Correction TD 5 -suite-

Exercice 18.
Soit $u : E \to E$ une application linéaire et λ un réel. Soit $E_\lambda = \ker(u - \lambda id_E)$.
1. Soit $x \in E_\lambda$, on peut donc écrire

$$(u - \lambda id_E)(x) = 0 \Leftrightarrow u(x) - \lambda x = 0 \Leftrightarrow u(x) = \lambda x.$$

Montrons que E_λ est un sous-espace vectoriel de E :
Soient $x, y \in E_\lambda$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} u(\alpha x + y) &= \alpha u(x) + u(y) \text{ (par linéarité de } u\text{)} \\ &= \alpha\lambda x + \lambda y \text{ (par hypothèse sur } x \text{ et } y\text{)} \\ &= \lambda(\alpha x + y) \end{aligned}$$

donc $u(\alpha x + y) - \lambda(\alpha x + y) = 0$, d'où $\alpha x + y$ est dans E_λ. L'espace E_λ est donc un espace vectoriel, inclut dans E par définition de u.
2. Soient $y_1, y_2 \in u(F)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Soient $x_1, x_2 \in F$ tels que $u(x_1) = y_1$ et $u(x_2) = y_2$. On a

$$\begin{aligned} \alpha y_1 + y_2 &= \alpha u(x_1) + u(x_2) \\ &= u(\alpha x_1 + x_2) \text{ par linéarité de } u \end{aligned}$$

Comme F est un espace vectoriel, $\alpha x_1 + x_2 \in F$, d'où $\alpha y_1 + y_2 \in u(F)$. On en déduit que F est un espace vectoriel, inclut dans E par définition de u.
3. Si $\lambda \neq 0$. On montre que $u(E_\lambda) = E_\lambda$ par double inclusion :
Soit $x \in E_\lambda$, d'après la question 1, on a

$$\begin{aligned} u(x) = \lambda x &\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}u(x) = x \text{ car } \lambda \neq 0 \\ &\Leftrightarrow u\left(\frac{1}{\lambda}x\right) = x \text{ par linéarité de } u \end{aligned}$$

Comme E_λ est un sous-espace vectoriel qui contient x, il contient aussi $(1/\lambda)x$. Donc $x \in u(E_\lambda)$. On a donc la première inclusion $E_\lambda \subset u(E_\lambda)$.
Soit $y \in u(E_\lambda)$, alors il existe $x \in E_\lambda$ tel que $u(x) = y$. Or comme, d'après la question 1, $u(x) = \lambda x$, d'où $y = \lambda x$. Comme E_λ est un sous-espace vectoriel qui contient x, on en déduit que $\lambda x = y \in E_\lambda$, d'où $u(E_\lambda) \subset E_\lambda$.
On en conclut que $u(E_\lambda) = E_\lambda$.

Exercice 20.
Soit $u : E \to E$ une application linéaire, E étant un espace vectoriel de dimension n pair. Montrons que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(a) $u^2(x) = 0$ pour tout $x \in E$ et $n = 2\dim(\mathrm{Im}(u))$.
(b) $\mathrm{Im}(u) = \ker(u)$.

Etape (a) $\Rightarrow$ (b).
On commence par montrer une inclusion : soit $y \in \mathrm{Im}(u)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Comme on suppose (a), on sait que

$$u^2(x) = 0 \Rightarrow u(y) = 0$$

d'où $y \in \ker(u)$. On en déduit que $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$.
On conclut par égalité de la dimension de espaces : par le théorème du rang, on a

$$\dim(\mathrm{Im} u) + \dim(\ker u) = \dim(E) \Rightarrow \frac{n}{2} + \dim(\ker u) = n \Rightarrow \dim(\ker u) = \frac{n}{2}$$

Comme $\dim(\mathrm{Im} u) = \dim(\ker u)$ et qu'on a une inclusion, les espaces sont égaux.
Etape (b) $\Rightarrow$ (a).
Par le théorème du rang, on a

$$\dim(\mathrm{Im} u) + \dim(\ker u) = \dim(E) \Rightarrow 2\dim(\mathrm{Im} u) = n$$

Montrons maintenant la première partie de (a). Soit $x \in E$, alors $u(x) \in \mathrm{Im} u = \ker u$ d'après (b), d'où

$$u\Big(u(x)\Big) = 0 \Leftrightarrow u^2(x) = 0.$$

L'équation est vraie pour tout $x \in E$.