = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 + 2i\sqrt{3} = \frac{3}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2} = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 3e^{\frac{i\pi}{3}}$$

Donc les solutions de  $\delta^2 = \Delta$  sont

$$\delta = \sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \delta = -\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}} = -\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

L'équation du second degré a alors deux solutions :

$$Z_1 = \frac{-\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Et

$$Z_2 = \frac{-\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 1$$

L'équation du huitième degré a pour solution :

$$\left\{1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, -i, \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right\}$$

Autre solution

$$Z^2 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Leftrightarrow Z^2 + jZ + j^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{Z}{j}\right)^2 + \frac{Z}{j} + 1 = 0$$

Les solutions de  $T^2 + T + 1 = 0$  sont  $T_1 = j$  et  $T_2 = j^2$

Donc  $\frac{Z_1}{j} = j \Leftrightarrow Z_1 = j^2$  et  $\frac{Z_2}{j} = j^2 \Leftrightarrow Z_2 = j^3 = 1$

Exercice 5-13 Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

1.  $z^5 - z = 0$
2.  $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$
3.  $\bar{z}^7 = \frac{1}{z^2}$
4.  $z^6 - (3+2i)z^3 + 2 + 2i = 0$

Correction 5-13

$$1. z^5 - z = 0 \Leftrightarrow z(z^4 - 1) = 0 \Leftrightarrow z(z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow z(z-1)(z+1)(z-i)(z+i) = 0 \Leftrightarrow z \in \{0, 1, -1, i, -i\}$$

2.

$$27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^6 = -27(z-1)^6 \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^6 = -27$$

On pose  $X = \frac{z+1}{z-1}$  et on va résoudre  $X^6 = -27$

$$X^6 = -27 \Leftrightarrow \begin{cases} |X^6| = |-27| \\ \arg(X^6) = \arg(-27) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X|^6 = 27 = 3^3 \\ 6 \arg(X) = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |X| = (3^3)^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \\ \arg(X) = \frac{\pi + 2k\pi}{6} = \frac{(2k+1)\pi}{6}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \end{cases}$$

Il y a donc 6 solutions

$$X_k = \sqrt{3} e^{\frac{(2k+1)\pi}{6}}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Il reste à trouver les solutions de  $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$ , soit  $z_k$  une solution

$$X_k = \frac{z_k + 1}{z_k - 1} \Leftrightarrow X_k(z_k - 1) = z_k + 1 \Leftrightarrow X_k z_k - X_k = z_k + 1 \Leftrightarrow X_k z_k - z_k = X_k + 1 \Leftrightarrow (X_k - 1)z_k = X_k + 1 \Leftrightarrow z_k = \frac{X_k + 1}{X_k - 1}$$

Avec  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ .

L'énoncé ne précise pas sous quelle forme doivent être mise les solutions, si on les veut sous forme algébrique, il faut aller plus loin

$$z_k = \frac{X_k + 1}{X_k - 1} = \frac{(X_k + 1)(\overline{X_k} - 1)}{(X_k - 1)(\overline{X_k} - 1)} = \frac{|X_k|^2 - X_k + \overline{X_k} - 1}{|X_k|^2 - X_k - \overline{X_k} + 1} = \frac{3 - (X_k - \overline{X_k}) - 1}{3 - (X_k + \overline{X_k}) + 1} = \frac{2 - 2i\text{Im}(X_k)}{4 - 2\text{Re}(X_k)}$$

$$= \frac{1 - i\text{Im}(X_k)}{2 - \text{Re}(X_k)} = \frac{1 - i\sqrt{3} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{6}\right)}{2 - \sqrt{3} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{6}\right)}$$

Puis remplacer  $k$  par 0, puis par 1, etc...

3.

$$\bar{z}^7 = \frac{1}{z^2} \Leftrightarrow \begin{cases} |\bar{z}^7| = \left|\frac{1}{z^2}\right| \\ \arg(\bar{z}^7) = \arg\left(\frac{1}{z^2}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\bar{z}|^7 = \left|\frac{1}{z}\right|^2 \\ 7 \arg(\bar{z}) = -2 \arg(z) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^7 = \frac{1}{|z|^2} \\ -7 \arg(z) = -2 \arg(z) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^9 = 1 \\ -5 \arg(z) = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = -\frac{2k\pi}{5}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \end{cases}$$

Il y a 5 solutions

$$\left\{ e^{-\frac{2ki\pi}{5}}, \quad k \in \{0,1,2,3,4\} \right\}$$

4.  $z^6 - (3 + 2i)z^3 + 2 + 2i = 0$ , on pose  $X = z^3$  et on résous

$$X^2 - (3 + 2i)X + 2 + 2i = 0$$

$$\Delta = (3 + 2i)^2 - 4(2 + 2i) = 9 + 12i - 4 - 8 - 8i = -3 + 4i = -4 + 2 \times 2i + 1 = (2i + 1)^2$$

Il y a deux solutions

$$X_1 = \frac{3 + 2i - (2i + 1)}{2} = 1 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{3 + 2i + 2i + 1}{2} = 2 + 2i$$

Il reste à résoudre  $z^3 = 1$  et  $z^3 = 2 + 2i$

$$z^3 = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \{0,1,2\}, z = e^{\frac{2ik\pi}{3}}$$

Car ce sont les racines troisièmes de l'unité, cela donne trois solutions

$$\left\{ 1, e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

$$z^3 = 2 + 2i \Leftrightarrow \begin{cases} |z^3| = |2 + 2i| \\ \arg(z^3) = \arg(2 + 2i) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$|2 + 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = (2^3)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$$

$$2 + 2i = 2^{\frac{3}{2}} \left( \frac{2}{2^{\frac{3}{2}}} + i \frac{2}{2^{\frac{3}{2}}} \right) = 2^{\frac{3}{2}} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z^3 = 2 + 2i \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = 2^{\frac{3}{2}} \\ 3 \arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \\ \arg(z) = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \{0,1,2\} \end{cases}$$

