Université Claude Bernard Lyon 1 PCSI L2 UE Mathématiques 4
Année 2022-2023 Séquence 2
27 mars 2023

Contrôle Continu 2

L'épreuve dure 1h30. Vous pouvez utiliser librement le formulaire au dos du sujet. Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés. On prendra soin de ***justifier*** *les réponses. Le sujet comporte cinq exercices indépendants. Des points bonus hors barème seront attribués dans la partie II qu'il est recommandé de traiter en dernier.*

Partie I (à rédiger sur une première copie)

Question de cours. [2 points] Énoncer le théorème de continuité des intégrales à paramètre avec hypothèse de domination.

Correction : Voir cours 6 sur la page du l'UE.

Exercice 1 [2 points] Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\sqrt{t}}{t^2(1+t^4)} dt$$

converge.

Correction : la fonction $f\colon t \mapsto \frac{t\sqrt{t}}{t^2(1+t^4)} = \frac{1}{\sqrt{t}(1+t^4)}$ est bien continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$. Montrer la convergence de l'intégrale revient donc à montrer sa convergence en 0^+ et en $+\infty$.

En 0^+, quand $t \to 0^+$, $f(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^\alpha} \geq 0$ avec $\alpha = 1/2 < 1$: le théorème de comparaison II du cours et le critère de Riemann en 0 assurent donc la convergence de l'intégrale en 0.

En $+\infty$, quand $t \to +\infty$, on a $f(t) \sim \frac{1}{t^\alpha} \geq 0$ avec $\alpha = \frac{9}{2} > 1$: le théorème de comparaison II du cours et le critère de Riemann en $+\infty$ assurent donc la convergence de l'intégrale en $+\infty$.

Au bilan, on a bien montré la convergence de cette intégrale.

Remarque : toute méthode qui écrit $\int_0^{+\infty} f(t)\ dt = ...$ avant d'avoir montré la convergence est incorrecte.

Exercice 2 [6 points] On s'intéresse à l'intégrale à paramètre

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt\,.$$

1. Soit $x \geq 0$ fixé. Montrer que l'intégrale converge, autrement dit, que $F(x)$ est bien défini.
2. Pour tout $x \geq 0$, montrer que $F'(x)$ existe et est donnée par

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} dt\,.$$

   Justifier soigneusement votre réponse.
3. Calculer explicitement $F'(x)$.
   Indication *: on pourra utiliser la formule* $\cos(s) = \frac{e^{is}+e^{-is}}{2}$.
4. Déterminer $F(0)$, puis $F(x)$ pour tout $x \geq 0$.

Correction :
1. Pour tout $x \geq 0$ et $t > 0$, on pose $f(x,t) = \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}$. Soit $x \geq 0$ fixé. La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$. Pour $x = 0$, on intègre la fonction nulle et l'intégrale est alors clairement convergente. Supposons dorénavant qu'on est dans le cas restant $x > 0$. En 0^+, on a quand $t \to 0^+$, $f(t) = \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t} \sim \frac{xt}{t} = x$ (attention, cet argument est faux pour $x = 0$, car on écrirait alors "équivalent à 0"...). La fonction $t \mapsto x \geq 0$ étant clairement intégrable en 0^+, le théorème de comparaison II assure que l'intégrale de la question est convergente en 0^+. Maintenant en $+\infty$, on a pour tout $t \geq 1$ que

$$|f(x,t)| \leq \frac{|\sin(xt)|}{t} e^{-t} \leq e^{-t}$$

et la fonction $t \mapsto e^{-t}$ étant l'une des fonctions de référence dont l'intégrale converge en $+\infty$, le théorème de comparaison I assure que l'intégrale de la question converge aussi en $+\infty$, ce qui conclut la preuve de la propriété demandée dans tous les cas.

2. On applique le théorème de dérivation des intégrales à paramètre. Soit $x_0 > 0$. Tout d'abord, la fonction f introduite ci-dessus est bien de classe C^1 sur $[0, x_0] \times]0, +\infty[$ (i.e. $x \in [0, x_0]$ et $t \in]0, +\infty[$). Reste à obtenir des dominations de f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ intégrables en t et indépendantes de x dans ces intervalles. On écrit en utilisant $|\sin(y)| \leq |y|$ pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$|f(x,t)| \leq \frac{|\sin(xt)|e^{-t}}{t} \leq xe^{-t} \leq x_0 e^{-t} := \phi_0(t)\,,$$

et avec $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \cos(xt)e^{-t}$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq |\cos(xt)|e^{-t} \leq e^{-t} := \phi_1(t)\,,$$

$x \in [0, x_0]$ et $t \in]0, +\infty[$. Les fonctions ϕ_0 et ϕ_1 sont bien intégrables en t sur $]0, +\infty[$ et indépendantes de x. D'où le théorème des dérivation s'applique et donne que F est de classe C^1 sur $[0, x_0]$ avec

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt\,,$$

ce qui donne bien la formule proposée. Comme $x_0 > 0$ est quelconque, ceci conclut la preuve du résultat demandé.

Remarque : en invoquant que $t \mapsto f(x,t)$ est **intégrable** pour tout x par la question 1, on pouvait se contenter de la majoration utilisant ϕ_1 et se passer de celle utilisant ϕ_0 un peu plus technique, se passant ainsi de x_0 (voir théorème 0.5 au lieu du théorème 0.2 utilisé ci-dessus, références du cours 6).

3. On écrit d'abord sous réserve de convergence de chacune des intégrales (vérifié ensuite dans le calcul)

$$\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} e^{ixt}e^{-t}dt + \int_0^{+\infty} e^{-ixt}e^{-t}dt\right)$$

avec

$$\int_0^{+\infty} e^{ixt}e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} e^{t(ix-1)}dt = \left[\frac{e^{t(ix-1)}}{ix-1}\right]_0^{+\infty} = 0 - \frac{1}{ix-1} = \frac{1}{1-ix}\,,$$

et

$$\int_0^{+\infty} e^{-ixt}e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} e^{t(-ix-1)}dt = \left[\frac{e^{t(-ix-1)}}{-ix-1}\right]_0^{+\infty} = 0 - \frac{1}{-ix-1} = \frac{1}{1+ix}\,,$$

si bien qu'on a

$$\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}dt = \frac{1}{2} \times \frac{1+ix+1-ix}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Le seule partie un peu inhabituelle est de trouver zéro quand $t \to +\infty$ à partir des crochets ci-dessus ; on a bien en effet par encadrement

$$0 \leq |e^{t(\pm ix-1)}| = |e^{\pm itx}|e^{-t} = e^{-t} \to 0$$

quand $t \to +\infty$.

4. Clairement, on a $F(0) = \int_0^{+\infty} 0\ dt = 0 = \arctan(0)$ et comme $F'(x) = \arctan'(x)$ pour tout $x \geq 0$, on en déduit que $F(x) = \arctan(x)$ pour tout $x \geq 0$.

Formulaire

(1) Les coefficients de Fourier de f T-périodique continue par morceaux sont donnés par l'intégrale sur une période (a au choix, $\omega = \frac{2\pi}{T}$)

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} \cos(n\omega x)f(x)dx, \qquad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} \sin(n\omega x)f(x)dx,$$

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} e^{-in\omega x}f(x)dx.$$

(2) Si f est continue et C^1 par morceaux, alors on a pour $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$a_n(f') = n\omega \, b_n(f), \qquad b_n(f') = -n\omega \, a_n(f).$$

(3) La formule de Parseval, valable pour f T-périodique continue par morceaux, s'écrit :

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2.$$