Université Claude Bernard Lyon 1 PCSI L2 UE Mathématiques 4
Année universitaire 2022-2023
15 mai 2023

Contrôle final

L'épreuve dure 2h00. Vous pouvez utiliser librement le formulaire en fin de sujet. Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés. Sauf mention explicite du contraire, on prendra soin de ***justifier*** *les réponses.*

Questions de cours. (2 points) Soit δ_0 la mesure de Dirac sur $\mathbb{R}$.

1. Donner la transformée de Fourier $\widehat{\delta_0}$ de δ_0.
2. Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, déterminer la convolée $f * \delta_0$ de f avec δ_0.

Correction. Les réponses à ces questions sont dans le cours 7 (p. 5).
1. On a $\widehat{\delta_0}(p) = 1$ pour tout $p \in \mathbb{R}$.
2. On a $f * \delta_0 = f$.

Exercice 1 (6 points). En utilisant la transformée de Laplace, trouver la solution $f\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$f''(t) - 2f'(t) + 2f(t) = 5e^{-t}$$

avec les conditions initiales $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

Correction.
1. On cherche tout d'abord une formule pour la transformée de Laplace de la solution f cherchée. D'après la formule (8) du formulaire, on obtient pour f que $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$. Appliquant cette formule à f', on obtient

$$\mathcal{L}[f''](s) = s\mathcal{L}[f'](s) - f'(0) = s^2\mathcal{L}[f](s) - sf(0) - f'(0)\,.$$

Prenant alors la transformée de Laplace de l'équation différentielle considérée, on obtient

$$\mathcal{L}[f'' - 2f' + 2f](s) = 5\mathcal{L}[e^{-t}](s) = \frac{5}{s+1}$$

$$\iff (s^2 - 2s + 2)\mathcal{L}[f](s) = sf(0) + f'(0) - 2f(0) + \frac{5}{s+1} = s - 2 + \frac{5}{s+1} = \frac{s^2 - s + 3}{s+1}$$

$$\iff \mathcal{L}[f](s) = \frac{s^2 - s + 3}{(s+1)(s^2 - 2s + 2)}\,.$$

2. On effectue maintenant la décomposition en éléments simples de la fractions rationnelle $Y(s) = \frac{s^2-s+3}{(s+1)(s^2-2s+2)} = \frac{p(s)}{q(s)}$, avec $q(s) = (s+1)((s-1)^2+1) = (s+1)(s-1-i)(s-1+i)$. Comme $\deg(p) < \deg(p)$, le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ (voir aussi le formulaire) assure qu'il existe des nombres réels a, b, c (autant que le degré du dénominateur) uniques tels que

$$\frac{s^2 - s + 3}{(s+1)((s-1)^2 + 1)} = \frac{a}{s+1} + \frac{bs + c}{(s-1)^2 + 1}\,. \tag{$\star$}$$

Multipliant ($\star$) par $(s+1)$, on obtient

$$\frac{s^2 - s + 3}{(s-1)^2 + 1} = a + (s+1)\left(\frac{bs + c}{(s-1)^2 + 1}\right)\,.$$

NB. Contrairement à ($\star$), cette nouvelle relation est évaluable en -1 qui n'y est jamais pôle.
Évaluant donc en $s = -1$, on obtient $\boxed{a = 1}$. Multipliant maintenant ($\star$) par $(s-1)^2 + 1$, on obtient

$$\frac{s^2 - s + 3}{s+1} = c + bs + ((s-1)^2 + 1)\left(\frac{a}{s+1}\right)\,.$$

Évaluant alors en $1 + i$, on obtient

$$1 = (c + b) + bi\,,$$

car $(1+i)^2-(1+i)+3=i+2$. Comme c et b sont réels, on en déduit par identification des parties réelles et imaginaires que $\boxed{b=0 \text{ et } c=1}$. Revenant à $(\star)$, on en déduit finalement que

$$\frac{s^2-s+3}{(s+1)(s^2-2s+2)}=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s^2-2s+2}\,.$$

3. On identifie maintenant la solution f telle que $\mathcal{L}[f](s)=\frac{s^2-s+3}{(s+1)((s-1)^2+1)}$ en utilisant si besoin le formulaire. On tire de la décomposition en éléments simples que f donnée par $f(t)=e^{-t}+e^t\sin t$ convient.

