Université Claude Bernard
L2 **Mathématiques 4**

Mathématiques
2022-2023

Correction du Contrôle continu du Lundi 6 mars 2023

Durée : 1 heure 30.

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin à JUSTIFIER les réponses aux exercices.
On ne demande PAS de justifier l'intégrabilité des fonctions, sauf mention explicite du contraire.

Partie I (à rédiger sur une première copie)

Exercice 1 (4 points).

1. Déterminer la limite quand x tend vers 0 de
$$\frac{1-\cos(x)+\sin(x)}{e^x-1}.$$

2. Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de
$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x.$$

Exercice 2 (6 points). Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x \in]0,1]$, on pose
$$f_n(x) = x^n e^{-2x^n}.$$

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1]$.
3. Soit n un entier strictement positif. étudier les variations de $f - f_n$ sur $[0,1]$.
4. Soit a dans $[0,1[$. Montrer que f_n converge uniformément vers f sur $[0,a]$.

Partie II (à rédiger sur une seconde copie)

Exercice 3 (Question de cours : 2 points). Pour une série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$, avec $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour laquelle on précisera la notion de convergence utilisée et de somme $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, énoncer le théorème permettant de calculer l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$.

Correction de l'exercice 3. Le résultat demandé était le suivant :

Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions Riemann-intégrables sur [a, b]. Supposons que la **série** $\sum f_n$ **converge uniformement sur [a, b]** vers une fonction f : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. Alors f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, et on peut intervertir série et intégrale, c'est-à-dire :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Commentaire : On n' a mis aucun point si l'hypothèse clef de convergence uniforme n'était pas énoncé. On a mis tous les points si des hypothèses plus fortes étaient énoncés à la place (par exemple f_n continue ou continue par morceau à la place de Riemann-intégrable, convergence normale de la série à la place de la convergence uniforme). On a mis la moitié des points sans la formule qui énonce comment calculer l'intégrale.

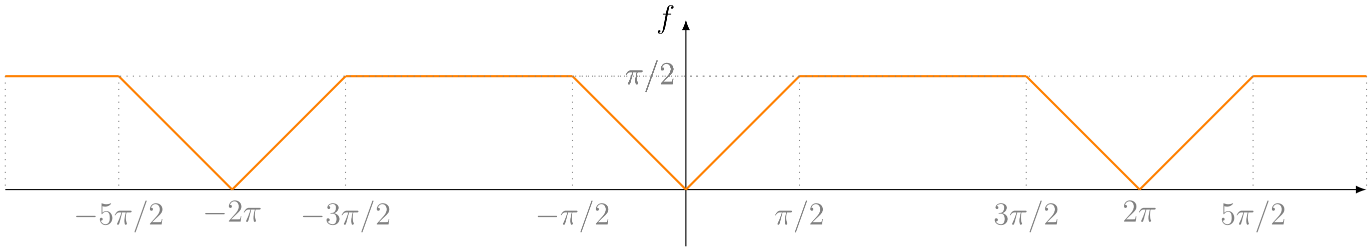
□

Exercice 4 (8 points). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction paire et 2π-périodique définie sur $[0, \pi]$ par le minimum de x et $\pi/2$:

$$f(x) = \min\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}.$$

1. Tracer le graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Calculer $a_0(f)$ et $b_n(f)$ pour tout $n \geq 1$.
3. Montrer que les autres coefficients de Fourier de f sont donnés pour $n \geq 0$ par
$$a_{2n+2}(f) = -\frac{(1 + (-1)^n)}{2(n + 1)^2\pi},\ a_{2n+1}(f) = -\frac{2}{(2n + 1)^2\pi}.$$
4. Déterminer la série de Fourier de f. Pour quelles valeurs de x est-elle convergente ? Pour quelles valeurs de x sa somme Sf satisfait-elle $Sf(x) = f(x)$?
5. En déduire la valeur de la somme de $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p + 1)^2}$.

