

Exercice 1:

1) On a les DL<sub>2</sub>(0):

$$\begin{cases} \cos(x) = 1 + o(x) \\ \sin(x) = x + o(x) \\ \exp(x) = 1 + x + o(x) \end{cases}$$

qui donnent

$$\frac{1 - \cos(x) + \sin(x)}{e^x - 1} = \frac{x + o(x)}{x + o(x)}$$

$$= \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$$

2) Pour  $x > 1$ , on a

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = e^{x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$$

avec  $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)$

Or  $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  et  $\frac{2}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ ,

donc  $\ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{x-1}$ .

Il suit  $x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2x}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2$ .

Comme  $\exp$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , on obtient que

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^2.$$

Exercice 2:

1) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

donc  $f_n(1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} e^{-2}$ .

Soit  $x \in [0, 1[$ . On a  $x^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$  donc

$$f_m(x) = x^m e^{-2x^m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \times e^0 = 0$$

par continuité de exp sur  $\mathbb{R}$ . d'lim:  $(f_m)_{m \geq 1}$   
converge simplement\* vers  $f$  (\* sur  $[0, 1]$ )

$$f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[, \\ e^{-2} & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

2) Comme  $e^{-2} \neq 0$ , la fonction  $f$  n'est pas continue en 1. Or, pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_m$  est continue sur  $[0, 1]$  comme composée et produit de exp et fonctions polynomiales continues sur  $[0, 1]$ .  
D'après le cours, si  $(f_m)_{m \geq 1}$  convergait uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ , alors  $f$  serait continue sur  $[0, 1]$ , ce qui n'est pas.  
d'lim:  $(f_m)_{m \geq 1}$  ne converge pas uniformément vers  $f$ .

3) Pour tout  $x \in [0, 1[$ ,

$$f(x) - f_m(x) = -x^m e^{-2x^m}$$

$$\text{et } \frac{d}{dx} (f(x) - f_m(x)) = -m x^{m-1} e^{-2x^m} - x^m (-2m x^{m-1}) e^{-2x^m}$$

$$= -m x^{m-1} e^{-2x^m} (1 - 2x^m)$$

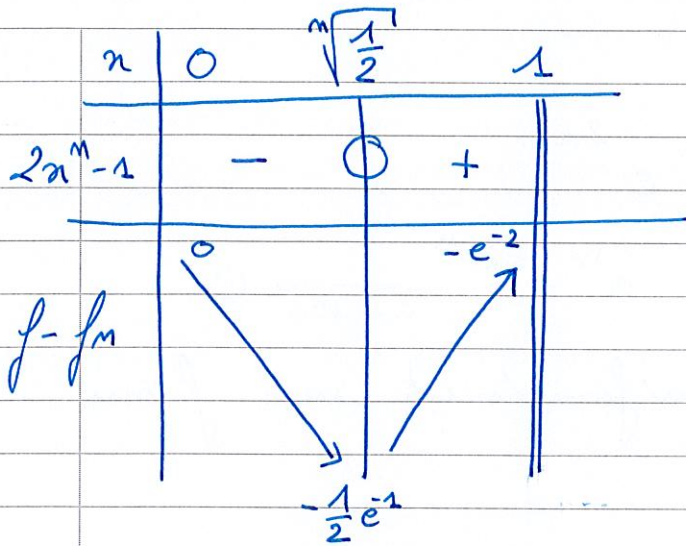
On a  $m x^{m-1} e^{-2x^m} \geq 0$  donc  $(f - f_m)'$  est du signe de  $2x^m - 1$ .

$$\text{On a } 2x^m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^m \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x^m \geq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \geq \sqrt[m]{\frac{1}{2}},$$

d'où le tableau de variations suivant.



On a  $0 < \sqrt[m]{\frac{1}{2}} < 1$ .

car  $(f - f_m)(0) = f(0) - f_m(0) = 0$

$$(f - f_m)\left(\sqrt[m]{\frac{1}{2}}\right) = -\left(\sqrt[m]{\frac{1}{2}}\right)^m e^{-2\left(\sqrt[m]{\frac{1}{2}}\right)^m}$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2 \cdot \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} e^{-1}$$

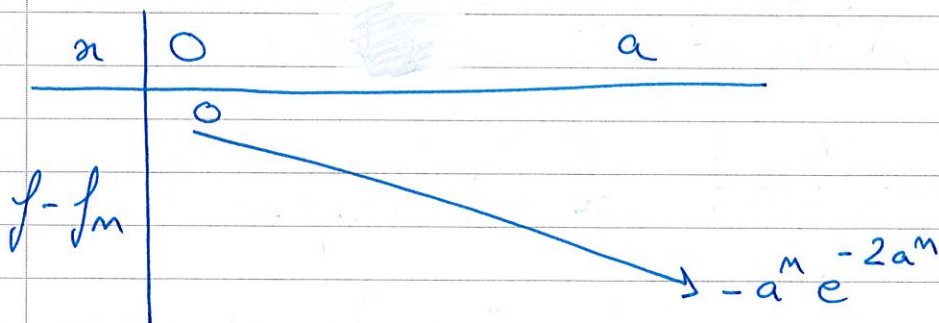
$$\lim_{n \rightarrow 1^-} (f - f_m)(x) = \lim_{n \rightarrow 1^-} f(x) - \lim_{n \rightarrow 1^-} f_m(x)$$

$$= 0 - e^{-2}$$

Pour ailleurs, on a  $(f - f_m)(1) = f(1) - f_m(1) = 0$ .

4) Soit  $a$  dans  $[0, 1[$ . On a  $\sqrt[m]{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{m}} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1$ .

Donc il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $a < \sqrt[m]{\frac{1}{2}}$ . D'après la question 3) on obtient les variations pour  $n \geq N$ :



car  $(f - f_m)(a) = -f_m(a) = -a^m e^{-2a^m}$ .

Il mit que

$$\sup_{x \in [0, a]} |f(x) - f_n(x)| = a^m e^{-2a^m}$$

Comme  $|a| < 1$ , on a  $a^m e^{-2a^m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$

Donc  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, a]$ .

Remarques importantes:

Exercice 1, question 2:

$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x \rightarrow$  la variable dans l'exposant suggère le passage à la forme exp.

$$\exp\left(x \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)\right): \text{ On a } x \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2x}{x-1}$$

mais on ne peut pas en déduire l'équivalence avec  $\exp\left(\frac{2x}{x-1}\right)$  car on n'a pas toujours:  
 $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  implique  $\ln(f(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ln(g(x))$ .

Ici, il faut déterminer la limite sans exp:

$$x \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2$$

Comme cette limite est finie on conclut par continuité.

Exercice 2, question 1: Les puissances comparées  
comparent  $x^m$  et  $e^x$  à l'infini:

$$x^m \ll_{+\infty} e^x \text{ ou } \frac{x^m}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0. \text{ Ici } |x| < 1$$

donc  $x^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$  et  $e^{-2x^m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1$ , il n'y a pas de lien avec les puissances comparées.