Cela donne trois solutions de plus

$$\left\{ \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{12}} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = -1 + i, \sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{12}} \right\}$$

Exercice 5-14 Sachant qu'elle admet une racine réelle, résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation suivante :

$$z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i = 0$$

Correction exercice 5-14

1. Soit  $a \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\begin{aligned} a^3 + (1 - 2i)a^2 - 3(1 + i)a - 2 + 2i = 0 &\Leftrightarrow a^3 + a^2 - 3a - 2 + i(-2a^2 - 3a + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + a^2 - 3a - 2 = 0 \\ -2a^2 - 3a + 2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation  $-2a^2 - 3a + 2 = 0$  sont  $a_1 = -2$  et  $a_2 = \frac{1}{2}$

$$(-2)^3 + (-2)^2 - 3(-2) - 2 = -8 + 4 + 6 - 2 = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 2 = \frac{1 + 2 - 12 - 16}{8} = -\frac{25}{8} \neq 0$$

Donc seul  $-2$  est solution de (E)

2. On peut diviser  $z^3 + (1 - 2i)z^2 - 3(1 + i)z - 2 + 2i$  par  $z + 2$

$z^3 + (1 - 2i)z^2 - 3(1 + i)z - 2 + 2i$	$z + 2$
$z^3 + 2z^2$	$z^2 + (-1 - 2i)z - 1 + i$
$(-1 - 2i)z^2 - 3(1 + i)z - 2 + 2i$	
$(-1 - 2i)z^2 + 2(-1 - 2i)z$	
$(-1 + i)z - 2 + 2i$	
$(-1 + i)z - 2 + 2i$	
$0$	

Par conséquent

$$z^3 + (1 - 2i)z^2 - 3(1 + i)z - 2 + 2i = (z + 2)(z^2 + (-1 - 2i)z - 1 + i) \\ = (z + 2)(z^2 - (1 + 2i)z - 1 + i)$$

Les solutions de (E) sont donc

$$z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0 \\ \Delta = (1 + 2i)^2 - 4(i - 1) = 1 + 4i - 4 - 4i + 4 = 1 \\ z_1 = \frac{1 + 2i - 1}{2} = i \\ z_2 = \frac{1 + 2i + 1}{2} = 1 + i$$

### Exercice 5-15

Montrer que

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

En déduire que

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \left| |z| - |z'| \right| \leq |z - z'|$$

### Correction exercice 5-15

$$|z + z'|^2 = (z + z')(\overline{z + z'}) = (z + z')(\bar{z} + \bar{z}') = z\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z} + z'\bar{z}' = |z|^2 + z\bar{z}' + \bar{z}z' + |z'|^2 \\ = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}') + |z'|^2 \leq |z|^2 + 2|z\bar{z}'| + |z'|^2 = |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 \\ = (|z| + |z'|)^2$$

Comme  $|z + z'| \geq 0$  et  $|z| + |z'| \geq 0$

On a  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

Dans  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$  on pose  $Z = z + z'$  et  $Z' = z'$  donc  $z = Z - Z'$ , cela donne

$$|Z| \leq |Z - Z'| + |Z'| \Leftrightarrow |Z| - |Z'| \leq |Z - Z'| \quad (1)$$

Puis on intervertit  $Z$  et  $Z'$  dans (1) on obtient  $|Z'| - |Z| \leq |Z' - Z| = |-(Z - Z')| = |Z - Z'| \quad (2)$

Comme  $||Z| - |Z'|| = |Z| - |Z'|$  si  $|Z| \geq |Z'|$  et  $||Z| - |Z'|| = -( |Z| - |Z'| ) = |Z'| - |Z|$  si  $|Z'| \geq |Z|$

(1) ou (2) donne le résultat.

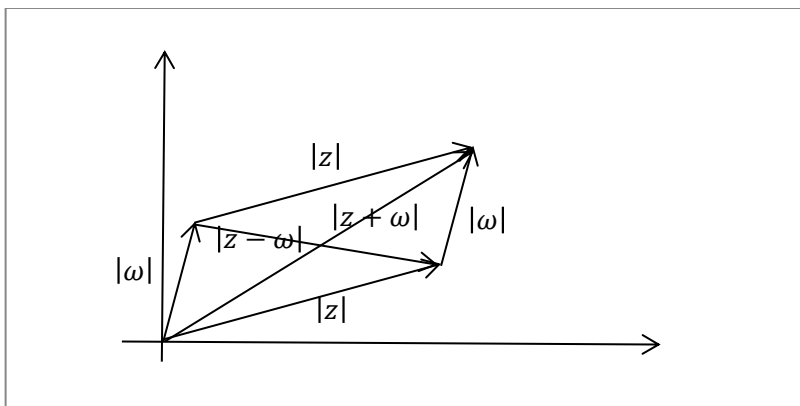
### Exercice 5-16 Soient $z, \omega \in \mathbb{C}$ . Etablir la relation

$$|z + \omega|^2 + |z - \omega|^2 = 2(|z|^2 + |\omega|^2)$$

Et en donner une interprétation géométrique.

### Correction exercice 5-16

$$|z + \omega|^2 + |z - \omega|^2 = (z + \omega)(\bar{z} + \bar{\omega}) + (z - \omega)(\bar{z} - \bar{\omega}) \\ = |z|^2 + z\bar{\omega} + \omega\bar{z} + |\omega|^2 + |z|^2 - z\bar{\omega} - \omega\bar{z} + |\omega|^2 = 2(|z|^2 + |\omega|^2)$$



C'est l'égalité du parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales

### Exercice 5-17 Soit $x \in \mathbb{R}$

1. Calculer  $\cos(3x)$  (resp.  $\sin(3x)$ ) en fonction de  $\cos(x)$  (resp. de  $\sin(x)$ ).

2. Linéariser  $\sin^4(x)$  puis  $\cos(x) \sin^4(x)$

Correction exercice 5-17

1.