   Indication : On pourra évaluer la série de Fourier au choix en $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = 0$.
6. À l'aide de la formule de Parseval, évaluer
$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p + 1)^4}.$$



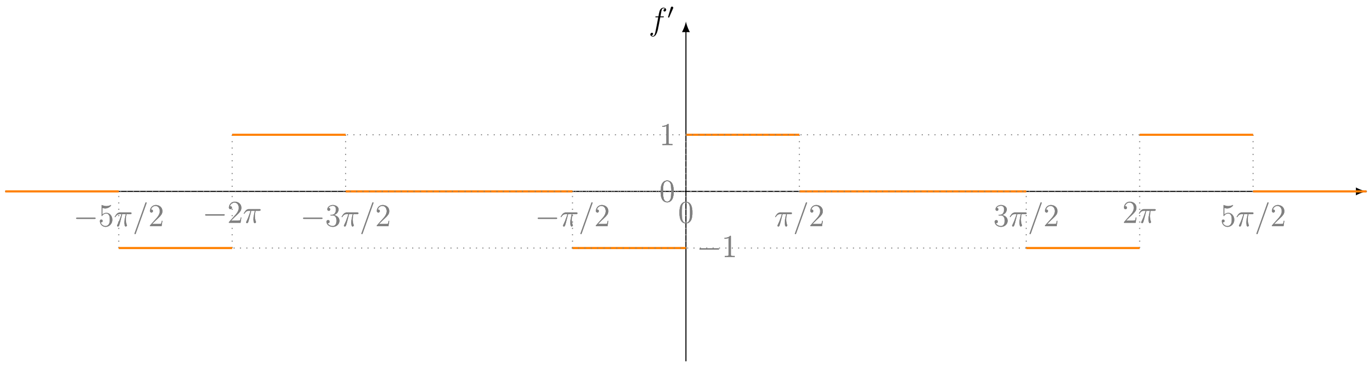
Correction de l'exercice 4.
1.(1 point) Par parité la formule sur $[-\pi,\pi]$ est $f(x)=\min\left(|x|,\frac{\pi}{2}\right)$, puis on prolonge par périodicité. Le dessin se trouve ci-dessous.
2. (1 point + 1 point Bonus) Comme f est paire, $b_n(f)=0$. Il reste à calculer en utilisant la parité à la deuxième égalité et la relation de Chasles à la troisième égalité :

$$a_0(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}xdx+\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\pi}{2}dx\right)=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/2}+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4},$$

3. (2 points + 1 point Bonus)

Méthode 1 : Comme f est continue et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, on obtient ((2) du formulaire) pour $n>0$: $-na_n(f)=b_n(f')$.

Comme f est paire, la dérivée (à gauche) f' est impaire et, on la trace aussi ci-dessous, même si ce n'est pas demandé :



On calcule alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$b_n(f')=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f'(x)\sin(nx)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin(nx)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f'(x)\sin(nx)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin(nx)dx,$$

utilisant la 2π-périodicité, puis la parité de $f'(x)\sin(nx)$ (et enfin la formule pour f'). On obtient donc :

$$b_n(f')=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin(nx)dx=-\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi/2}=\frac{2(1-\cos(n\pi/2))}{n\pi},$$

d'où finalement vu $\cos((2p+1)\pi/2)=0$ et $\cos((2p+2)\pi/2)=(-1)^{p+1}$:

$$\forall p\geq 0\,,\ b_{2p+2}(f')=\frac{(1+(-1)^p)}{(p+1)\pi},\ b_{2p+1}(f')=\frac{2}{(2p+1)\pi}.$$

En utilisant le (2) du formulaire comme annoncé, on obtient :

$$a_{2n+2}(f) = -\frac{(1+(-1)^n)}{2(n+1)^2\pi},\ a_{2n+1}(f) = -\frac{2}{(2n+1)^2\pi}.$$

Plus précisément, on obtient en décomposant les cas $n = 2p$ et $n = 2p+1$ pour le premier $a_{2n+2}(f)$:

$$\forall p \geq 0\,,\ b_{4p+4}(f') = 0, b_{4p+2}(f') = \frac{2}{(2p+1)\pi},\ b_{2p+1}(f') = \frac{2}{(2p+1)\pi}.$$

et aussi pour $p \geq 0$:

$$a_{4p+4}(f) = 0, a_{4p+2}(f) = -\frac{1}{(2p+1)^2\pi},\ a_{2p+1}(f) = -\frac{2}{(2p+1)^2\pi}.$$

Méthode 2 : (méthode d'intégration par partie directe, utilisée dans la plupart des copies, bien que ce soit moins efficace que le résultat du formulaire et plus sujet à erreur de calculs)

On calcule alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\Big(\int_0^{\pi/2} x\sin(nx)dx + \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin(nx)dx\Big), \end{aligned}$$

utilisant la 2π-périodicité, puis la parité de $f(x)\cos(nx)$ (et enfin la formule pour f).

