

Amaury Thuillier

# Géométrie toroïdale et géométrie analytique non archimédienne. Application au type d'homotopie de certains schémas formels

Received: 28 July 2006 / Revised: 28 March 2007

Published online: 19 June 2007

**Abstract.** V.G. Berkovich's non-Archimedean analytic geometry provides a natural framework to understand the combinatorial aspects in the theory of toric varieties and toroidal embeddings. This point of view leads to a conceptual and elementary proof of the following results : if  $X$  is an algebraic scheme over a perfect field and if  $D$  is the exceptional normal crossing divisor of a resolution of the singularities of  $X$ , the homotopy type of the incidence complex of  $D$  is an invariant of  $X$ . This is a generalization of a theorem due to D. Stepanov.

## Table des matières

0. Introduction . . . . .	381
1. L'espace de Berkovich d'un $k$ -schéma formel localement algébrique . . . . .	384
1.1. Préliminaires . . . . .	385
1.2. Construction . . . . .	392
1.3. Propriétés . . . . .	396
2. L'espace de Berkovich d'une variété torique . . . . .	403
2.1. L'éventail d'une $k$ -variété torique et sa compactification . . . . .	403
2.2. La contraction de $X^{\triangleright}$ sur $\mathfrak{S}(X)$ . . . . .	413
3. L'espace de Berkovich associé à un plongement toroïdal . . . . .	417
3.1. L'éventail d'un plongement toroïdal simple et sa compactification . . . . .	418
3.2. La contraction de $X^{\triangleright}$ sur $\mathfrak{S}(X)$ . . . . .	429
3.3. Extension : plongements toroïdaux généraux . . . . .	437
4. Application aux diviseurs à croisements normaux . . . . .	442
4.1. Le complexe d'incidence d'un diviseur à croisements normaux . . . . .	443
4.2. Généralisation d'un théorème de D. Stepanov . . . . .	447
Références . . . . .	450

## 0. Introduction

Ce travail trouve son origine dans un article de Stepanov [13]. Étant donnés un corps  $k$  de caractéristique nulle, un  $k$ -schéma algébrique  $X$  et un point singulier

A. Thuillier: Université de Lyon, Université Lyon 1, CNRS UMR 5208, Institut Camille Jordan, Bâtiment Braconnier, 43 bd. du 11 novembre 1918, F-69622 Villeurbanne Cedex, France. e-mail: thuillier@math.univ-lyon1.fr

*Mathematics Subject Classification (2000)* : 14G22, 14E15, 14M25

isolé  $x$  de  $X$ , le théorème de résolution des singularités de Hironaka garantit l'existence d'un idéal  $\mathcal{J}$  sur  $X$ , de support  $\{x\}$  et tel que le diviseur exceptionnel  $E$  de l'éclatement de  $\mathcal{J}$  soit à croisements normaux simples (cette dernière condition signifiant que les composantes irréductibles du diviseur sont sans auto-intersection). La combinatoire des intersections multiples des composantes irréductibles de  $E$  donne naissance à un ensemble simplicial  $\Delta(E)$ , le *complexe d'incidence* de ce diviseur, de réalisation géométrique  $|\Delta(E)|$ . Si  $\Delta(E)$  dépend évidemment du choix de l'idéal  $\mathcal{J}$ , D. Stepanov démontre qu'il n'en va pas de même pour le type d'homotopie de l'espace topologique  $|\Delta(E)|$ , qui est un invariant de la singularité  $x$ . Ce résultat est déduit du théorème de factorisation faible des applications birationnelles en caractéristique nulle (dont une démonstration est due à D. Abramovich, D. Karu, K. Matsuki et K. Włodarczyk, une autre à K. Włodarczyk), lequel permet essentiellement, en écrivant l'application birationnelle naturelle entre deux résolutions de la singularité  $x$  de  $X$  comme une composée d'applications birationnelles suffisamment élémentaires, de passer d'un ensemble simplicial à l'autre par une suite de transformations simples ne modifiant pas le type d'homotopie de la réalisation géométrique. Pour pouvoir appliquer ce théorème de factorisation, il faut préalablement compactifier les schémas en jeu ; on considère pour cela un voisinage  $U$  de  $x$  dans  $X$ , que l'on plonge dans un  $k$ -schéma propre  $\bar{U}$ , régulier en dehors de  $x$  et tel que  $\bar{U} - U$  soit un diviseur à croisements normaux simples. La démonstration de Stepanov fonctionne de manière identique si l'on part, plus généralement, d'un  $k$ -schéma algébrique  $X$  et d'une composante connexe *propre* de son lieu singulier. Notons en outre que la restriction à la caractéristique nulle est imposée par l'utilisation du théorème de résolution des singularités de Hironaka pour établir le théorème de factorisation et pour construire des compactifications convenables.

Nous proposons dans ce texte une approche conceptuelle et élémentaire d'une généralisation du théorème de Stepanov, n'utilisant pas le théorème de factorisation faible. Précisément, on établit au chapitre 4 le résultat suivant.

**Théorème.** *Soient  $X$  un schéma algébrique sur un corps parfait  $k$  et  $Y$  un sous-schéma fermé de  $X$ . Si  $f_1 : X_1 \rightarrow X$  et  $f_2 : X_2 \rightarrow X$  sont deux morphismes propres tels que  $f_i^{-1}(Y)$  soit un diviseur à croisements normaux et tels que  $f_i$  induise un isomorphisme de  $X_i - f_i^{-1}(Y)$  sur  $X - Y$ ,  $i = 1, 2$ , les espaces topologiques  $|\Delta(f_1^{-1}(Y))|$  et  $|\Delta(f_2^{-1}(Y))|$  sont canoniquement homotopes.*

La démonstration de ce théorème est une application des idées introduites par V. G. Berkovich en *géométrie analytique non archimédienne* et elle procède en deux étapes.

1. Désignant par  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{X}_1$  et  $\mathfrak{X}_2$  les  $k$ -schémas formels obtenus en complétant  $X$ ,  $X_1$  et  $X_2$  le long de  $Y$ ,  $f_1^{-1}(Y)$  et  $f_2^{-1}(Y)$  respectivement, leurs *fibres génériques*  $\mathfrak{X}_\eta$ ,  $\mathfrak{X}_{1,\eta}$  et  $\mathfrak{X}_{2,\eta}$  sont par définition des espaces analytiques sur le corps  $k$ , vu comme un corps non archimédien en le munissant de la valeur absolue triviale. Comme on s'y attend, les morphismes  $f_1$  et  $f_2$  induisent des isomorphismes  $\mathfrak{X}_{1,\eta} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}_\eta$  et  $\mathfrak{X}_{2,\eta} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}_\eta$ ; en particulier, les espaces topologiques sous-jacents à  $\mathfrak{X}_\eta$ ,  $\mathfrak{X}_{1,\eta}$  et  $\mathfrak{X}_{2,\eta}$  sont canoniquement *homéomorphes*.
2. La condition imposée au corps de base  $k$  d'être *parfait* garantit que les immersions ouvertes  $X_1 - f_1^{-1}(Y) \hookrightarrow X_1$  et  $X_2 - f_2^{-1}(Y) \hookrightarrow X_2$  sont

des *plongements toroïdaux*. Il existe alors des sous-espaces fermés canoniques  $\mathfrak{S}(\mathfrak{X}_1)$  et  $\mathfrak{S}(\mathfrak{X}_2)$  de  $\mathfrak{X}_{1,\eta}$  et  $\mathfrak{X}_{2,\eta}$  respectivement, ayant les propriétés suivantes ( $i \in \{1, 2\}$ ) :

- l'espace topologique  $\mathfrak{X}_{i,\eta}$  se *contracte* sur  $\mathfrak{S}(\mathfrak{X}_i)$  ;
- $\mathfrak{S}(\mathfrak{X}_i)$  s'identifie au *cône épointé* sur l'espace topologique  $|\Delta(f_i^{-1}(Y))|$ .

Cela permet de conclure que les espaces topologiques  $|\Delta(f_1^{-1}(Y))|$  et  $|\Delta(f_2^{-1}(Y))|$  ont le même type d'homotopie, à savoir celui de l'espace topologique  $\mathfrak{X}_\eta$ .

Le point de vue que nous adoptons conduit également au résultat suivant, qui est une autre conséquence facile du théorème de factorisation faible lorsque le corps de base est de caractéristique nulle.