$$\cos(3x) + i \sin(3x) = e^{3ix} = (e^{ix})^3$$

Avec la formule de Moivre

$$\begin{aligned} \cos(3x) + i \sin(3x) &= (e^{ix})^3 = (\cos(x) + i \sin(x))^3 \\ &= \cos^3(x) + 3 \cos^2(x) (i \sin(x)) + 3 \cos(x) (i \sin(x))^2 + (i \sin(x))^3 \\ &= \cos^3(x) + 3i \cos^2(x) \sin(x) - 3 \cos(x) \sin^2(x) - i \sin^3(x) \\ &= \cos^3(x) - 3 \cos(x) \sin^2(x) + i(3 \cos^2(x) \sin(x) - \sin^3(x)) \end{aligned}$$

En égalisant les parties réelles et imaginaires

$$\begin{cases} \cos(3x) = \cos^3(x) - 3 \cos(x) \sin^2(x) = \cos^3(x) - 3 \cos(x) (1 - \cos^2(x)) = 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x) \\ \sin(3x) = 3 \cos^2(x) \sin(x) - \sin^3(x) = 3(1 - \sin^2(x)) \sin(x) - \sin^3(x) = 3 \sin(x) - 4 \sin^3(x) \end{cases}$$

2.

$$\begin{aligned} \sin^4(x) &= \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^4 = \frac{e^{4ix} - 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} - 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}}{16} \\ &= \frac{e^{4ix} + e^{-4ix} - 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6}{16} = \frac{2 \cos(4x) - 4 \times 2 \cos(2x) + 6}{16} \\ &= \frac{1}{8} \cos(4x) - \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{3}{8} \\ \cos(x) \sin^4(x) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \times \frac{e^{4ix} + e^{-4ix} - 4e^{2ix} - 4e^{-2ix} + 6}{16} \\ &= \frac{1}{32} (e^{5ix} + e^{-3ix} - 4e^{3ix} - 4e^{-ix} + 6e^{ix} + e^{3ix} + e^{-5ix} - 4e^{ix} - 4e^{-3ix} + 6e^{-ix}) \\ &= \frac{1}{32} (e^{5ix} + e^{-5ix} - 3(e^{3ix} + e^{-3ix}) + 2(e^{ix} + e^{-ix})) \\ &= \frac{1}{32} (2 \cos(5x) - 3 \times \cos(3x) + 2 \times 2 \cos(x)) \\ &= \frac{1}{16} \cos(5x) - \frac{3}{32} \cos(3x) + \frac{1}{8} \cos(x) \end{aligned}$$

Exercice 5-18 Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ . Calculer

$$U_n = \sum_{k=0}^{k=n} \cos(k\theta), \quad V_n = \sum_{k=0}^{k=n} \sin(k\theta)$$

Correction exercice 5-18

$$U_n + iV_n = \sum_{k=0}^{k=n} \cos(k\theta) + i \sum_{k=0}^{k=n} \sin(k\theta) = \sum_{k=0}^{k=n} (\cos(k\theta) + i \sin(k\theta)) = \sum_{k=0}^{k=n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{k=n} (e^{i\theta})^k$$

Grâce à la formule de Moivre

Par conséquent si  $\theta \neq 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$

$$U_n + iV_n = \sum_{k=0}^{k=n} (e^{i\theta})^k = \frac{1 - (e^{i\theta})^{n+1}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

Toujours grâce à la formule de Moivre.

Pour trouver  $U_n$  et  $V_n$  il faut trouver la partie réelle et la partie imaginaire de cette expression.

Première et pas terrible solution, mais correcte.

$$U_n + V_n = \frac{1 - e^{ni\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{(1 - e^{ni\theta})(1 - e^{-i\theta})}{(1 - e^{i\theta})(1 - e^{-i\theta})}$$

Car le conjugué de  $1 - e^{i\theta}$  est  $1 - e^{-i\theta}$  et non pas, comme le pense de nombreux étudiants  $1 + e^{i\theta}$

$$\begin{aligned}
U_n + V_n &= \frac{(1 - e^{ni\theta})(1 - e^{-i\theta})}{(1 - e^{i\theta})(1 - e^{-i\theta})} = \frac{1 - e^{-i\theta} - e^{ni\theta} + e^{(n-1)i\theta}}{1 - e^{i\theta} - e^{-i\theta} + e^{i\theta}e^{-i\theta}} \\
&= \frac{1 - (\cos(\theta) - i \sin(\theta)) - (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) + (\cos((n-1)\theta) + i \sin((n-1)\theta))}{1 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + 1} \\
&= \frac{1 - \cos(\theta) - \cos(n\theta) + \cos((n-1)\theta) + i(\sin(\theta) - \sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta))}{1 - 2 \cos(\theta) + 1} \\
&= \frac{1 - \cos(\theta) - \cos(n\theta) + \cos((n-1)\theta)}{1 - 2 \cos(\theta) + 1} + i \frac{\sin(\theta) - \sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta)}{1 - 2 \cos(\theta) + 1}
\end{aligned}$$

Ce qui montre que

$$U_n = \frac{1 - \cos(\theta) - \cos(n\theta) + \cos((n-1)\theta)}{1 - 2 \cos(\theta) + 1} \quad \text{et} \quad V_n = \frac{\sin(\theta) - \sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta)}{1 - 2 \cos(\theta) + 1}$$

Deuxième solution, « la bonne » mais astucieuse pour des L1

$$\begin{aligned}
U_n + iV_n &= \frac{1 - e^{ni\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta} (e^{-i\frac{n+1}{2}\theta} - e^{i\frac{n+1}{2}\theta})}{e^{\frac{i\theta}{2}} (e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}})} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{\frac{i\theta}{2}}} \times \frac{-(e^{i\frac{n+1}{2}\theta} - e^{-i\frac{n+1}{2}\theta})}{-(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}})} \\
&= e^{i\frac{n+1}{2}\theta} e^{-\frac{i\theta}{2}} \times \frac{-2 \cos(\frac{n+1}{2}\theta)}{-2 \cos(\frac{\theta}{2})} = e^{i\frac{n\theta}{2}} \frac{\cos(\frac{n+1}{2}\theta)}{\cos(\frac{\theta}{2})} \\
&= \left( \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \right) \frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} + i \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Ce qui montre que

$$U_n = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad \text{et} \quad V_n = \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

C'est mieux.

