Correction Partie I CC1 | 06/03/23

Exercice 1 :

1) On a les $DL_1(0)$:

$$\begin{cases} \cos(x) = 1 + \underset{x\to 0}{o}(x) \\ \sin(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x) \\ \exp(x) = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x) \end{cases}$$

qui donnent

$$\frac{1-\cos(x)+\sin(x)}{e^x-1} = \frac{x+\underset{x\to 0}{o}(x)}{x+\underset{x\to 0}{o}(x)}$$

$$= \frac{1+\underset{x\to 0}{o}(1)}{1+\underset{x\to 0}{o}(1)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1.$$

2) Pour $x>1$, on a

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = e^{x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$$

avec $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)$

Or $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\frac{2}{x-1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$,

donc $\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{x-1}$.

Il suit $x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2x}{x-1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 2$.

Comme exp est continue sur $\mathbb{R}$, on obtient que

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^2.$$

Exercice 2 :

1) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$f_n(1) = e^{-2}$$

donc $f_n(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-2}$.

Soit $x \in [0,1[$. On a $x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc

$$f_n(x) = x^n e^{-2x^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \times e^0 = 0$$

par continuité de exp sur $\mathbb{R}$. Ainsi: $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement* vers (* sur $[0,1]$)

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[, \\ e^{-2} & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

2) Comme $e^{-2} \neq 0$, la fonction f n'est pas continue en 1. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0,1]$ comme composée et produit de exp et fonctions polynomiales continues sur $[0,1]$.
D'après le cours, si $(f_n)_{n\geq 1}$ convergeait uniformément vers f sur $[0,1]$, alors f serait continue sur $[0,1]$, ce qui n'est pas.
Ainsi: $(f_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas uniformément vers f.

3) Pour tout $x \in [0,1[$,
$$f(x) - f_n(x) = -x^n e^{-2x^n}$$

et $$\frac{d}{dx}\left(f(x)-f_n(x)\right) = -n x^{n-1} e^{-2x^n} - x^n(-2nx^{n-1}) e^{-2x^n}$$
$$= -n x^{n-1} e^{-2x^n}(1-2x^n)$$

On a $n x^{n-1} e^{-2x^n} \geq 0$ donc $(f-f_n)'$ est du signe de $2x^n - 1$.
On a $2x^n - 1 \geq 0 \iff 2x^n \geq 1$
$\iff x^n \geq 1/2$
$\iff x \geq \sqrt[n]{1/2}$,

d'où le tableau de variations suivant.

x	0		$\sqrt[n]{\frac{1}{2}}$		1
$2x^n-1$		$-$	0	$+$	$\Vert$
$f-f_n$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}e^{-1}$	$\nearrow$	$-e^{-2}$ $\Vert$

On a $0 < \sqrt[n]{\frac{1}{2}} < 1$.

car $(f-f_n)(0) = f(0) - f_n(0) = 0$

$$(f-f_n)\left(\sqrt[n]{\tfrac{1}{2}}\right) = -\left(\sqrt[n]{\tfrac{1}{2}}\right)^n e^{-2\left(\sqrt[n]{1/2}\right)^n}$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}e^{-1}$$

$$\lim_{x\to 1^-} (f-f_n)(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) - \lim_{x\to 1^-} f_n(x)$$

$$= 0 - e^{-2}$$

Par ailleurs, on a $(f-f_n)(1) = f(1) - f_n(1) = 0$.

4) Soit a dans $[0,1[$. On a $\sqrt[n]{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq N$, $a < \sqrt[n]{1/2}$. D'après la question 3) on obtient les variations pour $n \geq N$:

x	0		a
$f-f_n$	0	$\searrow$	$-a^n e^{-2a^n}$

car $(f-f_n)(a) = -f_n(a) = -a^n e^{-2a^n}$.

Il suit que

$$\sup_{x\in[0,a]} |f(x)-f_n(x)| = a^n e^{-2a^n}$$

Comme $|a|<1$, on a $a^n e^{-2a^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[0,a]$.

Remarques importantes :

Exercice 1, question 2 :

$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}$ → la variable dans l'exposant suggère le passage à la forme exp.

$\exp\left(x\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)\right)$: On a $x\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2x}{x-1}$

mais on ne peut pas en déduire l'équivalence avec $\exp\left(\frac{2x}{x-1}\right)$ car on n'a pas toujours :
$f(x)\underset{x\to a}{\sim} g(x)$ implique $h(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} h(g(x))$.

Ici, il faut déterminer la limite sans exp :

$$x\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 2$$

Comme cette limite est finie on conclut par continuité.

Exercice 2, question 1 : Les puissances comparées comparent x^n et e^x à l'infini :

$x^n \underset{+\infty}{\lll} e^x$ ou $x^n/e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Ici $|x|<1$

donc $x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $e^{-2x^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, il n'y a pas de lien avec les puissances comparées.