Université Claude Bernard Lyon 1 PCSI L2 UE Mathématiques 4
Année 2022-2023 Séquence 1
27 mars 2023

Corrigé du Contrôle Continu 2

L'épreuve dure 1h30. Vous pouvez utiliser librement le formulaire au dos du sujet. Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés. On prendra soin de ***justifier*** *les réponses. Le sujet comporte quatre exercices indépendants. Des points bonus hors barème seront attribués dans la partie II qu'il est recommandé de traiter en dernier.*

Partie I (à rédiger sur une première copie)

Question de cours. [2 points] Énoncer précisément un résultat du cours donnant la convergence d'une intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ au moyen d'un équivalent de $f(t)$ quand $t \to +\infty$, pour $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue.

Exercice 1 [2 points] Montrer que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} (1+t)\sin\left(\frac{1}{t^3}\right) dt$$

converge.

Correction de l'exercice 1. La fonction $f\colon t \mapsto (1+t)\sin\left(\frac{1}{t^3}\right)$ est continue (par morceaux) sur $[1,+\infty[$ (pas de problème de convergence de l'intégrale en 1). On a d'autre part que, quand $t \to +\infty$, $\frac{1}{t^3} \to 0$ et donc $\sin\left(\frac{1}{t^3}\right) \sim \frac{1}{t^3}$, si bien que $f(t) \sim \frac{1}{t^\alpha} := g(t) \geq 0$ pour $\alpha = 2$. Par théorème de comparaison II (question de cours), comme $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ converge (en $+\infty$) par critère de Riemann en $+\infty$ ($\alpha > 1$), $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge également, ce qui conclut.

Exercice 2 [6 points] On s'intéresse à l'intégrale à paramètre

$$G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt\,.$$

1. Soit $x \geq 0$ fixé. Montrer que l'intégrale converge, autrement dit, que $G(x)$ est bien défini.
2. Soit $x_0 > 0$ fixé. Montrer que, pour tout $x \geq x_0$, $G''(x)$ existe et est donnée par

$$G''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}dt\,.$$

   Justifier soigneusement votre réponse.
3. En déduire que G est solution de l'équation différentielle

$$G''(x) + G(x) = \frac{1}{x}$$

   sur $]0,+\infty[$.

Correction de l'exercice 2.
On pose

$$f(x,t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}.$$

1. Soit $x \geq 0$ fixé.

Méthode 1. La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$. D'autre part, comme $x \geq 0$ et $t \geq 0$, on utilise que que l'exponentielle est croissante pour noter

$$0 \leq e^{-xt} \leq e^0 = 1.$$

On obtient donc la majoration de l'intégrande :

$$\left|\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\right| \leq \frac{1}{1+t^2} =: g(t).$$

Or

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} < +\infty\,,$$

donc l'intégrande est dominée par une fonction g intégrable sur $[0,+\infty[$. Par le théorème de domination, on déduit que $f(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Méthode 2. On va traiter séparément la convergence en 0 et en $+\infty$.

En 0, $f(x,t)$ est continue en t avec valeur (limite) $f(x,0)=1$ donc il n'y a pas de problème de convergence.

En $+\infty$, on peut distinguer deux cas.
Si $\mathbf{x > 0}$, on $|t^2 f(x,t)| \leq e^{-xt} \to_{t\to+\infty} 0$ donc $f(x,t) = o(\frac{1}{t^2})$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ (attention, pas $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$) est une intégrale de RIEMANN convergente avec $\alpha = 2 > 1$ donc par le théorème de domination, $f(x,t)$ est intégrale en $+\infty$
ATTENTION, ce raisonnement ne fonctionne pas en $x=0$. Car $f(0,t) = \frac{1}{1+t^2} \sim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2}$ (donc ce n'est pas un $o(\frac{1}{t^2})$). On a déjà vu sa convergence explicitement à la méthode 1, ou bien on peut dire que
Si $\mathbf{x = 0}$, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de RIEMANN convergente avec $\alpha = 2 > 1$ donc cette fois ci par équivalence, $f(x,t) \sim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$.
Remarque : on peut rassembler les deux cas en disant $f(x,t) = O(\frac{1}{t^2})$.

