Université Claude Bernard Lyon 1
Année 2022-2023
6 mars 2023

Contrôle Continu 1 : Barème et erreurs fréquentes.

Exercice 1 [Question de cours : 2 points] Pour une série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$, avec $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donner la définition précise de la convergence normale d'une telle série.
Barème : 2 si uniformité mentionnée et pas de confusion suite-série. 0 si confusion suite-série.
Erreurs fréquentes : Encore et toujours, la confusion suite-série et la confusion convergence du terme général vers 0-convergence de la série.

Exercice 2 [4 points]

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction f définie pour $x \neq 0$ par
$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$
2. Montrer l'existence et calculer la valeur de la limite suivante :
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{x^2}.$$

Barème :

1. 2 pts : 1 si à l'ordre 1 ou écriture sans o. 2 si calcul correct fait à la question suivante.
2. 2 pts : 1.5 si erreur minimale type signe.

Erreurs fréquentes : Confusion développements sin et cos. Calcul trop rapide au 2 sans substitution faite proprement pour la composée.

Exercice 3 [3 points] Pour $x \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$f_n(x) = \frac{n}{1 + n(1 + x)}.$$

1. Montrer que la **suite** de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que la **suite** de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Barème :

1. 1 pt : 0 si réponse pas correcte, par exemple $1/x$.
2. 2 pts : 1 si méthode raisonnable et définition comprise mais erreur de calcul.

Erreurs fréquentes : Confusion sur ce qui tend vers l'infini : $1/(1 + x)$ n'est donc surtout pas équivalent à $1/x$.

Exercice 4 [2 points]

1. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} x^3 e^{-x}$.
2. A-t-on $xe^{-x} = o\left(1/x^2\right)$ quand $x \to +\infty$? Justifier votre réponse.
3. A-t-on $xe^{-x} = O\left(1/x^2\right)$ quand $x \to +\infty$? Justifier votre réponse.
4. A-t-on $xe^{-x} \sim 1/x^2$ quand $x \to +\infty$? Justifier votre réponse.

Barème :

1. 0.5 pt : 0 si équivalence entre $x^3 e^{-x}$ et e^{-x}.
2. 0.5 pt. 0 si équivalence entre $x^3 e^{-x}$ et e^{-x}.
3. 0.5 pt. 0.5 si simple corollaire question précédente.
4. 0.5 pt. 0 si équivalence entre $x^3 e^{-x}$ et e^{-x}.

Erreurs fréquentes : Equivalence entre $x^3 e^{-x}$ et e^{-x} (il suffit de considérer le quotient pour voir que ce n'est pas vrai). Penser qu'un petit o n'est pas un grand O (alors que c'est un cas particulier d'un grand O, il suffit de regarder la définition). Développement limité de exp en 0 alors que x tend vers l'infini.

Exercice 5 [9 points] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction paire et 2π-périodique définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \pi - x$.

1. Tracer le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Montrer que les coefficients de Fourier de f sont donnés par
$$a_0 = \pi \text{ et } \quad \forall n \geq 1\,,\ a_n = \frac{2(1-(-1)^n)}{n^2\pi},\ b_n = 0.$$
3. Déterminer la série de Fourier de f. Pour quelles valeurs de x est-elle convergente et sa somme Sf satisfait-elle $Sf(x) = f(x)$?
4. Déterminer la primitive F de f qui s'annule en 0. Justifier que F est impaire.
5. En déduire la série de Fourier de la fonction G 2π-périodique et impaire définie sur $[0, \pi]$ par
$$G(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{\pi x}{2}.$$
Indication : montrer que $G(x) = F(x) - \frac{\pi x}{2}$. On pourra admettre que G est C^1 sur $\mathbb{R}$.
6. A l'aide de la formule de Parseval, évaluer
$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}.$$

Barème :

1. 2 pts pour le dessin.
2. 2 pts pour les coefficients de Fourier : peu de tolérance raisonnement trop rapide car réponse donnée.
3. 1 pt pour la série de Fourier (0 si simple recopiage sans justification.).
4. 2 pts pour l'érude de la primitive : notation très tolérante car formulation alambiquée.
5. 2 pts pour Parseval : 1 si petite erreur calcul ou calcul non achevé.

Erreurs fréquentes : Oubli de 'C^0 et C^1 par morceaux' pour voir que la fonction est la somme de sa série de Fourier.

Définition d'une fonction impaire non connue : ce n'est pas une fonction qui n'est pas paire. En particulier, la fonction donnée par $-x^2/2 + \pi x/2$ **sur $\mathbb{R}$ tout entier** n'est pas impaire.

Manque de soin dans l'intégration qui donne parfois des réponses négatives à la dernière question, ce qui devrait mettre la puce à l'oreille.