Contrôle continu 1
6 mars 2023

L'épreuve dure 1h30. Vous pouvez utiliser librement le formulaire en fin de sujet. Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés. On prendra soin de justifier les réponses. Les deux parties sont à rédiger sur des copies séparées. Le sujet comporte 4 exercices indépendants.

Partie I

Exercice 1.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de la fonction f définie au voisinage de 0 par
$$f(x)=\frac{\sin(x)}{x}.$$
2. Calculer
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{x^2}$$

Correction exercice 1

1. $$f(x)=\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{x}=1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)$$
2. Comme $-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$, on a
$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)=\ln\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)\underset{0}{\sim}-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\underset{0}{\sim}-\frac{x^2}{6}$$
Donc
$$\frac{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{x^2}\underset{0}{\sim}-\frac{\frac{x^2}{6}}{x^2}=-\frac{1}{6}$$
alors
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{x^2}=-\frac{1}{6}$$

Exercice 2.

Pour $x\in\mathbb{R}^+$ et $n\geq 1$, on pose $f_n(x)=\frac{n}{1+n(1+x)}$.

1. Montrer que la **suite** de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
2. Démontrer que la **suite** de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Correction exercice 2

1. Soit $x\in\mathbb{R}^+$ fixé
$$\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{1+n(1+x)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n(1+x)}=\frac{1}{1+x}.$$
La **suite** de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers f définie par $f(x)=\frac{1}{1+x}$.
2. Pour tout $x\in\mathbb{R}^+$

$$|f_n(x)-f(x)| = \left|\frac{n}{1+n(1+x)} - \frac{1}{1+x}\right| = \left|\frac{n(1+x)-\big(1+n(1+x)\big)}{\big(1+n(1+x)\big)(1+x)}\right|$$
$$= \left|\frac{n(1+x)-1-n(1+x)}{\big(1+n(1+x)\big)(1+x)}\right| = \frac{1}{1+x+n(1+x)^2} \leq \frac{1}{n(1+x)^2} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On a majoré $|f_n(x)-f(x)|$ par une expression indépendante de $x \in \mathbb{R}^+$ et qui tend vers 0, la convergence de la **suite** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 3.

1. Déterminer
$$\lim_{x\to+\infty} x^3e^{-x}$$
2.
   a. A-t-on $xe^{-x} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$? Justifier la réponse.
   b. A-t-on $xe^{-x} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$? Justifier la réponse.
   c. A-t-on $xe^{-x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$? Justifier la réponse.

Correction exercice 3

1. Par croissance comparée
$$\lim_{x\to+\infty} x^3e^{-x} = 0$$
2.
   a. Comme $x^3e^{-x} = \frac{xe^{-x}}{\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

      On a bien $xe^{-x} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
   b. Comme $|x^3e^{-x}| < C, C \in \mathbb{R}$.

      On a bien $xe^{-x} = \frac{xe^{-x}}{\frac{1}{x^2}} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
   c. Comme x^3e^{-x} ne tend pas vers 1 en $+\infty$ on n'a pas $xe^{-x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$.

Partie II

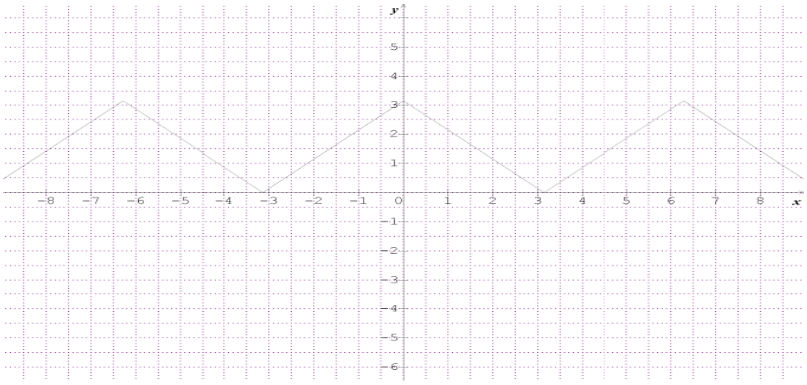
Exercice 4.