Et puis si  $\theta = 2l\pi$  avec  $l \in \mathbb{Z}$

$$U_n = \sum_{k=0}^{k=n} \cos(k2l\pi) = \sum_{k=0}^{k=n} 1 = n + 1, \quad V_n = \sum_{k=0}^{k=n} \sin(k2l\pi) = \sum_{k=0}^{k=n} 0 = 0$$

Exercice 5-19 Soit  $c \in \mathbb{C}$  avec  $|c| < 1$ .

1. Montrer que  $|z + c| \leq |1 + \bar{c}z|$  si et seulement si  $|z| \leq 1$ .

Soient  $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$  le disque unité et  $C = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$  le cercle unité.

2. Montrer que l'application

$$\begin{aligned}
f: D &\rightarrow D \\
z &\mapsto \frac{z + c}{1 + \bar{c}z}
\end{aligned}$$

Est une bijection pour laquelle  $f(C) = C$ .

Correction exercice 5-19

- $|z + c| \leq |1 + \bar{c}z| \Leftrightarrow |z + c|^2 \leq |1 + \bar{c}z|^2 \Leftrightarrow (z + c)(\bar{z} + \bar{c}) \leq (1 + \bar{c}z)(1 + c\bar{z})$   
 $\Leftrightarrow |z|^2 + z\bar{c} + c\bar{z} + |c|^2 \leq 1 + c\bar{z} + \bar{c}z + |c|^2|z|^2 \Leftrightarrow |z|^2 + |c|^2 \leq 1 + |c|^2|z|^2 \Leftrightarrow 0$   
 $\leq 1 - |c|^2 + |c|^2|z|^2 - |z|^2 \Leftrightarrow 1 - |c|^2 + (|c|^2 - 1)|z|^2 \geq 0 \Leftrightarrow (1 - |c|^2)(1 - |z|^2)$   
 $\geq 0 \Leftrightarrow 1 - |z|^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq |z|^2 \Leftrightarrow 1 \geq |z|$

2. Il faut montrer que pour tout  $z' \in D$  il existe un unique  $z \in D$  tel que

$$z' = \frac{z+c}{1+\bar{c}z}$$

Mais il faut d'abord montrer que  $f(D) \subset D$ , comme  $|z| \leq 1$  d'après 1.,  $|z+c| \leq |1+\bar{c}z|$ , ce qui équivaut à

$$\frac{|z+c|}{|1+\bar{c}z|} = \left| \frac{z+c}{1+\bar{c}z} \right| = |f(z)| \leq 1$$

D'où  $z \in D \Rightarrow f(z) \in D$

$$\begin{aligned} z' = \frac{z+c}{1+\bar{c}z} &\Leftrightarrow z'(1+\bar{c}z) = z+c \Leftrightarrow z' + z'\bar{c}z = z+c \Leftrightarrow z' - c = z - z'\bar{c}z \Leftrightarrow z' - c = z(1 - z'\bar{c}) \\ &\Leftrightarrow \frac{z' - c}{1 - z'\bar{c}} = z \end{aligned}$$

Car  $|z'\bar{c}| < 1$  et donc le dénominateur n'est pas nul

On a montré que pour tout  $z' \in D$ , il existe un unique  $z$  tel que  $z' = f(z)$ , il reste à montrer que  $z \in D$ . On pose  $c' = -\bar{c}$ ,  $|c'| < 1$

$$z = \frac{z' + c'}{1 + z'\bar{c}'} \Rightarrow |z| = \left| \frac{z' + c'}{1 + z'\bar{c}'} \right| \leq 1$$

D'après le 1.

Montrons que  $f(C) = C$ .

Soit  $z \in C$ , donc  $|z| = 1$

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \frac{z+c}{1+\bar{c}z} \right| = \left| \frac{z\left(1+\frac{c}{z}\right)}{1+\bar{c}z} \right| = \left| \frac{z\left(1+\frac{c\bar{z}}{|z|^2}\right)}{1+\bar{c}z} \right| = |z| \left| \frac{1+c\bar{z}}{1+\bar{c}z} \right| = \left| \frac{1+c\bar{z}}{1+\bar{c}z} \right| = \frac{|1+c\bar{z}|}{|1+\bar{c}z|} = \frac{|1+\overline{c\bar{z}}|}{|1+\bar{c}z|} \\ &= \frac{|1+\bar{c}z|}{|1+\bar{c}z|} = 1 \end{aligned}$$

Cela montre que  $f(C) \subset C$ , il faut montrer que  $C \subset f(C)$

Soit  $z' \in C$ ,  $z'$  admet un unique antécédent  $z$ , on a  $z' = f(z)$

$$z = \frac{z' - c}{1 - z'\bar{c}} = \frac{z' + c'}{1 + z'\bar{c}'}$$

Si on pose  $c' = -\bar{c}$  et comme précédemment  $|z| = 1$ , ce qui montre que pour tout  $z' \in C$ , il existe  $z \in C$  tel que  $z' = f(z) \in f(C)$

Exercice 5-20 Donner les applications de  $\mathbb{C}$  qui représentent les transformations du plan suivantes :

1. La translation du vecteur d'affixe  $-2 + i$ .
2. La symétrie centrale du centre  $i$ .
3. La rotation d'angle  $\pi/6$  et de centre 1.

Correction exercice 5-20

1.  $z \rightarrow z - 2 + i$
2.  $f: z \rightarrow -z + b$ , puis on utilise le fait que  $f(i) = i$  pour trouver que  $b = 2i$ .
3.  $f: z \rightarrow e^{i\frac{\pi}{6}}z + b$ , puis on utilise le fait que  $f(1) = 1$  pour trouver que  $b = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \frac{i}{2}$

Exercice 5-100

Soit  $z = \frac{3}{\sqrt{3}+i}$ , calculer  $z^4$ .