La première intégrale s'intègre par partie en prenant $u(x) = x, u' = 1, v'(x) = \cos(nx), v(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ pour obtenir $\int_0^{\pi/2} uv'dx = [uv]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u'vdx$. On obtient donc :

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\Big(\left[\frac{x\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\frac{\sin(nx)}{n}dx + \frac{\pi}{2}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{\pi/2}^{\pi}\Big) = \frac{2}{\pi}\Big(-\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(nx)}{n}dx\Big)$$

vu que $\sin(0) = 0 = \sin(n\pi)$ et que les deux termes en $\sin(n\frac{\pi}{2})$ se simplifient (comme on s'attend par l'applicabilité de la méthode 1) [1]. Finalement, en intégrant la dernière intégrale restante, on obtient :

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{2(\cos(n\pi/2)-1)}{n^2\pi},$$

d'où finalement vu $\cos((2p+1)\pi/2) = 0$ (attention ce n'est pas nul pour les coefficients pairs, erreur souvent commise!) et $\cos((2p+2)\pi/2) = (-1)^{p+1}$:

$$a_{2n+2}(f) = -\frac{(1+(-1)^n)}{2(n+1)^2\pi},\ a_{2n+1}(f) = -\frac{2}{(2n+1)^2\pi}.$$

Pour simplifier les calculs ensuite, il est pertinent de simplifier la somme $1+(-1)^n$, soit pour $p \geq 0$ (premier terme pour $n = 2p+1$ dans $2n+2$ second terme pour $n = 2p$ dans $2n+2$) :

$$a_{4p+4}(f) = 0, a_{4p+2}(f) = -\frac{1}{(2p+1)^2\pi},\ a_{2p+1}(f) = -\frac{2}{(2p+1)^2\pi}.$$

1. Attention, même si on en a besoin la formule correcte est $\sin(n\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p \\ (-1)^p & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$

4. (1 points)

Cela donne la série de Fourier suivante (attention, le coefficient de $\cos(nx)$ est a_n) :

$$S_f(x) = \frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(nx) = \frac{3\pi}{8}-\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2\pi}\cos((4p+2)x)-\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2}{(2p+1)^2\pi}\cos((2p+1)x)\,,$$

Comme la fonction f est C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, par le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et on a $Sf(x) = f(x)$ en tout point x.

5. (1.5 points) **Méthode 1 :** En évaluant, en $x = \frac{\pi}{2}$, on peut utiliser (à nouveau)

$$\cos((4p+2)\frac{\pi}{2}) = \cos((2p+1)\pi) = -1$$
$$\cos((2p+1)\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}+p\pi) = 0$$

donc on obtient (comme f est C^1 par morceau et continue donc vérifiant $Sf(x) = f(x)$ pour tout x)

$$\frac{\pi}{2} = f(\frac{\pi}{2}) = S_f(\frac{\pi}{2}) = \frac{3\pi}{8}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2\pi} - 0$$

d'où

$$\frac{1}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{8}.$$

ce qui donne la réponse :

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Méthode 2 : en évaluant en $x = 0$, on obtient (comme f est C^1 par morceau et continue donc vérifiant $Sf(x) = f(x)$ pour tout x par le Théorème de Dirichlet)

$$0 = f(0) = S_f(0) = \frac{3\pi}{8}-\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2\pi}-\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2}{(2p+1)^2\pi}$$

d'où

$$\frac{3}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{3\pi}{8}.$$

ce qui donne la réponse :

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

6. (1.5 points) On se tourne maintenant vers le calcul de la seconde somme. En utilisant cette fois seulement que notre fonction 2π-périodique f est continue par morceaux, on peut appliquer l'égalité de Parseval pour écrire

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2dx = \frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2\right) = \frac{9\pi^2}{64}+\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4\pi^4}+\frac{4}{(2p+1)^4\pi^4}$$

Calculant alors l'intégrale du membre de gauche et utilisant la parité de f, on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}x^2dx + \int_{\pi/2}^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2dx\right) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^3\right] = \frac{\pi^2}{6},$$

ce qui donne avec l'équation précédente :

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4} = \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{9\pi^2}{64}\right)\frac{2\pi^4}{5} = \frac{\pi^4}{96}.$$

$\square$