Feuille 4 : Développements Limités

Correction Exercice 14

On veut savoir vers quoi tend $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2}$ pour $x \to 0$.

On a

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$

alors

$$\sin^2(x) = \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)\left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + o(x^5)$$

($o(x^5)$ étant le plus petit $o(\cdot)$ possible quand on multiplie $o(x^4)$ au reste)

$$\sin^2(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)$$

les autres termes de degré supérieur à 5, ils vont dans l'erreur $o(x^5)$

$$\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)}{x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left[\frac{1 - x^2/2 + o(x^3)}{1 - x^2/3 + o(x^3)} - 1\right]$$

En utilisant le développement limité de $(1-y)^{-1}$ pour $y \to 0$ (et car $x^2/3 + o(x^3)$ tend bien vers 0 quand $x \to 0$), on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} &= \frac{1}{x^2}\left[\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^3)\right) - 1\right] \\
&= \frac{1}{x^2}\left[1 + \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{2} + o(x^3) - 1\right] \\
&= \frac{1}{x^2}\frac{-x^2}{6} + o(x) \\
&= \frac{-1}{6} + o(x)
\end{aligned}$$

On en déduit que la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 est $-1/6$.