Correction exercice 5-100

$$\sqrt{3} + i = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow (\sqrt{3} + i)^4 = 2^4 e^{i\frac{4\pi}{6}} = 16e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Donc

$$z^4 = \frac{3^4}{16e^{\frac{2i\pi}{3}}} = \frac{81}{16} e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \frac{81}{16} \left( -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{81}{32} (1 + i\sqrt{3})$$

Exercice 5-101

Soit (E) l'équation

$$z^4 - 3z^3 + (2 - i)z^2 + 3z - 3 + i = 0$$

1. Montrer que (E) admet des racines réelles.
2. Résoudre (E).

Correction exercice 5-101

1. Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$  une solution de (E)

$$\begin{aligned} x_0^4 - 3x_0^3 + (2 - i)x_0^2 - 3 + i = 0 &\Leftrightarrow x_0^4 - 3x_0^3 + 2x_0^2 + 3x_0 - 3 + i(-x_0^2 + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^4 - 3x_0^3 + 2x_0^2 + 3x_0 - 3 = 0 \\ -x_0^2 + 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$a_1 = -1$  est solution de  $x_0^4 - 3x_0^3 + 2x_0^2 + 3x_0 - 3 = 0$  et  $a_2 = 1$  est solution de  $x_0^4 - 3x_0^3 + 2x_0^2 + 3x_0 - 3 = 0$ , donc (E) admet deux solutions réelles, on peut mettre  $(X - 1)(X + 1) = X^2 - 1$  en facteur.

2. Il existe  $a, b, c \in \mathbb{C}$  tels que

$$X^4 - 3X^3 + (2 - i)X^2 + 3X - 3 + i = (X^2 - 1)(aX^2 + bX + c)$$

On développe

$$(X^2 - 1)(aX^2 + bX + c) = aX^4 + bX^3 + (c - a)X^2 - bX - c$$

Par conséquent

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c - a = 2 - i \\ -b = 3 \\ -c = -3 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 3 - i \end{cases}$$

$$X^4 - 3X^3 + (2 - i)X^2 + 3X - 3 + i = (X^2 - 1)(X^2 - 3X + 3 - i) = 0$$

Il reste à trouver les solutions de  $X^2 - 3X + 3 - i = 0$

$$\Delta = 9 - 4(3 - i) = -3 + 4i = 1 + 4i - 4 = (1 + 2i)^2$$

Les racines carrées du discriminant sont  $\delta = \pm(1 + 2i)$

Il y a deux solutions

$$X_1 = \frac{3 - (1 + 2i)}{2} = 1 - i$$

$$X_2 = \frac{3 + 1 + 2i}{2} = 2 + i$$

L'ensemble des solutions de (E) est

$$S = \{-1, 1, 1 - i, 2 + i\}$$

Exercice 5-102

1. Déterminer les quatre nombres complexes  $a, b, c, d$  différents de 1, qui sont solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $z^5 = 1$ .
2. Montrer, pour tout nombre complexe  $z$ , l'égalité :

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = (z - a)(z - b)(z - c)(z - d)$$

Correction exercice 5-102

1. Ce sont les racines cinquième de l'unité différentes de 1, c'est-à-dire  $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{5}}, k \in \{1, 2, 3, 4\}$ .
- 2.

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{1 - z^5}{1 - z} = \frac{z^5 - 1}{z - 1}$$

Donc les 4 racines de  $1 + z + z^2 + z^3 + z^4$  sont les  $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{5}}, k \in \{1, 2, 3, 4\}$ , d'où le résultat.

Exercice 5-103

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$ ,  $u^4 = -4$ .
2. En déduire les solutions complexes de  $(z + 1)^4 + 4(z - 1)^4 = 0$

Correction exercice 5-103

- 1.



$$u^4 = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} |u^4| = |-4| \\ \arg(u^4) = \arg(-4) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |u|^4 = 4 \\ 4 \arg(u) = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |u| = 4^{\frac{1}{4}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \\ \arg(u) = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \{0,1,2,3\} \end{cases}$$

Il y a quatre solutions

$$u_0 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i$$

$$u_1 = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}} = \sqrt{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2} \right) = -1 + i$$

$$u_2 = \sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{4}} = \sqrt{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2} \right) = -1 - i = \bar{u}_1$$

$$u_3 = \sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{4}} = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2} \right) = 1 - i = \bar{u}_0$$

2.

$$(z+1)^4 + 4(z-1)^4 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^4 = -4(z-1)^4 \Leftrightarrow \left( \frac{z+1}{z-1} \right)^4 = -4$$

On pose  $u = \frac{z+1}{z-1}$ , il y a donc 4 solutions que l'on trouve en exprimant  $z$  en fonction de  $u$ .

$$u = \frac{z+1}{z-1} \Leftrightarrow u(z-1) = z+1 \Leftrightarrow zu - u = z+1 \Leftrightarrow zu - z = u+1 \Leftrightarrow z(u-1) = u+1 \Leftrightarrow z = \frac{u+1}{u-1}$$

$$z_0 = \frac{u_0 + 1}{u_0 - 1} = \frac{1 + i + 1}{1 + i - 1} = \frac{2 + i}{i} = 1 - 2i$$

$$z_1 = \frac{u_1 + 1}{u_1 - 1} = \frac{-1 + i + 1}{-1 + i - 1} = \frac{i}{-2 + i} = \frac{i(-2 - i)}{(-2)^2 + 1^2} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

$$z_2 = \frac{u_2 + 1}{u_2 - 1} = \frac{\bar{u}_1 + 1}{\bar{u}_1 - 1} = \bar{z}_1 = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$$

$$z_3 = \frac{u_3 + 1}{u_3 - 1} = \frac{\bar{u}_0 + 1}{\bar{u}_0 - 1} = \bar{z}_0 = 1 + 2i$$