Exercice 2 (7 points). Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, paire et telle que

$$f(x)=2x-\pi \qquad \text{sur } [0,\pi].$$

1. Dessiner le graphe de f sur $[-3\pi,3\pi]$ et exprimer $f(x)$ sur $[\pi,2\pi]$.
2. Déterminer la série de Fourier de f. Quand cette série converge en x, on note sa somme $Sf(x)$.
3. Pour quelles valeurs de x peut-on écrire $Sf(x)=f(x)$?
4. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0}\frac{1}{(2p+1)^2}$.
5. En déduire également la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0}\frac{1}{(2p+1)^4}$.

Correction. Voir TD3A, exercice 2 et corrigé.

Exercice 3 (5 points). On cherche une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fois dérivable, intégrable et solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$-f''(x)+f(x)=e^{-2|x|}. \tag{E}$$

1. Montrer que la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f satisfait

$$\widehat{f}(p)=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{1+p^2}-\frac{1}{4+p^2}\right).$$

2. En déduire f.

Correction. Voir TD9, exercice 5 et son corrigé.

Formulaire pour l'UE Mathématiques 4

(1) Les coefficients de Fourier de f T-périodique continue par morceaux sont donnés par l'intégrale sur une période (a au choix, $\omega = \frac{2\pi}{T}$)

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} \cos(n\omega x) f(x)dx, \qquad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} \sin(n\omega x) f(x)dx,$$

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} e^{-in\omega x} f(x)dx.$$

(2) Si f est continue et C^1 par morceaux, alors on a pour $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$a_n(f') = n\omega\ b_n(f), \qquad b_n(f') = -n\omega\ a_n(f).$$

(3) La formule de Parseval, valable pour f T-périodique continue par morceaux, s'écrit :

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2.$$

(4) La transformée de Fourier de f est donnée par

$$\hat{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} f(x)dx.$$

(5) Formule d'inversion s'écrit $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(p)e^{ipx}dp$.

(6) Le produit de convolution est donné par $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$.

(7) La formule de Plancherel s'écrit $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(p)|^2 dp$.

(8) Transformée de Laplace de $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ est donnée par $\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$. On pourra aussi utiliser librement l'identité $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$.

Transformées de Fourier usuelles

	$f(x)$	$\hat{f}(p) = \mathcal{F}[f](p)$
(9)	$g_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \sigma > 0$	$e^{-\frac{p^2\sigma^2}{2}}$
(10)	$\frac{c}{c^2+x^2}, c > 0$	$\pi e^{-c\|p\|}$
(11)	$h(sx), s > 0$	$\frac{1}{s}\hat{h}(\frac{p}{s})$
(12)	$\frac{1}{s}h(\frac{x}{s}), s > 0$	$\hat{h}(sp)$
(13)	$h(x-a), a > 0$	$e^{-ipa}\hat{h}(p)$

Transformées de Laplace usuelles

(14)	$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
(15)	$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ pour $s > a$
(16)	$e^{at}\cos(\omega t), \omega > 0, a \in \mathbb{R}$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+\omega^2}$ pour $s > a$
(17)	$e^{at}\sin(\omega t), \omega > 0, a \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$ pour $s > a$
(18)	$e^{at}h(t), a > 0$	$\mathcal{L}[h](s-a)$

Décomposition en éléments simples complexe de $Y(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$**,** avec $q(s) = a(s-s_1)^{m_1}\cdots(s-s_k)^{m_k}$ et $\deg(p) < \deg(q)$ est de la forme :

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(s-s_i)^j},$$

avec pour $1 \leqslant j \leqslant m_i$:

$$a_{i,j} = \frac{1}{(m_i-j)!}\left[\frac{d^{(m_i-j)}}{ds^{(m_i-j)}}(Y(s)(s-s_i)^{m_i})\right]_{s=s_i}.$$

Dans ce cas, $a_{i,1}$ est le résidu de Y en s_i.

Décomposition réelle. Si $q(s) = a(s-s_1)^{m_1}\cdots(s-s_l)^{m_l}((s-a_1)^2+b_1^2)^{n_1}\cdots((s-a_\lambda)^2+b_\lambda^2)^{n_\lambda}$, pour s_i, a_i, b_i réels, et Y comme ci-dessus, il existe des réels $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}$ uniques tels que

$$Y(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(s-s_i)^j} + \sum_{i=1}^{\lambda}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{c_{i,j}+sd_{i,j}}{(((s-a_i)^2+b_i^2))^j}.$$