Université Claude Bernard Lyon 1
Année 2022-2023
27 mars 2023

PCSI L2 UE Mathématiques 4
Séquence 2

Contrôle Continu 2

L'épreuve dure 1h30. Vous pouvez utiliser librement le formulaire au dos du sujet. Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés. On prendra soin de ***justifier*** *les réponses. Le sujet comporte cinq exercices indépendants. Des points bonus hors barème seront attribués dans la partie II qu'il est recommandé de traiter en dernier.*

Partie II (à rédiger sur une seconde copie)

Exercice 1 [3 points] On souhaite résoudre l'EDP suivante :

$$k\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}, \tag{1}$$

où l'inconnue est la fonction $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et k est une constante appartenant à $\mathbb{R}$.

1. Trouver toutes les solutions de (1) lorsque $k = 0$. [1 point]
   Les fonctions $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sont les fonctions de la forme $f(x, y) = C(x)$ où $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1.
2. On suppose $k \neq 0$. On considère une fonction $F(u, v)$ telle que

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0,$$

   et on pose $f(x, y) = F(x + y, x + ky)$. Montrer que f est solution de (1). [2 points]
   On pose $u = x + y$ et $v = x + ky$. On calcule les deux dérivées partielles avec la règle de la chaîne :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) \times \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial F}{\partial v}(u, v)\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) \times \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) + k\frac{\partial F}{\partial v}(u, v)
\end{aligned}$$

   Si $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$ on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial v}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = k\frac{\partial F}{\partial v}$$

   et donc f est bien solution de (1).

Exercice 2 [7 points + Bonus] On considère l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \text{pour tout } x \in [0, L] \text{ et } t \geqslant 0, \tag{2}$$

où $L > 0$ et $c > 0$ sont deux constantes. On impose les conditions aux limites :

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \qquad \text{pour tout } t \geqslant 0. \tag{3}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit

$$u_n(x, t) = e^{-n^2c^2\pi^2t/L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

   Montrer que u_n est solution de (2) et qu'elle vérifie les conditions aux limites (3).
   [2 points = 0.5 point pour chacune des 3 dérivées partielles + 0.5 point pour la conclusion]
   On dérive u_n par rapport à t et par rapport à x (deux fois). On obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_n}{\partial x}(x, t) &= \frac{n\pi}{L}e^{-n^2c^2\pi^2t/L^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\\
\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, t) &= -\frac{n^2\pi^2}{L^2}e^{-n^2c^2\pi^2t/L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\\
\frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) &= \frac{-n^2c^2\pi^2}{L^2}e^{-n^2c^2\pi^2t/L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = c^2\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, t)
\end{aligned}$$

   donc u_n vérifie (2). De plus, quand $x = 0$ et $x = L$, $\sin(\frac{n\pi}{L} \times 0) = 0$ et $\sin(\frac{n\pi}{L} \times L) = \sin(n\pi) = 0$ donc u_n vérifie aussi (3).

2. On impose maintenant la condition initiale

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad \text{pour tout } x \in [0,L] \tag{4}$$

et on suppose que u_0, après avoir été étendue sur $\mathbb{R}$ en la rendant impaire et $2L$-périodique, peut être décomposée en série de Fourier, c'est-à-dire qu'elle vérifie :

$$u_0(x) = \sum_{n\geqslant 1} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad \text{pour tout } x \in [0,L]$$

pour certains coefficients $b_n \in \mathbb{R}$ (que l'on ne demande pas de calculer). On suppose de plus que la série $\sum_{n\geqslant 1} |b_n|$ converge.

(a) Montrer que la série de fonctions

$$u(x,t) = \sum_{n\geqslant 1} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2\pi^2c^2t/L^2} \tag{5}$$

converge uniformément sur $[0,L] \times [0,+\infty[$.

[1.5 point=0.5 pour idée de la conv. normale + 1 point pour majoration avec $|b_n|$ et conclusion]

Pour montrer la convergence uniforme on va montrer la convergence normale. On a

$$\sup_{(x,t)\in[0,L]\times[0,+\infty[} \left| b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2\pi^2c^2t/L^2} \right| = |b_n| \left|\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right| e^{-n^2\pi^2c^2t/L^2} \leqslant |b_n|$$

Comme $\sum |b_n|$ converge on en déduit que la série converge bien normalement, donc uniformément, sur $[0,L] \times [0,+\infty[$.

