Université Claude Bernard Lyon 1
Année 2022-2023
6 mars 2023

PCSI L2 UE Mathématiques 4
Séquence 2

Contrôle Continu 1

L'épreuve dure 1h30. Vous pouvez utiliser librement le formulaire au dos du sujet. Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés. On prendra soin de ***justifier*** *les réponses. Le sujet comporte cinq exercices indépendants.*

Exercice 1 [Question de cours : 2 points] Pour une série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$, avec $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donner la définition précise de la convergence normale d'une telle série.

Exercice 2 [4 points]

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction f définie pour $x \neq 0$ par
$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$
2. Montrer l'existence et calculer la valeur de la limite suivante :
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{x^2}.$$

Exercice 3 [3 points] Pour $x \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$f_n(x) = \frac{n}{1+n(1+x)}.$$

1. Montrer que la **suite** de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que la **suite** de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 4 [2 points]

1. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} x^3 e^{-x}$.
2. A-t-on $xe^{-x} = o\left(1/x^2\right)$ quand $x \to +\infty$? Justifier votre réponse.
3. A-t-on $xe^{-x} = O\left(1/x^2\right)$ quand $x \to +\infty$? Justifier votre réponse.
4. A-t-on $xe^{-x} \sim 1/x^2$ quand $x \to +\infty$? Justifier votre réponse.

Exercice 5 [9 points] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction paire et 2π-périodique définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \pi - x$.

1. Tracer le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Montrer que les coefficients de Fourier de f sont donnés par
$$a_0 = \pi \quad \text{et} \qquad \forall n \geq 1\,,\ a_n = \frac{2(1-(-1)^n)}{n^2\pi},\ b_n = 0.$$
3. Déterminer la série de Fourier de f. Pour quelles valeurs de x est-elle convergente et sa somme Sf satisfait-elle $Sf(x) = f(x)$?
4. Déterminer la primitive F de f qui s'annule en 0. Justifier que F est impaire.
5. En déduire la série de Fourier de la fonction G 2π-périodique et impaire définie sur $[0, \pi]$ par
$$G(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{\pi x}{2}.$$
Indication : montrer que $G(x) = F(x) - \frac{\pi x}{2}$. On pourra admettre que G est C^1 sur $\mathbb{R}$.
6. A l'aide de la formule de Parseval, évaluer
$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}.$$

Formulaire pour l'UE Mathématiques 4

(1) Les coefficients de Fourier de f T-périodique continue par morceaux sont donnés par l'intégrale sur une période (a au choix, $\omega = \frac{2\pi}{T}$)

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} \cos(n\omega x)f(x)dx, \qquad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} \sin(n\omega x)f(x)dx,$$

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} e^{-in\omega x}f(x)dx.$$

(2) Si f est continue et C^1 par morceaux, alors on a pour $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$a_n(f') = n\omega\ b_n(f), \qquad b_n(f') = -n\omega\ a_n(f).$$

(3) La formule de Parseval, valable pour f T-périodique continue par morceaux, s'écrit :

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2).$$