Université Claude Bernard Lyon 1
Année 2022-2023
6 mars 2023

PCSI L2 UE Mathématiques 4
Séquence 1

Contrôle Continu 1

L'épreuve dure 1h30. Vous pouvez utiliser librement le formulaire au dos du sujet. Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés. On prendra soin de ***justifier*** *les réponses.* ***Les deux parties sont à rédiger sur des copies séparées****. Le sujet comporte trois exercices indépendants.*

Partie I (à rédiger sur une première copie)

Exercice 1. [4 points]

1. Déterminer la limite quand x tend vers 0 de
$$\frac{1-\cos(x)+\sin(x)}{e^x-1}.$$
2. Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de
$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x.$$

Exercice 2. [6 points] Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x \in]0,1]$, on pose
$$f_n(x) = x^n e^{-2x^n}.$$

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1]$.
3. Soit n un entier strictement positif. étudier les variations de $f - f_n$ sur $[0,1]$.
4. Soit a dans $[0,1[$. Montrer que f_n converge uniformément vers f sur $[0,a]$.

Partie II (à rédiger sur une seconde copie)

Exercice 3. [Question de cours : 2 points] Pour une série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$, avec $f_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ pour laquelle on précisera la notion de convergence utilisée et de somme $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, énoncer le théorème permettant de calculer l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$.

Exercice 4. [8 points] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction paire et 2π-périodique définie sur $[0,\pi]$ par le minimum de x et $\pi/2$:

$$f(x) = \min\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}.$$

1. Tracer le graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Calculer $a_0(f)$ et $b_n(f)$ pour tout $n \geq 1$.
3. Montrer que les autres coefficients de Fourier de f sont donnés pour $n \geq 0$ par

$$a_{2n+2}(f) = -\frac{(1+(-1)^n)}{2(n+1)^2\pi}, \quad a_{2n+1}(f) = -\frac{2}{(2n+1)^2\pi}.$$

4. Déterminer la série de Fourier de f. Pour quelles valeurs de x est-elle convergente ? Pour quelles valeurs de x sa somme Sf satisfait-elle $Sf(x) = f(x)$?
5. En déduire la valeur de la somme de $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

   Indication : On pourra évaluer la série de Fourier au choix en $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = 0$.
6. À l'aide de la formule de Parseval, évaluer

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}.$$

Formulaire pour l'UE Mathématiques 4

(1) Les coefficients de Fourier de f T-périodique continue par morceaux sont donnés par l'intégrale sur une période (a au choix, $\omega = \frac{2\pi}{T}$)

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} \cos(n\omega x) f(x)dx, \qquad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} \sin(n\omega x) f(x)dx,$$

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} e^{-in\omega x} f(x)dx.$$

(2) Si f est continue et C^1 par morceaux, alors on a pour $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$a_n(f') = n\omega\, b_n(f), \qquad b_n(f') = -n\omega\, a_n(f).$$

(3) La formule de Parseval, valable pour f T-périodique continue par morceaux, s'écrit :

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2).$$