2. On va utiliser le théorème de dérivation successive : d'abord f est bien C^2 (même C^∞) comme quotient d'une exponentielle (de polynôme) et d'un polynôme à dénominateur non nul. On calcule ses 2 premières dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{-te^{-xt}}{1+t^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}.$$

On domine chacune des dérivées et la fonction (en fait avec le résultat optimal du cours, on a besoin de dominer seulement la plus haute dérivée et de la convergence vue à la question 1), **pour $\mathbf{x \geq x_0}, t \geq 0$** (ATTENTION la dernière inégalité avec h est fausse si on a seulement $x > 0$)

$$|f(x,t)| = \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2} =: g(t).$$
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{te^{-xt}}{1+t^2} \leq e^{-xt} \leq e^{-x_0 t} =: h(t),$$
$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| = \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} \leq e^{-xt} \leq e^{-x_0 t} = h(t).$$

On a utilisé l'inégalité simple $t^2 \leq 1+t^2$ à la dernière ligne et l'inégalité $t \leq 2t \leq 1+t^2$ (inégalité arithmético-géométrique car $1+t^2-2t = (1-t)^2 \geq 0$).

Il est crucial que les dominations g, h NE DÉPENDENT PAS DU PARAMÈTRE $x \geq x_0$ et soient INTÉGRABLES. On l'a déjà vu à la partie 1 pour g et on sait par le cours que $\int_0^{+\infty} h(t)dt = 1/x_0$ (intégrale de référence). [1]

Par le théorème de dérivation successive des intégrales à paramètre, G est donc C^2 sur $[x_0,+\infty[$ de dérivée seconde

$$G''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt\,.$$

3. En calculant par linéarité de l'intégrale :

$$G''(x) + G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt} + e^{-xt}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}.$$

1. ATTENTION, si vous prenez un équivalent ou une domination de la fonction qui dépend de x par exemple en disant $e^{-xt} =_{t\to+\infty} o(1/t^2)$ cela veut dire que pour $t \geq t_0(x)$ la fonction est dominée par $\frac{1}{t^2}$. Vous définissez donc par exemple la fonction $h(t) = \min(\frac{1}{t^2}, \frac{1}{t^2(x)})$ et vous dominez par cette fonction mais elle dépend de x. Elle ne convient pas comme domination.

pour $x \geq x_0 > 0$ en utilisant l'intégrale de référence du cours. Comme $x_0 > 0$ peut être arbitrairement petit, cela conclut.

Partie II (à rédiger sur une seconde copie)

Exercice 3 [10 points + Bonus] On considère l'équation des ondes sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ suivante, qui modélise la propagation d'une onde sur une corde infinie avec une vitesse $c = 1$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pour tout } (x,t) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[\tag{1}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2}$$

où les fonctions u_0 et u_1 sont respectivement, l'état et la vitesse initiale.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n(x,t) = \cos(nt)\cos(nx), \;\; v_n(x,t) = \cos(nt)\sin(nx).$$

Montrer que u_n et v_n sont des solutions de l'équation (1).

On suppose dans le reste de l'exercice que u_0 est 2π-périodique, paire et vérifie

$$u_0(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{\pi}{2}x^2 \quad \text{pour tout } x \in [0, \pi].$$

2. Montrer que la série de Fourier de u_0 est donnée par

$$\frac{-\pi^3}{12} + \sum_{n \geq 1} \frac{4(1-(-1)^n)}{\pi n^4} \cos(nx).$$

$\big[$*Indication : pour le calcul des coefficients, utiliser des IPP successives dont la première est* $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{\pi}{2}x^2$ *et* $g(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$.$\big]$

On pose dans le reste de l'exercice, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$

$$u(x,t) = \sum_{n \geq 0} \cos(nt)\Big(A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)\Big). \tag{3}$$

3. Déterminer A_n et B_n pour que $u(x,0) = u_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On pose dans le reste de l'exercice pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$

$$f_n(x,t) = \cos(nt)\Big(A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)\Big).$$

où A_n et B_n sont les coefficents trouvés à la question précédente.

