Université Claude Bernard Lyon 1 PCSI L2 UE Mathématiques 4
Année 2022-2023 Séquence 2
27 mars 2023

Contrôle Continu 2

L'épreuve dure 1h30. Vous pouvez utiliser librement le formulaire au dos du sujet. Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés. On prendra soin de ***justifier*** *les réponses. Le sujet comporte cinq exercices indépendants. Des points bonus hors barème seront attribués dans la partie II qu'il est recommandé de traiter en dernier.*

Partie I (à rédiger sur une première copie)

Question de cours. [2 points] Énoncer le théorème de continuité des intégrales à paramètre avec hypothèse de domination.

Exercice 1 [2 points] Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\sqrt{t}}{t^2(1+t^4)}dt$$

converge.

Exercice 2 [6 points] On s'intéresse à l'intégrale à paramètre

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt\,.$$

1. Soit $x \geq 0$ fixé. Montrer que l'intégrale converge, autrement dit, que $F(x)$ est bien défini.
2. Pour tout $x \geq 0$, montrer que $F'(x)$ existe et est donnée par

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t} dt\,.$$

   Justifier soigneusement votre réponse.
3. Calculer explicitement $F'(x)$.
   Indication *: on pourra utiliser la formule* $\cos(s) = \frac{e^{is}+e^{-is}}{2}$.
4. Déterminer $F(0)$, puis $F(x)$ pour tout $x \geq 0$.

Partie II (à rédiger sur une seconde copie)

Exercice 3 [3 points] On souhaite résoudre l'EDP suivante :

$$k\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}, \tag{1}$$

où l'inconnue est la fonction $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et k est une constante appartenant à $\mathbb{R}$.

1. Trouver toutes les solutions de (1) lorsque $k = 0$.
2. On suppose $k \neq 0$. On considère une fonction $F(u, v)$ telle que

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0,$$

   et on pose $f(x, y) = F(x + y, x + ky)$. Montrer que f est solution de (1).

Exercice 4 [7 points + Bonus] On considère l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \text{pour tout } x \in [0, L] \text{ et } t \geqslant 0, \tag{2}$$

où $L > 0$ et $c > 0$ sont deux constantes. On impose les conditions aux limites :

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \qquad \text{pour tout } t \geqslant 0. \tag{3}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit
$$u_n(x,t) = e^{-n^2c^2\pi^2t/L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$
Montrer que u_n est solution de (2) et qu'elle vérifie les conditions aux limites (3).
2. On impose maintenant la condition initiale
$$u(x,0) = u_0(x), \qquad \text{pour tout } x \in [0,L] \tag{4}$$
et on suppose que u_0, après avoir été étendue sur $\mathbb{R}$ en la rendant impaire et $2L$-périodique, peut être décomposée en série de Fourier, c'est-à-dire qu'elle vérifie :
$$u_0(x) = \sum_{n\geqslant 1} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad \text{pour tout } x \in [0,L]$$
pour certains coefficients $b_n \in \mathbb{R}$ (que l'on ne demande pas de calculer). On suppose de plus que la série $\sum_{n\geqslant 1} |b_n|$ converge.
   (a) Montrer que la série de fonctions
$$u(x,t) = \sum_{n\geqslant 1} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2\pi^2c^2t/L^2} \tag{5}$$
   converge uniformément sur $[0,L] \times [0,+\infty[$.
   (b) On veut maintenant dériver cette série par rapport à la variable t. Montrer que la série des dérivées
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\partial}{\partial t}\left(b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2\pi^2c^2t/L^2}\right)$$
   converge uniformément sur $[0,L] \times [a,+\infty[$ pour tout $a > 0$.
   (c) En déduire que
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = c^2 \sum_{n\geqslant 1} b_n \frac{(-n^2)\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-c^2n^2\pi^2t/L^2}$$
   (d) On veut maintenant dériver deux fois la série de fonctions (5) par rapport à x. Calculer directement
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
   en intervertissant dérivée seconde et série sans avoir besoin d'appliquer le théorème de dérivation.
   (e) En déduire que la fonction u définie par (5) est solution de (2) et vérifie les conditions (3) et (4).

Formulaire

(1) Les coefficients de Fourier de f T-périodique continue par morceaux sont donnés par l'intégrale sur une période (a au choix, $\omega = \frac{2\pi}{T}$)
$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} \cos(n\omega x) f(x)dx, \qquad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} \sin(n\omega x) f(x)dx,$$
$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} e^{-in\omega x} f(x)dx.$$

(2) Si f est continue et C^1 par morceaux, alors on a pour $n \in \mathbb{N}^\star$:
$$a_n(f') = n\omega\, b_n(f), \qquad b_n(f') = -n\omega\, a_n(f).$$

(3) La formule de Parseval, valable pour f T-périodique continue par morceaux, s'écrit :
$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2.$$