**Théorème.** *Soit  $X$  un schéma algébrique régulier sur un corps parfait  $k$ . Étant données deux compactifications régulières  $X \hookrightarrow X_1$  et  $X \hookrightarrow X_2$  de  $X$  dont les bords  $D_1$  et  $D_2$  sont des diviseurs à croisements normaux, les espaces topologiques  $|\Delta(D_1)|$  et  $|\Delta(D_2)|$  sont canoniquement homotopes.*

Avant d'aborder le théorème de Stepanov, on montre dans les pages suivantes que la théorie de Berkovich fournit un cadre naturel pour formuler la construction, initialement décrite par D. Mumford dans le deuxième chapitre de la monographie [11], du *complexe polyédral conique* associé à un plongement toroïdal. Pour cela, la première étape est de voir que l'*éventail* d'une variété torique  $X$  (sous un tore  $T$ ) s'identifie à un sous-espace localement fermé  $\mathfrak{S}_0(X)$  de l'espace de Berkovich  $X^{\square}$  de  $X$ , dont l'adhérence  $\mathfrak{S}(X)$  est la réunion des éventails associés aux différentes orbites dans  $X$  ; en outre, l'action de  $T$  sur  $X$  donne naturellement naissance à une contraction de l'espace  $X^{\square}$  sur  $\mathfrak{S}(X)$ . Cette construction et ces propriétés s'étendent au cas d'un plongement toroïdal.

Les idées et techniques ici mises en œuvre proviennent des travaux de Berkovich. Tout d'abord, l'*espace de Berkovich*  $X^{\square}$  d'un  $k$ -schéma formel localement algébrique  $\mathfrak{X}$  n'est pas autre chose que sa « fibre générique » au sens de l'article [4] (cette construction est essentiellement due à Berthelot [6]). Cet espace analytique n'étant pas invariant relativement aux éclatements centrés dans la fibre spéciale de  $\mathfrak{X}$ , la terminologie est quelque peu fâcheuse et nous nous sommes permis de la modifier. La *fibre générique*  $\mathfrak{X}_\eta$  de  $\mathfrak{X}$  considérée dans ce travail, qui possède la propriété d'invariance requise, est un ouvert de  $X^{\square}$ . Notre description des variétés toriques du point de vue de la géométrie analytique non archimédienne est une version détaillée de la Sect. 6.1 de [1]. Enfin, l'extension aux plongements toroïdaux suit de près la construction, par Berkovich, du squelette d'un schéma formel polystable [5].

*Remarque.* L'énoncé des théorèmes doit être valable sans hypothèse sur le corps  $k$ . Comme on l'a mentionné, c'est le passage par la géométrie toroïdale qui nécessite de supposer que  $k$  soit parfait et, si ce chemin a un intérêt intrinsèque puisqu'il permet de reformuler la construction du complexe polyédral d'un plongement toroïdal dans le cadre de la théorie de Berkovich, il ne devrait pas être la voie obligée pour accéder au théorème. Si  $\mathfrak{X}$  est le complété formel d'un  $k$ -schéma algébrique le long

d'un diviseur à croisements normaux, il est de fait possible (et facile) de définir inconditionnellement le sous-espace fermé  $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$  de  $\mathfrak{X}_\eta$ , mais il semble difficile d'obtenir une preuve aisée de la contractibilité de  $\mathfrak{X}_\eta$  sur  $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$  sans recourir à l'action de tores formels.

Il est par ailleurs raisonnable de penser que l'existence d'un corps de base est superflue et que le théorème précédent est vrai sous la seule condition que  $X$  soit un schéma localement noethérien excellent (il en est alors de même pour  $X_1$  et  $X_2$ , et le complexe d'incidence d'un diviseur à croisements normaux sur un schéma localement noethérien excellent est bien défini).

*C'est Klaus Künnemann qui a attiré mon attention sur l'article de Stepanov et je lui sais gré de m'avoir encouragé à conduire ce travail à son terme. Cela fut fait au cours d'une année passée au sein de l'université de Regensburg, que j'ai plaisir à remercier pour son accueil.*

*Je suis par ailleurs fort redevable au rapporteur de sa lecture attentive et de ses nombreux commentaires ayant permis d'améliorer ce texte. Je lui dois en particulier la suggestion de traiter le cas de plongements toroïdaux non nécessairement simples (Sect. 3.3) et l'application aux bords des compactifications lisses, ainsi que la détection d'une lacune dans la démonstration initiale de la Proposition 3.25 ; qu'il en soit ici chaleureusement remercié.*

## 1. L'espace de Berkovich d'un $k$ -schéma formel localement algébrique

Soit  $k$  un corps, que l'on voit comme un corps non archimédien en le munissant de la valeur absolue triviale ; la topologie induite sur  $k$  est discrète. On désigne par  $\mathbf{SchAlg}_k$  la catégorie dont les objets sont les  $k$ -schémas localement algébriques et dont les flèches sont les morphismes de  $k$ -schémas.

Un  $k$ -schéma formel est *localement algébrique* s'il est localement isomorphe au complété formel d'un  $k$ -schéma algébrique le long d'un sous-schéma fermé ; il s'agit en particulier d'un  $k$ -schéma formel adique. Les  $k$ -schémas formels localement algébriques sont les objets d'une sous-catégorie pleine de la catégorie des  $k$ -schémas formels, notée  $(\mathbf{SchAlg}_k)^\wedge$ . On définit d'un foncteur pleinement fidèle de  $\mathbf{SchAlg}_k$  dans  $(\mathbf{SchAlg}_k)^\wedge$  en associant à tout  $k$ -schéma localement algébrique  $X$  son complété le long du sous-schéma fermé  $X$  ; il est équivalent de munir l'anneau  $\mathcal{O}_X(U)$  de la topologie discrète pour tout ouvert quasi-compact  $U \subset X$ .

L'objet essentiel de ce chapitre est la définition d'un foncteur d'une certaine sous-catégorie de  $(\mathbf{SchAlg}_k)^\wedge$  — mêmes objets et morphismes adiques — dans la catégorie  $\mathbf{An}_k$  des espaces  $k$ -analytiques, associant à un  $k$ -schéma formel localement algébrique  $\mathfrak{X}$  sa *fibre générique*, notée  $\mathfrak{X}_\eta$  ; on introduira pour cela un foncteur de  $(\mathbf{SchAlg}_k)^\wedge$  dans  $\mathbf{An}_k$ , faisant correspondre à un  $k$ -schéma formel localement algébrique  $\mathfrak{X}$  son *espace de Berkovich*  $\mathfrak{X}^\square$ . Par construction, la fibre spéciale  $\mathfrak{X}_s$  d'un  $k$ -schéma formel localement algébrique  $\mathfrak{X}$  définit un sous-espace  $k$ -analytique fermé de  $\mathfrak{X}^\square$  et la fibre générique  $\mathfrak{X}_\eta$  de  $\mathfrak{X}$  est l'espace analytique induit sur l'ouvert complémentaire  $\mathfrak{X}^\square - \mathfrak{X}_s$ .

Il n'y a là rien d'original par rapport aux travaux de V. Berkovich : soulignons d'emblée que l'*espace de Berkovich*  $\mathfrak{X}^\square$  d'un  $k$ -schéma formel localement

algébrique  $\mathfrak{X}$  n'est pas autre chose que sa « fibre générique » telle que définie et étudiée dans l'article [4], suivant une construction initialement due à Berthelot [6]. Il s'avère cependant que le terme de « fibre générique » est inadapté à la situation que nous considérons, l'espace analytique  $\mathfrak{X}^{\beth}$  n'étant pas invariant relativement aux éclatements centrés dans la fibre spéciale de  $\mathfrak{X}$ ; tel est par contre le cas de l'espace analytique  $\mathfrak{X}_\eta$ . C'est cette observation que traduit la modification terminologique adoptée dans ce texte. Rappelons enfin que  $\beth$  (« beth ») est la deuxième lettre de l'alphabet hébreu, transcrite par les lettres V et B dans l'alphabet latin.

1.1. Préliminaires

Nous renvoyons au livre [1] et au premier chapitre de l'article [2] pour les notions fondamentales de géométrie analytique non archimédienne au sens de Berkovich et nous contentons ici de quelques rappels.

Fixons un corps  $K$  muni d'une valeur absolue non archimédienne  $|\cdot|$  pour laquelle il est complet.