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction paire et 2π-périodique définie sur $[0,\pi]$ par $f(x) = \pi - x$.

1. Tracer le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Montrer que les coefficients de Fourier de f sont $a_0 = \pi$, et pour tout $n \geq 1$: $a_n = \frac{2}{n^2\pi}(1-(-1)^n)$ et $b_n = 0$.
3. Déterminer la série de Fourier de f, pour quelles valeurs de x a-t-on $S_f(x) = f(x)$?
4. Déterminer la primitive F de f qui s'annule en 0. Justifier que F est impaire.
5. En déduire la série de Fourier de la fonction G, 2π-périodique et impaire définie sur $[0,\pi]$ par
$$G(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\pi x.$$
   Indication : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = F(x) - \frac{\pi}{2}x$, on admettra que G est C^1 sur $\mathbb{R}$.
6. A l'aide de la formule de Parseval évaluer
$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$$

Correction exercice 4

1.



2. Comme la fonction est paire $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 0$

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt$$

Pour $n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)dt = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{(\pi - t)^2}{2}\right]_0^{\pi} = \pi$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$ on fait une intégration par parties

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left\{\left[(t-\pi)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-1)\frac{\sin(nt)}{n}dt\right\} = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(nt)\,dt = \frac{2}{n\pi}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{2}{n^2\pi}(1-(-1)^n)$$

Si $n = 2p$ avec $p \geq 1$ alors $a_{2p} = 0$ et si $n = 2p+1$ avec $p \geq 0$ alors $a_{2p+1} = \frac{4}{(2p+1)^2\pi}$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cos\big((2p+1)x\big)$$

f est C^1 par morceaux et continue donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S_f(x) = f(x)$.

4. On pose $f_p(x) = \frac{1}{(2p+1)^2}\cos\big((2p+1)x\big)$

f_p est continue donc intégrable sur un intervalle $[0, x]$.

$$|f_p(x)| = \left|\frac{1}{(2p+1)^2}\cos\big((2p+1)x\big)\right| \leq \frac{1}{(2p+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4p^2}$$

La série de terme général $\frac{1}{4p^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente $\alpha = 2 > 1$, donc la série de fonction de terme général f_p converge uniformément sur un intervalle $[0, x]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
On peut donc intégrer terme à terme.

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cos\big((2p+1)t\big)\right)dt$$
$$= \frac{\pi}{2}x + \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\int_0^x\cos\big((2p+1)t\big)\,dt$$
$$= \frac{\pi}{2}x + \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\left[\frac{\sin\big((2p+1)t\big)}{2p+1}\right]_0^x = \frac{\pi}{2}x + \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\sin\big((2p+1)x\big)}{(2p+1)^3}$$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(-x) = -F(x)$ donc F est impaire.

5. Pour tout $x \in]0, \pi[$, $G'(x) = -x + \frac{\pi}{2} = -x + \pi - \frac{\pi}{2} = F'(x) - \frac{\pi}{2}$

Donc $G(x) = F(x) - \frac{\pi}{2}x + K$, comme $G(0) = 0$ on a $G(x) = F(x) - \frac{\pi}{2}x$

D'après la question précédente pour tout $x \in [0, \pi]$

$$G(x) = F(x) - \frac{\pi}{2}x = \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\sin\big((2p+1)x\big)}{(2p+1)^3}.$$

La fonction G étant impaire, 2π-périodique, C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$, cette égalité est vraie sur $\mathbb{R}$. C'est la série de Fourier de G.

6. D'après la formule de Parseval

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x)\big)^2dx = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) \Leftrightarrow \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}\big(f(x)\big)^2dx = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}a_{2p+1}^2$$

A gauche car f^2 est paire et à droite d'après les questions précédentes.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x)\big)^2dx = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) \Leftrightarrow \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)^2dx = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{16}{(2p+1)^4\pi^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\pi}\left[\frac{(\pi - x)^3}{-3}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4} \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$