Correction TD : Primitives

Exercice 9-5, (a) : Intégration par parties
On veut calculer une primitive de $\int \ln x dx$ par l'intégration par parties. On pose

$$u'(x) = 1, \quad v(x) = \ln x.$$

Quand on dérive un produit, on a

$$(uv)' = u'v + uv'$$

qu'on peut aussi écrire

$$u'v = (uv)' - uv'$$

et si on intègre

$$\int u'v = [uv] - \int uv'$$

on retrouve l'intégration par parties. Dans notre cas, on a

$$\int \ln x dx = [x \ln x] - \int x \frac{1}{x} dx.$$

On en déduit qu'une primitive possible de $\ln x$ (à une constante près) vaut

$$F(x) = x \ln x - x.$$

Et en effet,

$$F'(x) = \ln x + x\frac{1}{x} - 1 = \ln x.$$

Exercice 9-5, (c) : Ipp, méthode à voir au moins une fois
On veut calculer une primitive de $\sin(x)e^{-x}$ en utilisant l'intégration par parties. On pose

$$u'(x) = e^{-x}, \quad v(x) = \sin(x).$$

Soit I notre intégrale, l'intégration par parties nous donne

$$I = \int \sin(x)e^{-x}dx = [\sin(x)(-1)e^{-x}] - \int \cos(x)(-1)e^{-x}dx.$$

On refait une intégration par parties (avec $u'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = \cos(x)$) et on obtient

$$\begin{aligned} I &= [\sin(x)(-1)e^{-x}] + [\cos(x)(-1)e^{-x}] - \int (-1)\sin(x)(-1)e^{-x}dx \\ &= [\sin(x)(-1)e^{-x}] + [\cos(x)(-1)e^{-x}] - I \end{aligned}$$

En passant les I du même côté, on obtient

$$2I = [\sin(x)(-1)e^{-x}] + [\cos(x)(-1)e^{-x}]$$

On en déduit qu'une primitive possible est

$$F(x) = \frac{-1}{2}(\sin(x) + \cos(x))e^{-x}$$

et si on dérive F, on a

$$F'(x) = \frac{-1}{2}(\cos(x) - \sin(x))e^{-x} + \frac{1}{2}(\sin(x) + \cos(x))e^{-x} = \sin(x)e^{-x}.$$

Exercice 9-6, (a) : Changement de variables

On veut calculer une primitive de $1/\sqrt{1+e^x}$. On utilise le changement de variables

$$t = \sqrt{1+e^x}.$$

Dans ce cas, on a

$$dt = (\sqrt{1+e^x})' = (1+e^x)'\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+e^x}} = \frac{dxe^x}{2\sqrt{1+e^x}}.$$

Or on a

$$t = \sqrt{1+e^x} \Rightarrow t^2 - 1 = e^x$$

(attention, ici il n'y a pas de domaine de définition, mais le passage racine et carré peut poser problème) d'où

$$dx = \frac{2\sqrt{1+e^x}}{e^x}dt = \frac{2t}{t^2-1}dt$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx &= \int \frac{1}{t}\frac{2t}{t^2-1}dt \\ &= \int \frac{2}{t^2-1}dt \\ &= \int \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}dt \end{aligned}$$

Une primitive possible est donc

$$\begin{aligned} F(x) &= \ln(|t-1|) - \ln(|t+1|) \\ &= \ln(\sqrt{1+e^x}-1) - \ln(\sqrt{1+e^x}+1). \end{aligned}$$

Exercice 9-4, (c) : Fonctions circulaires et changement de variables

On veut calculer une primitive de $\sin(x)^3\cos(x)^2$. On utilise le changement de variables

$$t = \cos(x).$$

Dans ce cas, on a

$$dt = (\cos(x))' = dx(-\sin(x)).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int \sin(x)^3\cos(x)^2 dx &= \int \sin(x)^2\cos(x)^2\Big(\sin(x)dx\Big) \\ &= \int \left[1-\cos(x)^2\right]\cos(x)^2\Big(\sin(x)dx\Big) \\ &= -\int \left[1-t^2\right]t^2 dt \end{aligned}$$

Une primitive possible est donc

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \\ &= -\frac{1}{3}\cos(x)^3 + \frac{1}{5}\cos(x)^5. \end{aligned}$$