(1.1.1) Quels que soient les nombres réels strictement positifs  $r_1, \dots, r_n$ ,  $K\{r_1^{-1}T_1, \dots, r_n^{-1}T_n\}$  désigne la  $K$ -algèbre de Banach des séries formelles  $f = \sum_{v \in \mathbb{N}^n} a_v T_1^{v_1} \dots T_n^{v_n} \in K[[T_1, \dots, T_n]]$  telles que les nombres réels  $|a_v| r_1^{v_1} \dots r_n^{v_n}$  tendent vers 0 lorsque  $|v| = v_1 + \dots + v_n$  tend vers  $+\infty$ , munie de la norme définie par  $\|f\| = \max_v |a_v| r_1^{v_1} \dots r_n^{v_n}$ . Une algèbre  $K$ -affinoïde est une  $K$ -algèbre de Banach quotient d'une  $K$ -algèbre de Banach de la forme précédente, et elle est dite strictement  $K$ -affinoïde si les  $r_i$  peuvent en outre être choisis dans le sous-groupe  $|K^\times|$  de  $\mathbb{R}_{>0}$ .

(1.1.2) Étant donnée une algèbre  $K$ -affinoïde  $A$ , on désigne par  $\mathcal{M}(A)$  l'ensemble des semi-normes multiplicatives et bornées sur  $A$ . Une telle semi-norme coïncide avec la valeur absolue sur le corps  $K$ . Si  $x$  est un point de  $\mathcal{M}(A)$  et  $f$  est un élément de  $A$ , on note indifféremment  $|f|(x)$  ou  $|f(x)|$  l'évaluation de  $x$  en  $f$ . Un  $K$ -homomorphisme borné  $\varphi : A \rightarrow B$  entre algèbres  $K$ -affinoïdes induit naturellement une application de  $\mathcal{M}(B)$  dans  $\mathcal{M}(A)$ , notée  ${}^a\varphi$ .

Comme pour tout anneau de Banach, la *semi-norme spectrale* d'une algèbre  $K$ -affinoïde  $A$  est définie par la formule

$$|f|_{\text{sp}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_n \|f^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

De la commutativité de  $A$  se déduit la propriété suivante :

$$|f|_{\text{sp}} = \max_{\mathcal{M}(A)} |f|(x).$$

On note  $A^\circ$  l'ensemble des éléments  $f$  de  $A$  tels que  $|f|_{\text{sp}} \leq 1$ ; c'est une sous- $K^\circ$ -algèbre de  $A$ . Tout  $K$ -homomorphisme borné  $\varphi : A \rightarrow B$  entre algèbres  $K$ -affinoïdes induit un  $K^\circ$ -homomorphisme  $\varphi^\circ$  de  $A^\circ$  dans  $B^\circ$  car  $|\varphi(f)|_{\text{sp}} \leq |f|_{\text{sp}}$  pour tout  $f \in A$ .

(1.1.3) Une partie  $V$  de  $\mathcal{M}(A)$  est un *domaine affinoïde* s'il existe un homomorphisme borné d'algèbres  $K$ -affinoïdes  $\varphi : A \rightarrow A_V$  satisfaisant à la condition

suivante : quels que soient l’extension non archimédienne  $K'$  de  $K$ , l’algèbre  $K'$ -affinoïde  $B$  et le  $K$ -homomorphisme borné  $\psi : A \rightarrow B$  tel que l’image de l’application induite  $\psi : \mathcal{M}(B) \rightarrow \mathcal{M}(A)$  soit contenue dans  $V$ , il existe un unique  $K$ -homomorphisme borné  $A_V \rightarrow B$  rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M}(A) & \xrightarrow{a\varphi} & \mathcal{M}(A_V) \\
 & \searrow a\psi & \swarrow \\
 & & \mathcal{M}(B)
 \end{array}$$

commutatif. À tout domaine affinoïde  $V$  de  $\mathcal{M}(A)$  sont ainsi associés une algèbre  $K$ -affinoïde  $A_V$  et un  $K$ -homomorphisme borné  $A \rightarrow A_V$ , uniquement déterminés à un isomorphisme unique près, et l’on vérifie que l’application induite  $\mathcal{M}(A_V) \rightarrow \mathcal{M}(A)$  est une bijection sur  $V$ . Parmi les domaines affinoïdes figurent les domaines rationnels, de la forme  $V = \{|f_1| \leq r_1|f_0|, \dots, |f_n| \leq r_n|f_0|\}$ , où  $f_0, \dots, f_n$  sont des éléments de  $A$  engendrant l’idéal unité et  $r_1, \dots, r_n$  sont des nombres réels strictement positifs ; dans ce cas,  $A_V$  est l’algèbre  $K$ -affinoïde  $A\{r_1^{-1}T_1, \dots, r_n^{-1}T_n\}/(f_1 - f_0T_1, \dots, f_n - f_0T_n)$ .

Si  $A$  est une algèbre strictement  $K$ -affinoïde, le théorème de Gerritzen-Grauert garantit que tout domaine strictement  $K$ -affinoïde de  $\mathcal{M}(A)$  est la réunion d’un nombre fini de domaines rationnels. Ce résultat a été étendu à tout domaine affinoïde d’un espace affinoïde quelconque par Ducros [8] et Temkin [14].

(1.1.4) On fait de l’ensemble  $X = \mathcal{M}(A)$  un *site* en le munissant de la topologie de Grothendieck suivante (voir [6, 7]).

- Les objets, appelés *domaine analytique*, sont les parties  $U$  de  $X$  admettant un recouvrement  $\{V_i\}$  par des domaines affinoïdes vérifiant la condition suivante : pour toute algèbre  $K$ -affinoïde  $B$  et tout  $K$ -homomorphisme borné  $\varphi : A \rightarrow B$  tel que l’image de l’application  $a\varphi : \mathcal{M}(B) \rightarrow \mathcal{M}(A)$  soit contenue dans  $U$ , celle-ci est recouverte par un nombre fini des  $V_i$ .
- Les recouvrements admissibles d’un domaine analytique  $U$  sont les recouvrements  $\{U_i\}$  de  $U$  par des domaines analytiques  $U_i$  vérifiant la condition suivante : pour toute algèbre  $K$ -affinoïde  $B$  et tout  $K$ -homomorphisme borné  $\varphi : A \rightarrow B$  tel que l’image de l’application  $a\varphi : \mathcal{M}(B) \rightarrow \mathcal{M}(A)$  soit contenue dans  $U$ , il existe un recouvrement de  $\mathcal{M}(B)$  par un nombre fini de domaines affinoïdes qui raffine le recouvrement  $\{\varphi^{-1}(U_i)\}$ .

Ce site est noté  $X_G$ . D’après un théorème de Tate, il existe un et un seul faisceau de  $K$ -algèbres  $\mathcal{O}_{X_G}$  sur  $X_G$  satisfaisant aux deux conditions suivantes :  $\mathcal{O}_{X_G}(V) = A_V$  pour tout domaine affinoïde  $V \subset X$  et, si  $W, V$  sont des domaines affinoïdes tels que  $W \subset V$ , l’homomorphisme de restriction  $\mathcal{O}_{X_G}(V) \rightarrow \mathcal{O}_{X_G}(W)$  est le  $K$ -homomorphisme borné de  $A_V$  dans  $A_W$  factorisant la flèche canonique  $A \rightarrow A_W$ .

(1.1.5) Munissons maintenant  $X = \mathcal{M}(A)$  de la topologie engendrée par les évaluations ( $x \mapsto |a(x)|$ ),  $a \in A$  ; l’espace topologique obtenu est compact et les domaines affinoïdes en sont des parties compactes, donc fermées. Du fait que

tout point de  $X$  admette manifestement un système fondamental de voisinages formé de domaines affinoïdes, chaque ouvert  $\Omega$  de  $X$  est un domaine analytique et tout recouvrement ouvert de  $\Omega$  est admissible; il existe donc un morphisme évident  $\Pi$  du site  $X_G$  vers le site topologique associé à  $X$  et l'image directe  $\mathcal{O}_X = \Pi_*(\mathcal{O}_{X_G})$  est un faisceau de  $K$ -algèbres sur l'espace topologique  $X$ . Le terme d'« ouvert » n'est employé que pour la topologie qui vient d'être définie (dans le cadre de la topologie de Grothendieck sur le site  $X_G$ , on parlera de domaines analytiques ou d'objets de ce site); s'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera toutefois indistinctement  $\mathcal{O}_X$  pour les faisceaux structuraux du site  $X_G$  et de l'espace topologique  $X$ .

Pour tout point  $x$  de  $X$ , les fibres  $\mathcal{O}_{X,x}$  et  $\mathcal{O}_{X_G,x}$  sont des anneaux locaux; le premier est la limite du système inductif des  $A_V$ ,  $V$  parcourant l'ensemble des domaines analytiques de  $X$  qui sont des voisinages de  $x$ , tandis que le second est la limite du système inductif des  $A_W$ ,  $W$  parcourant cette fois le système inductif des domaines affinoïdes  $W$  de  $X$  qui contiennent  $x$ .