#### Exercice 5-104

Soit  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $f(z) = z(1-z)$

1. Déterminer les points fixes de  $f$  c'est-à-dire résoudre  $f(z) = z$ .

2. Montrer que si  $\left| z - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}$  alors  $\left| f(z) - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}$

Indication :  $z(1-z) = \left( z - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} - z \right) + \frac{1}{4}$

#### Correction exercice 5-104

1.

$$f(z) = z \Leftrightarrow z(1-z) = z \Leftrightarrow z(1-z) - z = 0 \Leftrightarrow z - z^2 - z = 0 \Leftrightarrow z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

2.

$$\left| f(z) - \frac{1}{2} \right| = \left| z(1-z) - \frac{1}{2} \right| = \left| \left( z - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} - z \right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right| = \left| -\left( z - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right| \leq \left| \left( z - \frac{1}{2} \right)^2 \right| + \frac{1}{4}$$

$$\leq \left| z - \frac{1}{2} \right|^2 + \frac{1}{4} \leq \left( \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

#### Exercice 5-105

1. Résoudre  $z^3 = -2 + 2i$

2. Résoudre  $z^3 = -8i$

### 3. Résoudre

$$\frac{1}{2}z^6 + (1 + 3i)z^3 + 8 + 8i = 0$$

On rappelle que  $\sqrt{676} = 26$ .

Correction exercice 5-105

$$1. X^3 = 2\sqrt{2} \left( -\frac{2}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3i\pi}{4}}$$

Donc

$$X^3 = 2\sqrt{2} \left( -\frac{2}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3i\pi}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} |X^3| = 2^{\frac{3}{2}} \\ \arg(X^3) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |X|^3 = 2^{\frac{3}{2}} \\ 3\arg(X) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 2^{\frac{1}{2}} \\ \arg(X) = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \{0,1,2\} \end{cases} \Leftrightarrow X_k$$

$$= \sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, \quad k \in k \in \{0,1,2\}$$

$$X_0 = \sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i$$

$$X_1 = \sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt{2} e^{\frac{11i\pi}{12}}$$

$$X_2 = \sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right)} = \sqrt{2} e^{\frac{19i\pi}{12}}$$

2.

$$X^3 = -8i = 2^3 e^{\frac{3i\pi}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} |X^3| = 2^3 \\ \arg(X^3) = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X|^3 = 2^3 \\ 3\arg(X) = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 2 \\ \arg(X) = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \{0,1,2\} \end{cases} \Leftrightarrow X_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, \quad k \in k \in \{0,1,2\}$$

$$X_0 = 2e^{\frac{i\pi}{2}} = 2i$$

$$X_1 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{\frac{7i\pi}{6}} = 2 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = -\sqrt{3} - i$$

$$X_2 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}\right)} = 2e^{\frac{11i\pi}{6}} = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} - i$$

3. On pose  $X = Z^3$

$$\frac{1}{2}Z^6 + (1 + 3i)Z^3 + 8 + 8i = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}X^2 + (1 + 3i)X + 8 + 8i = 0$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta = (1 + 3i)^2 - 4 \times \frac{1}{2} (8 + 8i) = 1 + 6i - 9 - 16 - 16i = -24 - 10i$$

Les racines carrés de  $-24 - 10i$  :

$$(a + ib)^2 = -24 - 10i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab = -24 - 10i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -24 \\ 2ab = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \{ a^2 - b^2 = -24 \\ L_2 \{ ab = -5 \end{cases}$$

On rajoute l'égalité des modules

$$a^2 + b^2 = \sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{576 + 100} = \sqrt{676} = 26 \quad L_3$$

En additionnant  $L_1$  et  $L_3$ , on trouve  $2a^2 = 2$  donc  $a^2 = 1$ , c'est-à-dire  $a = \pm 1$ .

En soustrayant  $L_1$  à  $L_3$ , on trouve  $2b^2 = 50$  donc  $b^2 = 25$ , c'est-à-dire  $b = \pm 5$ .

D'après  $L_2$ ,  $a$  et  $b$  sont de signes différents donc les deux racines carrés de  $-24 - 10i$  sont :  $1 - 5i$  et  $-1 + 5i$ .

L'équation du second degré a pour racine :

$$X_1 = \frac{-(1+3i) - (1-5i)}{2 \times \frac{1}{2}} = -2 - 2i$$

Et

$$X_2 = \frac{-(1+3i) + (1-5i)}{2 \times \frac{1}{2}} = -2i$$

Les six racines de

$$\frac{1}{2}Z^6 + (1+3i)Z^3 + 8 + 8i = 0$$

Sont les six complexes trouvés en 1°) et 2°).

Exercice 5-106 Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Calculer  $\cos^2(x) \sin^3(x)$  en fonction de  $\sin(x)$ .
2. Linéariser  $\cos^4(x)$ .

Correction exercice 5-106

1.  $\cos^2(x) \sin^3(x) = (1 - \sin^2(x)) \sin^3(x) = \sin^3(x) - \sin^5(x)$
- 2.

$$\begin{aligned} \cos^4(x) &= \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 = \frac{e^{4ix} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}}{16} \\ &= \frac{e^{4ix} + e^{-4ix} + 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6}{16} = \frac{2\cos(4x) + 4 \times 2\cos(2x) + 6}{16} \\ &= \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Exercice 5-107

1. Identifier les transformations dans le plan complexe les transformations suivantes :
  - a.  $f_1: z \rightarrow z + 3 - 2i$
  - b.  $f_2: z \rightarrow e^{i\frac{2\pi}{7}}z$
  - c.  $f_3: z \rightarrow e^{i\frac{2\pi}{3}}z - 1$
  - d.  $f_4: z \rightarrow 3z - 5 + i$
2. Donner les applications qui représentent dans le plan complexe les transformations suivantes :
  - a. La translation de vecteur d'affixe  $-2 + i$
  - b. La symétrie de centre  $i$ .
  - c. La rotation d'angle  $\frac{\pi}{6}$  et de centre 1.
  - d. L'homothétie de rapport 3 et de centre  $1 + 2i$ .