(b) On veut maintenant dériver cette série par rapport à la variable t. Montrer que la série des dérivées

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\partial}{\partial t}\left(b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2\pi^2c^2t/L^2}\right)$$

converge uniformément sur $[0,L] \times [a,+\infty[$ pour tout $a > 0$.

[1.5 point=0.5 point pour calcul de la dérivée et essai de majoration + 0.5 point si majoration réussie + 0.5 point pour série convergente]

Comme précédemment on montre la convergence normale. Cette fois, le sup sur $[a,+\infty[$ va donner un terme supplémentaire, celui de l'exponentielle. On a

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2\pi^2c^2t/L^2}\right) = -\frac{n^2\pi^2c^2}{L^2} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2\pi^2c^2t/L^2}$$

et on majore

$$\sup_{(x,t)\in[0,L]\times[a,+\infty[} \left| -\frac{n^2\pi^2c^2}{L^2} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2\pi^2c^2t/L^2} \right| \leqslant \frac{n^2\pi^2c^2}{L^2} |b_n| e^{-c^2n^2\pi^2a/L^2}.$$

Pour montrer que la série converge, on peut comparer avec une série de Riemman : comme $\sum |b_n|$ converge, on en déduit $b_n \to 0$ et donc, par croissance comparée :

$$\frac{n^2\pi^2c^2}{L^2} |b_n| e^{-c^2n^2\pi^2a/L^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit que la série converge bien normalement, donc uniformément, sur $[0,L] \times [a,+\infty[$ pour tout $a > 0$.

(c) En déduire que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = c^2 \sum_{n\geqslant 1} b_n \frac{(-n^2\pi^2)}{L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-c^2n^2\pi^2t/L^2}$$

[1 point = 0.5 point si les deux hypothèses du théorème de dérivation sont indiquées + 0.5 point pour le passage de pour tout $a > 0$ à tout $t > 0$]

On utilise le théorème de dérivation des séries :

— La série définie (5) converge simplement d'après la question (a)

— La série des dérivées partielles converge uniformément sur $[0, L] \times [a, +\infty[$ d'après la question (b). Donc d'après le théorème de dérivation des séries, on en déduit, pour tout $(x, t) \in [0, L] \times [a, +\infty[$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = c^2 \sum_{n \geqslant 1} b_n \frac{(-n^2\pi^2)}{L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-c^2 n^2 \pi^2 t / L^2} \tag{6}$$

Comme c'est vrai quelque soit $a > 0$, on en déduit que cette égalité est vrai pour tout $(x, t) \in [0, L] \times [0, +\infty[$.

(d) On veut maintenant dériver deux fois la série de fonctions (5) par rapport à x. Calculer directement

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

en intervertissant dérivée seconde et série sans avoir besoin d'appliquer le théorème de dérivation. [1 point]

On dérive deux fois le terme général de la série par rapport à x sans avoir besoin d'appliquer le théorème. Pour la première dérivée on trouve

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \sum_{n \geqslant 1} b_n \frac{n\pi}{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-c^2 n^2 \pi^2 t / L^2}$$

et pour la second dérivée on trouve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \sum_{n \geqslant 1} -b_n \frac{n^2\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-c^2 n^2 \pi^2 t / L^2} \tag{7}$$

(e) En déduire que la fonction u définie par (5) est solution de (2) et vérifie les conditions (3) et (4). [1 point]

En comparant (6) et (7) on voit que u est solution de (2). D'autre part, elle vérifie (3) pour les mêmes raisons que la question 1. Enfin, elle vérifie (4) car par hypothèse, $u_0(x)$ est bien égale à la série définie par (5) lorsque $t = 0$.

Formulaire

(1) Les coefficients de Fourier de f T-périodique continue par morceaux sont donnés par l'intégrale sur une période (a au choix, $\omega = \frac{2\pi}{T}$)

$$a_n(f) = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} \cos(n\omega x) f(x) dx, \qquad b_n(f) = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} \sin(n\omega x) f(x) dx,$$
$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} e^{-in\omega x} f(x) dx.$$

(2) Si f est continue et C^1 par morceaux, alors on a pour $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$a_n(f') = n\omega\, b_n(f), \qquad b_n(f') = -n\omega\, a_n(f).$$

(3) La formule de Parseval, valable pour f T-périodique continue par morceaux, s'écrit :

$$\frac{1}{T} \int_a^{a+T} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2.$$