(1.1.6) En vertu du théorème de Tate mentionné au point précédent,  $A$  est l'anneau des sections globales du faisceau structural de  $\mathcal{M}(A)$ ; il existe par conséquent un unique morphisme d'espaces  $K$ -localement annelés  $\rho_A : \mathcal{M}(A) \rightarrow \text{Spec}(A)$  induisant l'homomorphisme identique de  $A$ . Il est facile de voir que l'application sous-jacente envoie une semi-norme  $x \in \mathcal{M}(A)$  sur son noyau  $\{f \in A \mid |f(x)| = 0\}$  (il s'agit bien d'un idéal premier de  $A$  en vertu de la multiplicativité de  $x$ ).

On dispose également d'un morphisme de sites  $K$ -localement annelés  $r_A : \mathcal{M}(A) \rightarrow \text{Spf}(A^\circ)$ , uniquement déterminé par la condition suivante : pour tout élément  $f$  de  $A^\circ$ ,  $r_A^{-1}(\mathcal{D}(f))$  est le domaine affinoïde  $\{|f| = 1\}$  et l'homomorphisme de  $\Gamma(\mathcal{D}(f), \mathcal{O}_{\text{Spf}(A^\circ)})$  dans  $\Gamma(r_A^{-1}(\mathcal{D}(f)), \mathcal{O}_{\mathcal{M}(A)_G})$  est la flèche canonique de  $A_{\{f\}}^\circ$  dans  $A\{T\}/(fT - 1)$ . L'application sous-jacente envoie une semi-norme multiplicative  $x \in \mathcal{M}(A)$  sur l'idéal premier ouvert  $\{f \in A^\circ \mid |f(x)| < 1\}$  de l'anneau topologique  $A^\circ$  et est appelée *application de réduction*.

(1.1.7) Étant donné un espace  $K$ -affinoïde non vide  $X = \mathcal{M}(A)$ , l'ensemble des sous-espaces fermés et non vides  $\Gamma$  de  $X$  tels que, pour tout  $f \in A$ ,

$$\max_X |f| = \max_\Gamma |f|,$$

admet un plus petit élément : c'est par définition le *bord de Shilov* de  $X$ , que l'on note  $\Gamma(X)$ . Ce sous-ensemble est fini ([1], Corollary 2.4.5).

Les deux propriétés fondamentales du bord de Shilov d'un espace affinoïde  $X = \mathcal{M}(A)$  sont les suivantes.

- Si  $A$  est strictement  $K$ -affinoïde,  $\Gamma(X)$  est l'image réciproque par l'application de réduction  $r_A : \mathcal{M}(A) \rightarrow \text{Spf}(A^\circ)$  de l'ensemble des points génériques (de la fibre spéciale) du schéma formel  $\text{Spf}(A^\circ)$ .
- Quelle que soit l'extension non archimédienne  $K'/K$ ,  $\Gamma(X)$  est l'image de  $\Gamma(X_{K'})$  par la projection canonique de  $X_{K'} = \mathcal{M}(A \widehat{\otimes}_K K')$  sur  $X$ .

(1.1.8) La définition des espaces  $K$ -analytiques généraux par recollement d'espaces  $K$ -affinoïdes est présentée dans le premier chapitre de l'article [2]. Un



espace  $K$ -analytique  $X$  est en particulier un espace topologique localement compact muni d'une famille distinguée de sous-espaces compacts, ses *domaines affinoïdes* ; tout point  $x$  de  $X$  possède un voisinage de la forme  $V_1 \cup \dots \cup V_n$ , où  $V_1, \dots, V_n$  sont des domaines affinoïdes tels que  $x \in V_1 \cap \dots \cap V_n$ . L'ensemble sous-jacent à  $X$  possède en outre une topologie de Grothendieck ainsi définie :

- les objets, appelés *domaines analytiques*, sont les sous-espaces topologiques  $Y$  de  $X$  dont tout point  $y$  admet un voisinage de la forme  $V_1 \cup \dots \cup V_n$ , où  $V_1, \dots, V_n$  sont des domaines affinoïdes tels que  $y \in V_1 \cap \dots \cap V_n$  ;
- un recouvrement d'un domaine analytique  $Y$  par des domaines analytiques  $V_i$  est admissible s'il admet un raffinement  $\{U_j\}$  tel que tout point  $y$  de  $Y$  admette un voisinage de la forme  $U_1 \cup \dots \cup U_n$  avec  $y \in U_1 \cap \dots \cap U_n$ .

On désigne par  $X_G$  le site défini par cette topologie de Grothendieck ; comme les ouverts de  $X$  (resp. les recouvrement ouverts) sont des domaines analytiques (resp. des recouvrements admissibles), on dispose naturellement d'un morphisme de sites  $\Pi_X : X_G \rightarrow X$ .

Le site  $X_G$  est en outre muni d'un *faisceau structural* en  $K$ -algèbres  $\mathcal{O}_{X_G}$ , dont les tiges en tout point de  $x$  sont des anneaux locaux et tel que, pour tout domaine affinoïde  $V$  de  $X$ ,  $\mathcal{O}_{X_G}(V)$  soit la  $K$ -algèbre affinoïde de  $V$ . On désigne par  $\mathcal{O}_X$  le faisceau  $(\Pi_X)_* \mathcal{O}_{X_G}$  sur l'espace topologique (sous-jacent à)  $X$ , qui en fait un espace  $K$ -localement annelé.

**(1.1.9)** À tout point  $x$  d'un espace  $K$ -affinoïde  $\mathcal{M}(A)$  est associée une extension non archimédienne  $\mathcal{H}(x)$  de  $k$  : il s'agit par définition du complété du corps des fractions de l'anneau intègre  $A/\text{Ker}(x)$ ,  $\text{Ker}(x) = \{f \in A \mid |f|(x) = 0\}$ , pour la valeur absolue induite par  $x$ .

Si  $V$  est un domaine affinoïde de  $\mathcal{M}(A)$  contenant  $x$ , on définit comme précédemment un corps non archimédien  $\mathcal{H}_V(x)$  à partir de l'algèbre  $K$ -affinoïde  $A_V$ . L'homomorphisme canonique  $A \rightarrow A_V$  induit un homomorphisme  $\mathcal{H}(x) \rightarrow \mathcal{H}_V(x)$ . Ce dernier est un isomorphisme : le théorème de Gerritzen-Grauert généralisé permet de se réduire au cas où  $V$  est un domaine rationnel de  $\mathcal{M}(A)$ , auquel cas la vérification est immédiate.

Cette observation permet d'associer un corps non archimédien  $\mathcal{H}(x)$  à tout point  $x$  d'un espace  $K$ -analytique  $X$  : c'est le corps  $\mathcal{H}_V(x)$  pour un quelconque domaine affinoïde  $V$  de  $X$  contenant  $x$ .

**(1.1.10)** À tout  $K$ -schéma localement algébrique  $X$  est naturellement associé un espace  $K$ -analytique, de la manière suivante : le foncteur  $\Phi_X$  de la catégorie des espaces  $K$ -analytiques dans celle des ensembles, qui à un espace  $K$ -analytique  $Y$  fait correspondre l'ensemble des morphismes d'espaces  $K$ -localement annelés de  $Y$  dans  $X$ , est représentable par un espace  $K$ -analytique  $X^{\text{an}}$  et un morphisme d'espaces  $K$ -localement annelés  $\rho_X : X^{\text{an}} \rightarrow X$ . L'espace  $X^{\text{an}}$  est l'espace  $K$ -analytique associé au  $K$ -schéma  $X$ . On trouvera au chapitre 3 du livre [1] la démonstration de cette assertion ainsi que les principales propriétés du foncteur  $X \rightsquigarrow X^{\text{an}}$ .

**(1.1.11)** Achéons ces rappels avec la définition du foncteur « fibre générique » de la catégorie des  $K^\circ$ -schémas localement de présentation finie dans celle des espaces  $K$ -analytiques [4].