4. Montrer que les séries des dérivées suivantes convergent uniformément sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\partial f_n}{\partial t}(x,t), \; \sum_{n \geq 0} \frac{\partial^2 f_n}{\partial t^2}(x,t)$$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\partial f_n}{\partial x}(x,t), \; \sum_{n \geq 0} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}(x,t).$$

$\big[$*Déterminer une suite réelle positive* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que la série* $\sum_n w_n$ *soit convergente et telle que pour* $g \in \{\frac{\partial f_n}{\partial t}, \frac{\partial^2 f_n}{\partial t^2}, \frac{\partial f_n}{\partial x}, \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}\}$, $|g(x,t)| \leq w_n$ *pour tout* $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$. $\big]$

5. Montrer que pour pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[$ on a :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n\geq 0} \frac{\partial f_n}{\partial t}(x,t), \ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \sum_{n\geq 0} \frac{\partial^2 f_n}{\partial t^2}(x,t),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \sum_{n\geq 0} \frac{\partial f_n}{\partial x}(x,t), \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \sum_{n\geq 0} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}(x,t).$$

6. Montrer que $u(x,t)$ donnée en (3) est solution de (1) et vérifie la condition initiale $u(x,0) = u_0(x)$.
7. Que peut-on dire sur $u_1(x)$?

Corrigé de l'exercice 3.

1. Les fonctions u_n et v_n sont de classe C^∞ et on a

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t) = -n\sin(nt)\cos(nx), \quad \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}(x,t) = -n^2\cos(nt)\cos(nx)$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,t) = -n\cos(nt)\sin(nx), \quad \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x,t) = -n^2\cos(nt)\cos(nx)$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial t}(x,t) = -n\sin(nt)\sin(nx), \quad \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}(x,t) = -n^2\cos(nt)\sin(nx)$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial x}(x,t) = n\cos(nt)\cos(nx), \quad \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}(x,t) = -n^2\cos(nt)\sin(nx)$$

et donc

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = -n^2\cos(nt)\cos(nx) - (-n^2\cos(nt)\cos(nx)) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} = -n^2\cos(nt)\sin(nx) - (-n^2\cos(nt)\sin(nx)) = 0$$

ce qui montre bien que u_n et v_n sont des solutions de (1).

2. Comme u_0 est paire, $b_n = 0$ et on calcule a_0 et a_n pour tout $n \geq 1$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_0(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\frac{1}{3}x^3 - \frac{\pi}{2}x^2)\,dx = \frac{2}{\pi}\Big[\frac{1}{12}x^4 - \frac{\pi}{6}x^3\Big]_0^{\pi} = \frac{-\pi^3}{6}.$$

Pour tout $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_0(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\frac{1}{3}x^3 - \frac{\pi}{2}x^2)\cos(nx)\,dx$$

et en appliquant une première IPP

$$a_n = \frac{2}{\pi n}\Big[(\frac{1}{12}x^4 - \frac{\pi}{6}x^3)\sin(nx)\Big]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}(x^2 - \pi x)\sin(nx)\,dx = -\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}(x^2 - \pi x)\sin(nx)\,dx.$$

Une seconde IPP, nous donne

$$a_n = \frac{-2}{\pi n^2}\Big[-(x^2 - \pi x)\cos(nx)\Big]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n^2}\int_0^{\pi}(2x - \pi)\cos(nx)\,dx = -\frac{2}{\pi n^2}\int_0^{\pi}(2x - \pi)\cos(nx)\,dx.$$

Une dernière IPP nous donne

$$a_n = \frac{-2}{\pi n^3}\Big[(2x - \pi)\sin(nx)\Big]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n^3}\int_0^{\pi} 2\sin(nx)\,dx = \frac{4}{\pi n^3}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx = \frac{4}{\pi n^3}\Big[\frac{-\cos(nx)}{n}\Big]_0^{\pi}$$

$$= \frac{4(1 - (-1)^n)}{\pi n^4}.$$

Donc la série de Fourier est bien

$$\frac{-\pi^3}{12} + \sum_{n\geq 1} \frac{4(1-(-1)^n)}{\pi n^4} \cos(nx).$$

3. Pour $t = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$u(x,0) = \sum_{n\geq 0} \Big(A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx) \Big).$$

D'où $u(x,0) = u_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\sum_{n\geq 0} \Big(A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx) \Big) = \frac{-\pi^3}{12} + \sum_{n\geq 1} \frac{4(1-(-1)^n)}{\pi n^4} \cos(nx).$$