Correction exercice 5-107

1. a. C'est la translation de vecteur  $3 - 2i$ .
- b. C'est la rotation d'angle  $\frac{2\pi}{7}$  et de centre  $O$ .
- c. Il faut d'abord trouver le point fixe

$$\begin{aligned} e^{i\frac{2\pi}{3}}z - 1 = z &\Leftrightarrow z \left( e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1 \right) = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1} = \frac{1}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1} = \frac{1}{-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} \\ &= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

Donc il s'agit de la rotation d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  de centre  $\frac{-1}{1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}}$ .

- d. Il faut d'abord trouver le centre

$$3z - 5 + i = z \Leftrightarrow z = \frac{5}{2} - \frac{i}{2}$$

Il s'agit donc de l'homothétie de rapport 3 et de centre  $\frac{-5+i}{1-3} = \frac{5}{2} - \frac{i}{2}$ .

2. a.  $z \rightarrow z - 2 + 2i$
- b.  $f(z) - i = -(z - i)$  soit encore  $f(z) = -z + 2i$
- c.  $f(z) - 1 = e^{i\frac{\pi}{6}}(z - 1)$ , soit encore  $f(z) = e^{i\frac{\pi}{6}}z + 1 - e^{i\frac{\pi}{6}}$
- d.  $f(z) - (1 + 2i) = 3(z - (1 + 2i))$ , soit encore  $f(z) = 3z - 2 - 4i$

### Exercice 5-108

Soit  $h$  une homothétie de rapport  $k$  et  $h'$  une homothétie de rapport  $k'$  et de centres respectifs  $\Omega$ , d'affixe  $\omega$ , et  $\Omega'$ , d'affixe  $\omega'$ .

1. Soit  $t$  une translation de vecteur  $\vec{u}$ . Montrer que les composés  $h \circ t$  et  $t \circ h$  sont des homothéties de rapport  $k$ .
2. Si  $kk' \neq 1$ , montrer que  $h \circ h'$  est une homothétie de rapport  $kk'$  et que les centres de  $h$ ,  $h'$  et  $h \circ h'$  sont alignés.
3. Si  $kk' = 1$ , montrer que  $h \circ h'$  est une translation.

### Correction exercice 5-108

1. Si  $t$  est la translation de vecteur  $\vec{u}$  et soit  $a$  l'affixe du vecteur  $\vec{u}$ . Soit  $M$  un point d'affixe  $z$ ,  $M' = t(M)$  le point d'affixe  $z'$  et  $M'' = h \circ t(M)$  le point d'affixe  $z''$ , donc il existe  $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  et  $b \in \mathbb{C}$  tels que  $z'' = kz' + b$

On a

$$\begin{cases} M' = t(M) \\ h \circ t(M) = h(t(M)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' = z + a \\ z'' = kz' + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' = z + a \\ z'' = k(z + a) + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' = z + a \\ z'' = kz + ka + b \end{cases}$$

On en déduit que  $h \circ t$  est une homothétie de rapport  $k$ .

Question non demandée : quel est son centre ?

Pour cela on cherche son point fixe  $\Omega_1$  d'affixe  $\omega_1$

$$\omega_1 = k\omega_1 + ka + b \Leftrightarrow \omega_1(1 - k) = ka + b \Leftrightarrow \omega_1 = \frac{ka + b}{1 - k}$$

Si de plus on exprime l'affixe de ce centre en fonction de l'affixe de  $\Omega$  le centre de  $h$  d'affixe  $\omega$ . Le centre de  $h$  est le point fixe de  $h$  d'affixe  $\omega = \frac{b}{1-k}$  (voir cours ou refaire cette petite démonstration) donc  $b = \omega(1 - k)$ , ce que l'on remplace dans

$$\omega_1 = \frac{ka + b}{1 - k} = \frac{ka + \omega(1 - k)}{1 - k} = \omega + \frac{ka}{1 - k}$$

Si  $t$  est la translation de vecteur  $\vec{u}$  et soit  $a$  l'affixe du vecteur  $\vec{u}$ . Soit  $M$  un point d'affixe  $z$ ,  $M' = h(M)$  le point d'affixe  $z'$  et  $M'' = t \circ h(M)$  le point d'affixe  $z''$ , donc il existe  $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  et  $b \in \mathbb{C}$  tels que  $z' = kz + b$

$$\begin{cases} M' = h(M) \\ t \circ h(M) = t(h(M)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' = kz + b \\ z'' = z' + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' = kz + b \\ z'' = kz + b + a \end{cases}$$

On en déduit que  $t \circ h$  est une homothétie de rapport  $k$ .

Question non demandée : quel est son centre ?

Pour cela on cherche le point fixe  $\Omega_2$  d'affixe  $\omega_2$

$$\omega_2 = k\omega_2 + a + b \Leftrightarrow \omega_2 = \frac{a + b}{1 - k}$$

Si de plus on exprime l'affixe de ce centre en fonction de l'affixe de  $\Omega$  le centre de  $h$  d'affixe  $\omega$ . Le centre de  $h$  est le point fixe de  $h$  d'affixe  $\omega = \frac{b}{1-k}$  (voir cours ou refaire cette petite démonstration) donc  $b = \omega(1 - k)$ , ce que l'on remplace dans

$$\omega_2 = \frac{a + b}{1 - k} = \frac{a + \omega(1 - k)}{1 - k} = \omega + \frac{a}{1 - k}$$

2. Soit  $M$  un point d'affixe  $z$ ,  $M' = h'(M)$  le point d'affixe  $z'$  et  $M'' = h \circ h'(M)$  le point d'affixe  $z''$ .

Il existe  $k, k' \in \mathbb{R}$  avec  $kk' \neq 1$  et  $b, b' \in \mathbb{C}$  tels que

$$\begin{cases} z' = k'z + b' \\ z'' = kz' + b \end{cases}$$

Donc  $z'' = k(k'z + b) + b' = kk'z + kb + b'$

Ce qui montre que  $h \circ h'$  est une homothétie de rapport  $kk'$  car  $kk' \neq 1$ .