Étant donné un  $K^\circ$ -schéma formel localement de présentation finie  $\mathfrak{X}$ , on désigne par  $\Psi_{\mathfrak{X}}$  le foncteur de la catégorie des espaces  $K$ -analytiques dans celle des ensembles, qui à tout espace  $K$ -analytique  $Y$  associe l'ensemble des morphismes de sites  $K^\circ$ -annelés  $\varphi : Y_G \rightarrow \mathfrak{X}$  satisfaisant aux deux conditions suivantes :

- pour tout ouvert affine  $U$  de  $\mathfrak{X}$  et tout domaine affinoïde  $V$  de  $Y$  avec  $\varphi(V) \subset U$ , l'homomorphisme

$$\varphi^\# : \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U) \rightarrow \mathcal{O}_{Y_G}(V)$$

est borné :  $\|\varphi^\#(a)\| \leq 1$  pour tout  $a \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$  ;

- quel que soit le point  $y$  de  $Y$ , l'homomorphisme

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\varphi(y)} \xrightarrow{\varphi_y^\#} \mathcal{O}_{Y_G,y} \longrightarrow \mathcal{H}(y) ,$$

à valeurs dans l'anneau local  $\mathcal{H}(y)^\circ$ , induit un homomorphisme local de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\varphi(y)}$  dans  $\mathcal{H}(y)^\circ : \varphi_y^\#(\mathfrak{m}_{\varphi(y)}) \subset \{a \in \mathcal{O}_{Y_G,y} \mid |a|(y) < 1\}$ .

**Proposition 1.1.** *Soit  $\mathfrak{X}$  un  $K^\circ$ -schéma formel localement de présentation finie. Le foncteur  $\Psi_{\mathfrak{X}}$  est représentable par un espace  $K$ -analytique  $\mathfrak{X}_\eta$  et un morphisme de sites  $r_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X}_\eta \rightarrow \mathfrak{X}$ .*

**Démonstration.** Considérons tout d'abord le cas d'un schéma formel affine  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(\mathcal{A})$  et vérifions que, pour toute algèbre  $K$ -affinoïde  $B$ , l'application  $\varphi \mapsto \varphi^\#$  réalise une bijection de  $\Psi_{\mathfrak{X}}(\mathcal{M}(B))$  sur l'ensemble des  $K^\circ$ -homomorphismes bornés de  $\mathcal{A}$  dans  $B$ .

- Étant donné un  $K^\circ$ -homomorphisme borné  $\psi : \mathcal{A} \rightarrow B$ , on définit une application de  $\mathcal{M}(B)$  dans  $\text{Spf}(\mathcal{A})$  en envoyant une semi-norme  $y$  sur l'idéal premier ouvert  $\{a \in \mathcal{A} \mid |\psi(a)|(y) < 1\}$  de  $\mathcal{A}$ . Quel que soit  $f \in \mathcal{A}$ , l'image réciproque de l'ouvert  $\mathfrak{D}(f)$  est le domaine affinoïde  $\{|\psi(f)| = 1\}$  de  $\mathcal{M}(B)$  et il existe un unique morphisme de sites  $K^\circ$ -annelés  $\varphi : \mathcal{M}(B)_G \rightarrow \text{Spf}(\mathcal{A})$  prolongeant cette application tel que, pour tout  $f \in \mathcal{A}$ , la flèche

$$\varphi^\# : \mathcal{A}\{f^{-1}\} = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{D}(f)) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{M}(B)_G}(\{|\psi(f)| = 1\}) = B\{T\}/(\psi(f)T - 1)$$

soit l'homomorphisme canonique factorisant  $\mathcal{A} \rightarrow B \rightarrow B\{T\}/(\psi(f)T - 1)$ . Par construction,  $\varphi$  appartient à  $\Psi_{\mathfrak{X}}(\mathcal{M}(B))$  et  $\varphi^\# = \psi$ .

- Si  $\varphi \in \Psi_{\mathfrak{X}}(\mathcal{M}(B))$ ,  $\varphi^{-1}(\mathfrak{D}(f)) = \{|\varphi^\#(f)| = 1\}$  pour tout  $f \in \mathcal{A}$  et l'homomorphisme

$$\varphi^\# : \mathcal{A}\{f^{-1}\} = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{D}(f)) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{M}(B)_G}(\{|\varphi^\#(f)| = 1\}) = B\{T\}/(\varphi^\#(f)T - 1),$$

rendant le diagramme naturel

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A} & \xrightarrow{\varphi^\#} & \mathcal{B} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{A}\{f^{-1}\} & \xrightarrow{\varphi^\#} & \mathcal{B}\{T\}/(\varphi^\#(f)T - 1)
 \end{array}$$

commutatif, coïncide nécessairement avec l’homomorphisme factorisant la flèche

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}\{T\}/(\varphi^\#(f)T - 1).$$

Le morphisme  $\varphi$  est ainsi entièrement déterminé par l’homomorphisme borné  $\varphi^\# : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ .

L’anneau  $A = \mathcal{A} \otimes_{K^\circ} K$  est une algèbre strictement  $K$ -affinoïde et au  $K^\circ$ -homomorphisme borné canonique  $\mathcal{A} \rightarrow A$  correspond donc un morphisme de sites  $r_{\mathcal{A}} : \mathcal{M}(A) \rightarrow \text{Spf}(\mathcal{A})$ .

Un  $K^\circ$ -homomorphisme borné  $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  se prolonge en un  $K$ -homomorphisme borné  $A \rightarrow B$  : on fait en effet de  $A$  une  $K$ -algèbre de Banach en la munissant de la norme définie par :

$$\|a\| = \inf\{|\lambda|^{-1} \mid \lambda \in K^\times \text{ et } \lambda a \in \text{Im}(\mathcal{A} \rightarrow A)\};$$

$\psi$  étant borné,  $\|\psi(a)\| = |\lambda|^{-1} \|\psi(\lambda a)\| \leq |\lambda|^{-1}$  pour tous  $a \in A$  et  $\lambda \in K^\times$  tels que  $\lambda a \in \text{Im}(\mathcal{A} \rightarrow A)$ , et donc  $\|\psi(a)\| \leq \|a\|$ . Réciproquement, la restriction à  $\mathcal{A}$  d’un  $K$ -homomorphisme borné  $A \rightarrow B$  est un  $K^\circ$ -homomorphisme borné. Nous obtenons ainsi que l’application  $\varphi \mapsto^a (\varphi^\# \otimes 1)$  réalise une bijection de  $\Psi_{\mathfrak{X}}(\mathcal{M}(B))$  sur l’ensemble des morphismes d’espaces  $K$ -analytiques  $\mathcal{M}(B) \rightarrow \mathcal{M}(A)$  et que  $\varphi = r_{\mathcal{A}} \circ^a (\varphi^\# \otimes 1)$ .

Quel que soit maintenant l’espace  $K$ -analytique  $Y$ , un morphisme de sites  $K^\circ$ -annelés  $\varphi : Y_G \rightarrow \text{Spf}(\mathcal{A})$  appartenant à  $\Psi_{\text{Spf}(\mathcal{A})}(Y)$  donne naissance à une famille compatible de morphismes  $\varphi|_V \in \Psi_{\text{Spf}(\mathcal{A})}(V)$  lorsque  $V$  décrit l’ensemble des domaines affinoïdes de  $Y$ ; nous en déduisons une famille compatible de morphismes d’espaces  $K$ -analytiques  $\widetilde{\varphi}_V : V \rightarrow \mathcal{M}(A)$  tels que  $\varphi_V = r_{\mathcal{A}} \circ \widetilde{\varphi}_V$  et, posant  $\mathfrak{X}_\eta = \mathcal{M}(A)$ ,  $r_{\mathfrak{X}} = r_{\mathcal{A}}$ , les  $\widetilde{\varphi}_V$  se recollent en un morphisme d’espaces  $K$ -analytiques  $\widetilde{\varphi} : Y \rightarrow \mathfrak{X}_\eta$  tel que  $\varphi = r_{\mathfrak{X}} \circ \widetilde{\varphi}$ . On établit ainsi que le couple  $(\mathfrak{X}_\eta, r_{\mathfrak{X}})$  représente le foncteur  $\Psi_{\mathfrak{X}}$ .