Comme u_0 est de classe C^1 par morecaux, d'après le théorème de Dirichlet, la convergence de la série de Fourier est normale et donc le développement en série de Fourier de u_0 est unique. On conclut :

$$B_n = 0, \text{ pour tout } n \geq 1, A_0 = \frac{-\pi^3}{12},\ A_n = \frac{4(1-(-1)^n)}{\pi n^4}, \text{ pour tout } n \geq 1.$$

D'où

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 0} A_n \cos(nt)\cos(nx).$$

4. On a $f_n(x,t) = A_n \cos(nt)\cos(nx)$ pour tout $n \geq 0$ et $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[$. Ce sont des fonctions de classe C^∞ et on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_n}{\partial t}(x,t) &= -nA_n \sin(nt)\cos(nx), & \frac{\partial^2 f_n}{\partial t^2}(x,t) &= -n^2 A_n \cos(nt)\cos(nx),\\
\frac{\partial f_n}{\partial x}(x,t) &= -nA_n \cos(nt)\sin(nx), & \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}(x,t) &= -n^2 A_n \cos(nt)\cos(nx).
\end{aligned}$$

D'où pour $g \in \{\frac{\partial f_n}{\partial t}, \frac{\partial^2 f_n}{\partial t^2}, \frac{\partial f_n}{\partial x}, \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}\}$ et pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[$

$$|g(x,t)| \leq n^2 |A_n| \leq \frac{4|(1-(-1)^n)|}{\pi n^2} \leq \frac{8}{\pi n^2}.$$

et donc pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[$

$$|g(x,t)| = O(\frac{1}{n^2}).$$

Par conséquent, par le critère de compariason, comme la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, les séries $\sum_{n\geq 0} \frac{\partial f_n}{\partial t}(x,t)$, $\sum_{n\geq 0} \frac{\partial^2 f_n}{\partial t^2}(x,t)$ convergent normalement (et donc uniformément) et de même pour tout $t \in [0,+\infty[$ fixé les séries $\sum_{n\geq 0} \frac{\partial f_n}{\partial x}(x,t)$, $\sum_{n\geq 0} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}(x,t)$ convergent normalement (et donc uniformément).

5. En utilisant le même argument que dans la question précédente, la série

$$\sum_{n\geq 0} A_n \cos(nt)\cos(nx)$$

converge normalement (et donc simplement) pour tout x fixé ou t fixé vers $u(x,t)$.

Comme les séries $\sum_{n\geq 0} \frac{\partial f_n}{\partial t}(x,t)$, $\sum_{n\geq 0} \frac{\partial f_n}{\partial x}(x,t)$ convergent uniformément, on conclut que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n\geq 0} \frac{\partial f_n}{\partial t}(x,t),\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \sum_{n\geq 0} \frac{\partial f_n}{\partial x}(x,t).$$

Comme les séries $\sum_{n\geq 0} \frac{\partial^2 f_n}{\partial t^2}(x,t)$, $\sum_{n\geq 0} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}(x,t)$ convergent uniformément, en appliquant le même raisonnement aux séries précédentes, on conclut également

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \sum_{n\geq 0} \frac{\partial^2 f_n}{\partial t^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \sum_{n\geq 0} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}(x,t).$$

5. On a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n\geq 0} \frac{\partial f_n}{\partial t}(x,0)$$

et comme $\frac{\partial f_n}{\partial t}(x,0) = -nA_n \sin(n\cdot 0)\cos(nx) = 0$ on conclut que $u_1(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Formulaire

(1) Les coefficients de Fourier de f T-périodique continue par morceaux sont donnés par l'intégrale sur une période (a au choix, $\omega = \frac{2\pi}{T}$)

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} \cos(n\omega x) f(x)dx, \qquad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} \sin(n\omega x) f(x)dx,$$

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} e^{-in\omega x} f(x)dx.$$

(2) Si f est continue et C^1 par morceaux, alors on a pour $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$a_n(f') = n\omega\ b_n(f), \qquad b_n(f') = -n\omega\ a_n(f).$$

(3) La formule de Parseval, valable pour f T-périodique continue par morceaux, s'écrit :

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2.$$