Le centre de  $h$  a pour affixe  $\omega$  et celui de  $h'$  a pour affixe  $\omega'$  tels que

$$\begin{cases} \omega = \frac{b'}{1-k'} \\ \omega' = \frac{b}{1-k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = (1-k')\omega' \\ b' = (1-k)\omega \end{cases}$$

On en déduit que

$$z'' = kk'z + kb + b' = kk'z + k(1-k')\omega' + (1-k)\omega$$

Le centre de  $h \circ h'$  est le point fixe  $\Omega''$  d'affixe  $\omega''$

$$\begin{aligned} \omega'' &= kk'\omega'' + k(1-k')\omega' + (1-k)\omega \Leftrightarrow \omega'' = \frac{k(1-k')\omega' + (1-k)\omega}{1-kk'} \\ \omega'' - \omega &= \frac{k(1-k')\omega' + (1-k)\omega}{1-kk'} - \omega = \frac{k(1-k')\omega' + (1-k)\omega - (1-kk')\omega}{1-kk'} \\ &= \frac{k(1-k')\omega' - k\omega + kk'\omega}{1-kk'} = \frac{k\omega'(1-k') - k\omega(1-k')}{1-kk'} \\ &= \frac{k(1-k')}{1-kk'}(\omega' - \omega) \end{aligned}$$

Ce qui signifie que les vecteurs  $\overrightarrow{\Omega\Omega''} = \frac{k(1-k')}{1-kk'}\overrightarrow{\Omega\Omega'}$

Donc les trois centres sont alignés.

3. Soit  $M$  un point d'affixe  $z$ ,  $M' = h'(M)$  le point d'affixe  $z'$  et  $M'' = h \circ h'(M)$  le point d'affixe  $z''$ . Il existe  $k, k' \in \mathbb{R}$  avec  $kk' \neq 1$  et  $b, b' \in \mathbb{C}$  tels que

$$\begin{cases} z' = k'z + b' \\ z'' = kz' + b \end{cases}$$

Donc  $z'' = k(k'z + b) + b' = kk'z + kb + b' = z + kb + b'$

Ce qui montre que  $h \circ h'$  est une translation de vecteur  $\vec{u}$  d'affixe  $kb + b'$

On peut, si on veut exprimer l'affixe de ce vecteur en fonction de  $\omega$  et de  $\omega'$  les affixes des centres des deux homothéties. On a

$$\begin{cases} \omega = \frac{b'}{1-k'} \\ \omega' = \frac{b}{1-k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = (1-k')\omega' \\ b' = (1-k)\omega \end{cases}$$

On en déduit que

$$z'' = kk'z + kb + b' = z + (k-1)\omega' + (1-k)\omega = z + (1-k)(\omega - \omega')$$

### Exercice 5-109

On rappelle que

$$j = e^{\frac{2i\pi}{3}}; \quad j^2 = \bar{j} \quad \text{et que} \quad j^3 = 1$$

Soit  $r$  une transformation du plan qui a un point  $M$  associe le point  $M'$  d'affixe  $M' = r(M)$  d'affixe  $z' = -j^2z + 1 + j^2$

Soit  $r'$  une transformation du plan qui a un point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M' = r'(M)$  d'affixe  $z' = iz + 1 - i$

1. Montrer que  $r$  est une rotation du plan dont on donnera l'affixe du centre  $\Omega$  et l'angle de la rotation.
2. Montrer que  $r'$  est une rotation du plan dont on donnera l'affixe du centre  $\Omega'$  et l'angle de la rotation.

3. Calculer l'affixe  $z''$  du point  $M'' = r \circ r'(M)$ , où  $M$  est un point d'affixe  $z$ . Que peut-on en déduire de  $r \circ r'$  ?

Correction exercice 5-109

1.  $-j^2 = e^{i\pi} e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{\frac{7i\pi}{3}} = e^{\frac{i\pi}{3}}$  donc  $r$  est une rotation d'angle  $\frac{\pi}{3}$ , son point fixe vérifie  $r(\Omega) = \Omega$  donc  $\omega = -j^2\omega + 1 + j^2$ , ce qui entraîne que :

$$\omega = \frac{1 + j^2}{1 + j^2} = 1$$

2. On cherche le point fixe  $\Omega'$  tel que  $r'(\Omega') = \Omega'$ , c'est-à-dire le point d'affixe  $\omega'$  tel que  $\omega' = i\omega' + 1 - i \Leftrightarrow \omega'(1 - i) = 1 - i \Leftrightarrow \omega' = 1$

Donc  $\Omega' = \Omega$

$$i = e^{\frac{i\pi}{2}}$$

Donc  $r'$  est la rotation de centre  $\Omega(1,0)$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

3. Soit  $z''$  l'affixe  $M''$ ,  $z'$  l'affixe de  $M' = r'(M)$  et  $z$  l'affixe de  $M$

$$z' = -j^2z + 1 + j^2$$

$$z'' = iz' + 1 - i$$

Donc

$$\begin{aligned} z'' &= iz' + 1 - i = z'' = i(-j^2z + 1 + j^2) + 1 - i = -ij^2z + i + ij^2 + 1 - i \\ &= -ij^2z + ij^2 + 1 \end{aligned}$$

Donc  $r \circ r'$  est une rotation d'angle un argument de

$$-ij^2 = e^{i\pi} e^{\frac{i\pi}{2}} e^{-\frac{2i\pi}{3}} = e^{i\pi(1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3})} = e^{\frac{5i\pi}{6}}$$

Et le centre est  $\Omega''$ , d'affixe  $\omega''$  vérifie

$$\omega'' = -ij^2\omega'' + ij^2 + 1 \Leftrightarrow \omega''(1 + ij^2) = 1 + ij^2 \Leftrightarrow \omega'' = 1$$