Soit enfin  $\mathfrak{X}$  un quelconque  $K^\circ$ -schéma formel localement de présentation finie. Étant donné un espace  $K$ -analytique et un morphisme de sites  $K^\circ$ -annelés  $\varphi : Y_G \rightarrow \mathfrak{X}$  dans  $\Psi_{\mathfrak{X}}(Y)$ , on dispose pour tout ouvert affine  $U$  de  $\mathfrak{X}$  d’un morphisme  $\varphi_U : \varphi^{-1}(U)_G \rightarrow \mathfrak{X}|_U$  de sites  $K^\circ$ -annelés appartenant à  $\Psi_{\mathfrak{X}|_U}(\varphi^{-1}(U))$  — noter que  $\varphi^{-1}(U)$  est un domaine  $K$ -analytique de  $Y$  — et il existe donc un unique morphisme d’espaces  $K$ -analytiques  $\widetilde{\varphi} : \varphi^{-1}(U) \rightarrow (\mathfrak{X}|_U)_\eta$  tel que  $\varphi_U = r_{\mathfrak{X}|_U} \circ \widetilde{\varphi}$ . Les conditions de recollement des schémas formels affines  $\mathfrak{X}|_U$  en le schéma formel  $\mathfrak{X}$  fournissent des conditions de recollement pour les espaces  $K$ -analytiques  $(\mathfrak{X}|_U)_\eta$  le long de domaines affinoïdes, lesquelles sont compatibles aux restrictions : pour tous ouverts affines  $U, V$  de  $\mathfrak{X}$  avec  $V \subset U$ , l’immersion ouverte  $i : \mathfrak{X}|_V \rightarrow \mathfrak{X}|_U$

détermine un morphisme  $i_\eta : (\mathfrak{X}|_V)_\eta \rightarrow (\mathfrak{X}|_U)_\eta$  réalisant un isomorphisme sur un domaine affinoïde de  $(\mathfrak{X}|_U)_\eta$  et entièrement caractérisé par la condition que le diagramme naturel

$$\begin{CD} (\mathfrak{X}|_V)_\eta @>i_\eta>> (\mathfrak{X}|_U)_\eta \\ @Vr_{\mathfrak{X}|_V}VV @VVr_{\mathfrak{X}|_U}V \\ \mathfrak{X}|_V @>i>> \mathfrak{X}|_U \end{CD}$$

soit commutatif. Après recollement, nous obtenons donc un espace  $K$ -analytique  $\mathfrak{X}_\eta$  — recouvert par les domaines affinoïdes  $(\mathfrak{X}|_U)_\eta$  —, un morphisme de sites  $K^\circ$ -annelés  $r_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X}_{\eta,G} \rightarrow \mathfrak{X}$  appartenant à  $\Psi_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}_\eta)$  et un morphisme  $\tilde{\varphi} : Y \rightarrow \mathfrak{X}_\eta$  d'espaces  $K$ -analytiques, le triplet  $(\mathfrak{X}_\eta, r_{\mathfrak{X}}, \tilde{\varphi})$  étant uniquement déterminé par les conditions suivantes : pour tout ouvert affine  $U$  de  $\mathfrak{X}$ ,  $r_{\mathfrak{X}}^{-1}(U)$  est le domaine affinoïde  $(\mathfrak{X}|_U)_\eta$  de  $\mathfrak{X}_\eta$  et la restriction de  $\tilde{\varphi}$  (resp. de  $r_{\mathfrak{X}}$ ) à  $\tilde{\varphi}^{-1}(U)$  (resp.  $r_{\mathfrak{X}}^{-1}(U)_G$ ) est le morphisme  $\tilde{\varphi}_u$  (resp.  $r_{\mathfrak{X}|_U}$ ). L'identité  $\varphi = r_{\mathfrak{X}} \circ \tilde{\varphi}$  en découle immédiatement, de même que la bijectivité de l'application

$$\Psi_{\mathfrak{X}}(Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{An}_k}(Y, \mathfrak{X}_\eta), \quad \varphi \mapsto \tilde{\varphi}.$$

La démonstration est achevée.

Le foncteur « fibre générique » de la catégorie des  $K^\circ$ -schémas formels localement de présentation finie dans celle des espaces  $K$ -analytiques associe à un  $K^\circ$ -schéma formel  $\mathfrak{X}$  l'espace  $K$ -analytique  $\mathfrak{X}_\eta$  et à tout  $K^\circ$ -morphisme  $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  l'unique morphisme d'espaces  $K$ -analytiques  $f_\eta : \mathfrak{X}_\eta \rightarrow \mathfrak{Y}_\eta$  tel que le diagramme de morphismes de sites

$$\begin{CD} \mathfrak{X}_{\eta,G} @>f_\eta>> \mathfrak{Y}_{\eta,G} \\ @Vr_{\mathfrak{X}}VV @VVr_{\mathfrak{Y}}V \\ \mathfrak{X} @>f>> \mathfrak{Y} \end{CD}$$

soit commutatif.

Cette définition fonctorielle de la fibre générique d'un  $K^\circ$ -schéma formel localement de présentation finie est équivalente à la construction décrite par Berkovich dans [5].

**Lemme 1.2.** *Soit  $\mathfrak{X}$  un  $K^\circ$ -schéma formel plat et localement de présentation finie tel que l'espace  $K$ -analytique  $X = \mathfrak{X}_\eta$  soit un espace  $K$ -affinoïde. Le bord de Shilov  $\Gamma(X)$  de  $X$  est contenu dans l'image réciproque par l'application de réduction  $r_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X}_\eta \rightarrow \mathfrak{X}$  de l'ensemble des points génériques (de la fibre spéciale) de  $\mathfrak{X}$ .*

**Démonstration.** Si  $X$  est vide, il n’y a rien à démontrer;  $X$  sera donc non vide dans ce qui suit.

Supposons tout d’abord que  $\mathfrak{X}$  soit affine, d’anneau  $\mathcal{A}$ . L’homomorphisme canonique  $\mathcal{A} \rightarrow A = \mathcal{A} \otimes_{K^\circ} K$  est injectif, à valeurs dans sous- $K^\circ$ -algèbre  $A^\circ$  de  $A$  et identifie cette dernière à la fermeture intégrale de  $\mathcal{A}$  dans  $A$  ([7], paragraphes 6.1.2 et 6.3.4); le morphisme correspondant  $p : \mathrm{Spf}(A^\circ) \rightarrow \mathrm{Spf}(\mathcal{A})$  est donc entier et dominant, et les points génériques de  $\mathrm{Spf}(A^\circ)$  sont exactement les images réciproques des points génériques de  $\mathrm{Spf}(\mathcal{A})$ . Vu le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathrm{Spf}(A^\circ) \\
 & \nearrow r_{\mathcal{A}} & \downarrow p \\
 X = \mathcal{M}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{r_{\mathrm{Spf}(\mathcal{A})}} & \mathrm{Spf}(\mathcal{A})
 \end{array}$$

nous obtenons dans ce cas l’identité entre  $\Gamma(X)$  et l’image réciproque par  $r_{\mathrm{Spf}(\mathcal{A})}$  de l’ensemble des points génériques de  $\mathrm{Spf}(\mathcal{A})$ .

Pour traiter le cas général, il suffit de considérer un recouvrement de type fini  $\mathcal{U}$  de  $\mathfrak{X}$  par des ouverts affines. Pour tout  $U \in \mathcal{U}$ ,  $r_{\mathfrak{X}}^{-1}(U) = (\mathfrak{X}|_U)_\eta$  est un domaine affinoïde de  $X$  dont le bord de Shilov est contenu dans le sous-espace fermé  $r_{\mathfrak{X}}^{-1}(\mathfrak{X}_s^{(0)})$  de  $X$  d’après ce qui précède. Désignant par  $A$  l’algèbre affinoïde de  $X$ ,

$$\max_X |f| = \max_{U \in \mathcal{U}} \max_{r_{\mathfrak{X}}^{-1}(U)} |f|$$

et donc

$$\max_X |f| = \max_{r_{\mathfrak{X}}^{-1}(\mathfrak{X}_s^{(0)})} |f|$$

pour tout élément  $f$  de  $A$ ; vu la définition du bord de Shilov de  $X$  rappelée précédemment, l’inclusion

$$\Gamma(X) \subset r_{\mathfrak{X}}^{-1}(\mathfrak{X}_s^{(0)})$$

en découle immédiatement.

### 1.2. Construction

Rappelons que l’on considère un corps  $k$ , muni de la valeur absolue triviale.

Il existe deux manières différentes d’associer un espace  $k$ -analytique à un  $k$ -schéma localement algébrique  $X$ .

- La première est celle appelée ci-dessus **(1.1.10)**.
- La seconde repose fondamentalement sur la trivialité de la valeur absolue de  $k$  : celle-ci permet en effet de voir  $X$  comme un schéma formel localement de présentation finie sur l’anneau  $k^\circ (= k)$ , et l’on peut alors considérer sa fibre générique au sens de **(1.1.11)**.

La seconde manière de procéder s'étend naturellement au cas d'un  $k$ -schéma formel localement algébrique. Nous allons développer cette observation — ce qui est déjà fait dans l'article [3] — en introduisant une modification terminologique.

