Correction Feuille 5 : Applications linéaires

Exercice 2
Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ des applications linéaires.

— Montrons que $f + g$ est linéaire :
soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}(f+g)(\lambda x + y) &= f(\lambda x + y) + g(\lambda x + y)\\ &= \lambda f(x) + f(y) + \lambda g(x) + g(y) \text{ car } f \text{ et } g \text{ lin.}\\ &= \lambda(f+g)(x) + (f+g)(y)\end{aligned}$$

— Montrons que $f \times g$ n'est pas linéaire :
deux possibilités, soit on dit que

$$f(\lambda x) \times g(\lambda x) = \lambda^2 f(x) \times g(x) \neq \lambda f(x) \times g(x) \text{ (faux pour tout } \lambda\,!)$$

soit on di que

$$f(x+y) \times g(x+y) = (f(x) + f(y)) \times (g(x) + g(y)) \neq f(x) \times g(x) + f(y) \times g(y).$$

Exercice 8.
Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie par $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
1. L'image des vecteurs de la base canonique par f vaut :

$$f(1,0,0,0) = f(0,1,0,0) = f(0,0,1,0) = f(0,0,0,1) = 1.$$

Donc $\mathrm{Im} f = Vect(1)$ et $\dim(\mathrm{Im} f) = 1$.
2. D'après le théorème du rang, on a :

$$\dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im} f) = \dim(\mathbb{R}^4) \Rightarrow \dim(\ker f) = 3.$$

Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker f$, on a donc

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

On doit exprimer x en fonction de trois vecteurs indépendants :

$$x = (-x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4) \Leftrightarrow x = x_2(-1,1,0,0) + x_3(-1,0,1,0) + x_4(-1,0,0,1)$$

Le noyau de f est donc engendré par $(-1,1,0,0)$, $(-1,0,1,0)$ et $(-1,0,0,1)$.

Exercice 13.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base cacnonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$u(e_1) = f_1 - f_2 + 2f_3;\ u(e_2) = 2f_1 + f_2 - 3f_3;\ u(e_3) = 3f_1 - f_3;\ u(e_4) = -f_1 - 2f_2 + 5f_3.$$

1. L'image par u du vecteur $x = (x_1, x_2, x_{,3}\, x_{,4})$ est :

$$u(x) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4)f_1 + (-x_1 + x_2 - 2x_4)f_2 + (2x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4)f_3$$

2. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker f$, alors

$$\left\{\begin{array}{cl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 & = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_4 & = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 & = 0 \\ 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 & = 0 \\ -7x_2 - 7x_3 + 7x_4 & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 & = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 & = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1 & = -x_3 - x_4 \\ x_2 & = -x_3 + x_4 \end{array}\right.$$

Donc $x = (-x_3 - x_4, -x_3 + x_4, x_3, x_4) = x_3(-1, -1, 1, 0) + x_4(-1, 1, 0, 1)$. Les vecteurs $(-1, -1, 1, 0)$ et $(-1, 1, 0, 1)$ forment une famille génératrice de $\ker f$, de plus ils sont linéairement indépendants, ils forment donc une base de $\ker f$. On a donc $\dim(\ker f) = 2$.

3. Par le théorème du rang, on sait que $\dim(\ker u) = 2$. Les vecteurs $u(e_1), u(e_2)$ sont l.i., donc forment une base de $\mathrm{Im} u$.