(1.2.1) Étant donné un  $k$ -schéma formel localement algébrique  $\mathfrak{X}$ , on désigne par  $\Psi_{\mathfrak{X}}$  le foncteur de la catégorie des espaces  $k$ -analytiques dans celle des ensembles, qui à tout espace  $k$ -analytique  $Y$  associe l'ensemble des morphismes de sites  $k$ -annelés  $\varphi : Y_G \rightarrow \mathfrak{X}$  satisfaisant aux deux conditions suivantes :

- pour tout ouvert affine  $U$  de  $\mathfrak{X}$  et tout domaine affinoïde  $V$  de  $Y$  avec  $\varphi(V) \subset U$ , l'homomorphisme  $\varphi^\# : \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U) \rightarrow \mathcal{O}_{Y_G}(V)$  est *continu* et *borné* :  $\|\varphi^\#(a)\| \leq 1$  pour tout  $a \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$  ;
- pour tout point  $y \in Y$ , l'homomorphisme

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\varphi(y)} \xrightarrow{\varphi_y^\#} \mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow \mathcal{H}(y),$$

à valeurs dans  $\mathcal{H}(y)^\circ$ , induit un homomorphisme local  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\varphi(y)} \rightarrow \mathcal{H}(y)^\circ$ .

**Proposition et Définition 1.3.** *Soit  $\mathfrak{X}$  un  $k$ -schéma formel localement algébrique.*

*Le foncteur  $\Psi_{\mathfrak{X}}$  est représentable par un espace  $k$ -analytique  $\mathfrak{X}^\square$  et un morphisme borné de sites  $k$ -annelés  $r_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X}_G^\square \rightarrow \mathfrak{X}$ . Cet espace  $k$ -analytique est l'espace de Berkovich de  $\mathfrak{X}$ .*

**Démonstration.** Si  $\mathfrak{X}$  est un  $k$ -schéma localement algébrique, le résultat est acquis d'après la Proposition 1.1 ; en particulier, si  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A)$  est le spectre d'une  $k$ -algèbre de type fini discrète, le foncteur  $\Psi_{\mathfrak{X}}$  est représenté par le couple constitué de l'espace  $k$ -affinoïde  $\mathcal{M}(A)$  — la  $k$ -algèbre  $A$  étant vue comme une  $k$ -algèbre de Banach en la munissant de la norme triviale — et du morphisme de réduction  $r_A : \mathcal{M}(A)_G \rightarrow \text{Spec}(A)$ . On pose  $X^\square = \mathcal{M}(A)$  et  $r_X = r_A$ .

Supposons maintenant que  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(\mathcal{A})$  soit le complété d'un  $k$ -schéma algébrique affine  $X = \text{Spec}(A)$  le long d'un sous-schéma fermé  $Y$  défini par un idéal  $\mathfrak{I}$  de  $A$ , de sorte que  $\mathcal{A} = \varprojlim A/\mathfrak{I}^n$ . Voyant  $X$  comme un schéma formel en munissant  $A$  de la topologie discrète (définie par la norme triviale), l'homomorphisme canonique  $A \rightarrow \mathcal{A}$  définit une flèche  $j : \mathfrak{X} \rightarrow X$  dans  $(\text{SchAlg}_k)^\wedge$ , laquelle donne naissance à un morphisme de foncteurs  $\Psi_{\mathfrak{X}} \rightarrow \Psi_X$ . Quels que soient l'espace  $k$ -affinoïde  $Y = \mathcal{M}(B)$  et le morphisme d'espaces  $k$ -analytiques  $\varphi : Y \rightarrow X^\square$  défini par un  $k$ -homomorphisme borné  $\varphi^\# : A \rightarrow B$ , l'image de  $\varphi$  est contenue dans l'ouvert

$$r_X^{-1}(Y) = \{x \in X^\square \mid |a|(x) < 1, a \in A\}$$

de  $X^\square$  si et seulement si

$$|\varphi^\#(a)|_{\text{sp}} = \sup_Y |\varphi^\#(a)| < 1$$

pour tout  $a \in \mathfrak{I}$  ou, de manière équivalente, si et seulement si, pour tout  $a \in \mathfrak{I}$ , la suite des puissances de  $\varphi^\#(a)$  tend vers 0 dans  $B$  (voir [1], Proposition 2.1.4). Il revient au même de dire que l'homomorphisme  $\varphi^\#$  est continu relativement à la topologie  $\mathfrak{I}$ -adique sur  $A$  car l'idéal  $\mathfrak{I}$  est de type fini.

La sous- $k$ -algèbre topologique  $B^\circ$  de  $B$  étant séparée et complète, les assertions suivantes sont par conséquent équivalentes :

- l'image de  $\varphi$  est contenue dans  $r_X^{-1}(Y)$  ;
- le  $k$ -homomorphisme  $\varphi^\# : A \rightarrow B$ , à valeurs dans  $B^\circ$ , se prolonge, nécessairement de manière unique, en un homomorphisme continu et borné de  $\mathcal{A}$  dans  $B$ .

Il en découle immédiatement que le foncteur  $\Psi_{\mathfrak{X}}$  est représenté par l'espace  $k$ -analytique  $\mathfrak{X}^\square$  induit par  $X^\square$  sur l'ouvert  $r_X^{-1}(Y)$  et par le morphisme de sites  $r_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X}^\square \rightarrow \mathfrak{X}$  déduit de  $r_X$ .

Le cas d'un  $k$ -schéma formel localement algébrique  $\mathfrak{X}$  quelconque se déduit du cas affine exactement comme dans la démonstration de la Proposition 1.1.

Si  $\mathfrak{X}$  et  $\mathfrak{Y}$  sont deux  $k$ -schémas formels localement algébriques, tout  $k$ -morphisme de schémas formels  $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  donne lieu à un morphisme d'espaces  $k$ -analytiques  $f^\square : \mathfrak{X}^\square \rightarrow \mathfrak{Y}^\square$ , uniquement déterminé par la condition que le diagramme de morphismes de sites

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{X}_G^\square & \xrightarrow{f^\square} & \mathfrak{Y}_G^\square \\
 r_{\mathfrak{X}} \downarrow & & \downarrow r_{\mathfrak{Y}} \\
 \mathfrak{X} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{Y}
 \end{array}$$

soit commutatif. L'identité  $(g \circ f)^\square = g^\square \circ f^\square$  est évidente pour tous morphismes  $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  et  $g : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{Z}$  et l'on a donc défini un foncteur de la catégorie des  $k$ -schémas formels localement algébriques dans celle des espaces  $k$ -analytiques.

*Remarque 1.4.* (1) Si  $X$  est un  $k$ -schéma localement algébrique, des éléments de comparaison entre les espaces analytiques  $X^{\text{an}}$  et  $X^\square$  seront donnés un peu plus loin (1.3.1). On peut toutefois d'ores et déjà remarquer que l'ensemble  $X^{\text{an}}(K)$  des points de  $X^{\text{an}}$  à valeurs dans une extension non archimédienne  $K$  de  $k$  est exactement l'ensemble  $X(K)$  des  $K$ -points de  $X$  tandis que  $X^\square(K)$  est l'ensemble des  $K^\circ$ -points de  $X$ . En guise d'exemple : si  $X = A_k^n$ , l'ensemble sous-jacent à  $X^{\text{an}}$  est constitué de toutes les semi-normes multiplicatives sur  $k[T_1, \dots, T_n]$  qui prolongent la valeur absolue de  $k$  tandis que celui sous-jacent à  $X^\square$  est formé de toutes les semi-normes multiplicatives sur  $k[T_1, \dots, T_n]$  qui sont majorées par 1 (ces dernières prolongeant nécessairement la valeur absolue de  $k$ ).

(2) Comme cela a déjà été dit, la définition/proposition précédente est la reformulation, dans un cas particulier, de la construction par Berkovich d'une « fibre générique » pour une certaine classe de schémas formels [4]. Le changement terminologique introduit se justifie par le désir de conserver à l'expression « fibre générique » une signification adéquate dans la situation ici considérée.

**Proposition 1.5.** *Considérons un  $k$ -schéma formel localement algébrique  $\mathfrak{X}$ .*

- (1) *Si  $\mathfrak{X}$  est le complété formel d'un  $k$ -schéma localement algébrique  $X$  le long d'un sous-schéma fermé  $Y$  et si  $j : \mathfrak{X} \rightarrow X$  est le morphisme canonique dans  $(\text{SchAlg}_k)^\wedge$ , le morphisme  $j^\triangleright$  réalise un isomorphisme de  $\mathfrak{X}^\triangleright$  sur l'ouvert  $r_{\mathfrak{X}}^{-1}(Y)$  de  $X^\triangleright$  et le diagramme de morphisme de sites  $k$ -annelés*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}_G^\triangleright & \xrightarrow{j_G^\triangleright} & X^\triangleright \\ r_X \downarrow & & \downarrow r_X \\ \mathfrak{X} & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

*est commutatif.*

- (2) *Désignant par  $i_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X}_s \hookrightarrow \mathfrak{X}$  l'immersion fermée canonique, le morphisme  $i_{\mathfrak{X}}^\triangleright : \mathfrak{X}_s^\triangleright \rightarrow \mathfrak{X}^\triangleright$  est une immersion fermée d'espaces  $k$ -analytiques.*

**Démonstration.** (1) Cette assertion a été établie au cours de la démonstration de la proposition 1.3 lorsque le schéma  $X$  est affine et le cas général s'en déduit en considérant un recouvrement de  $X$  par des ouverts affines.

- (2) On se ramène au cas du complété formel  $\mathfrak{X}$  d'un  $k$ -schéma algébrique affine  $X = \text{Spec}(A)$  le long du fermé  $Y = V(\mathcal{J})$  défini par un idéal  $\mathcal{J}$  de  $A$ . La fibre spéciale de  $\mathfrak{X}$  est le  $k$ -schéma algébrique  $Y$  et le composé des morphismes canoniques de  $k$ -schémas formels  $Y = \mathfrak{X}_s \rightarrow \mathfrak{X} \rightarrow X$  est l'immersion fermée définie par l'épimorphisme  $p : A \rightarrow A/\mathcal{J}$ . Il en découle que le composé du morphisme  $i_{\mathfrak{X}}^\triangleright : \mathfrak{X}_s^\triangleright \rightarrow \mathfrak{X}^\triangleright$  par l'immersion ouverte  $\mathfrak{X}^\triangleright \rightarrow X^\triangleright$  est le morphisme de  $Y^\triangleright = \mathcal{M}(A/\mathcal{J})$  dans  $X^\triangleright = \mathcal{M}(A)$  défini par l'épimorphisme  $p$ ; c'est une immersion fermée d'espaces  $k$ -analytiques et il en est donc de même pour  $i_{\mathfrak{X}}$ .

**Proposition 1.6.** *Étant donné un  $k$ -schéma localement algébrique  $X$ , il existe un morphisme d'espaces  $k$ -localement annelés et un seul  $\rho_X : X^\triangleright \rightarrow X$  qui satisfasse à la condition suivante : quel que soit l'ouvert affine  $U$  de  $X$ , la restriction du morphisme  $\rho_X$  au domaine affinoïde  $U^\triangleright$  est le morphisme  $\rho_U : U^\triangleright \rightarrow U$ .*

**Démonstration.** Il suffit de vérifier que les morphismes d'espaces  $k$ -localement annelés  $\rho_U : U^\triangleright \rightarrow U$  associés aux ouverts affines  $U$  de  $X$  se recollent, c'est-à-dire que, pour tous ouverts affines  $V, U$  de  $X$  tels que  $V \subset U$ , le diagramme naturel (dans la catégorie des espaces  $k$ -localement annelés)

$$\begin{array}{ccc} V^\triangleright & \xrightarrow{i^\triangleright} & U^\triangleright \\ \rho_V \downarrow & & \downarrow \rho_U \\ V & \xrightarrow{i} & U \end{array}$$



est commutatif,  $i$  désignant l’immersion ouverte canonique. Tel est bien le cas, car les morphismes d’espaces  $k$ -localement annelés  $\rho_U \circ i^{\rhd}$  et  $i \circ \rho_V$  de  $V^{\rhd}$  dans  $U$  induisent le même homomorphisme de  $\Gamma(U, \mathcal{O}_U) = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$  dans  $\Gamma(V^{\rhd}, \mathcal{O}_{V^{\rhd}}) = \Gamma(V, \mathcal{O}_V) = \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ , à savoir l’homomorphisme de restriction.

(1.2.2) La seconde assertion de la Proposition 1.5 conduit naturellement à la définition de la fibre générique d’un  $k$ -schéma formel localement algébrique.

**Définition et Proposition 1.7.** *Étant donné un  $k$ -schéma formel localement algébrique  $\mathfrak{X}$ , sa fibre générique est l’espace  $k$ -analytique induit par  $\mathfrak{X}^{\rhd}$  sur l’ouvert  $\mathfrak{X}^{\rhd} - \mathfrak{X}_s^{\rhd}$ ; on la note  $\mathfrak{X}_\eta$ .*

*Si  $\mathfrak{X}$  et  $\mathfrak{Y}$  sont deux objets de  $(\mathbf{SchAlg}_k)^\wedge$  et  $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  est un morphisme adique,  $f^{\rhd}(\mathfrak{X}_\eta) \subset \mathfrak{Y}_\eta$  et l’on note  $f_\eta$  le morphisme de  $\mathfrak{X}_\eta$  dans  $\mathfrak{Y}_\eta$  induit par  $f^{\rhd}$ .*

*On dispose ainsi d’un foncteur « fibre générique » de la catégorie  $(\mathbf{SchAlg}_k)^{\text{ad}}$  — dont les objets sont les  $k$ -schémas formels localement algébriques et dont les flèches sont les  $k$ -morphisms adiques — dans la catégorie des espaces  $k$ -analytiques.*

**Démonstration.** Soient  $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  un morphisme adique entre deux objets de  $(\mathbf{SchAlg}_k)^\wedge$  et  $\mathfrak{J}$  un Idéal de définition de  $\mathfrak{Y}$ ; comme  $\mathfrak{J} = f^{-1}(\mathfrak{J})$  est, par hypothèse, un Idéal de définition de  $\mathfrak{X}$ ,  $f^{\rhd}$  envoie l’ouvert  $\mathfrak{X}_\eta = \mathfrak{X}^{\rhd} - V(\mathfrak{J})$  de  $\mathfrak{X}^{\rhd}$  dans l’ouvert  $\mathfrak{Y}_\eta = \mathfrak{Y}^{\rhd} - V(\mathfrak{J})$  de  $\mathfrak{Y}^{\rhd}$ .

*Remarque 1.8.* Au sens de la définition précédente, la fibre générique d’un  $k$ -schéma localement algébrique  $X$  est vide.

Dans tout ce qui suit, et sauf mention expresse du contraire, nous n’emploierons l’expression « fibre générique » qu’au sens de la Définition 1.3.

### 1.3. Propriétés

(1.3.1) L’espace de Berkovich  $X^{\rhd}$  d’un  $k$ -schéma localement algébrique  $X$  possède un certain nombre de propriétés élémentaires, regroupées dans la proposition suivante.

**Proposition 1.9.** *Soit  $X$  un  $k$ -schéma localement algébrique.*

- (1) *Pour tout  $x \in X^{\rhd}$ , le point  $r_X(x)$  de  $X$  est une spécialisation du point  $\rho_X(x) : r_X(x) \in \overline{\{\rho_X(x)\}}$ . Réciproquement, étant donnés des points  $\xi$  et  $\zeta$  dans  $X$  tels que  $\zeta \in \overline{\{\xi\}}$ , il existe un point  $x$  dans  $X^{\rhd}$  tel que  $\rho_X(x) = \xi$  et  $r_X(x) = \zeta$ .*
- (2) *Étant donné un ouvert affine  $U$  de  $X$ , tout point  $x$  de  $\rho_X^{-1}(U)$  définit une semi-norme multiplicative sur  $\mathcal{O}_X(U)$ , bornée si et seulement si  $r_X(x)$  appartient à  $U$ . Le point  $x$  induit en outre une valeur absolue non archimédienne sur le corps  $\kappa(\rho_X(x))$  prolongeant la valeur absolue triviale de  $k$ . Le corps non archimédien  $\mathcal{H}(x)$  est le complété de  $\kappa(\rho_X(x))$  pour cette valeur absolue.*
- (3) *Quel que soit le point  $\xi$  de  $X$ , l’intersection des fibres  $\rho_X^{-1}(\xi)$  et  $r_X^{-1}(\xi)$  est réduite à un point, noté  $\sigma(\xi)$ , auquel correspond la valeur absolue triviale sur le corps  $\kappa(\xi)$ .*

*Tout point  $x$  de  $X^{\rhd}$  tel que la valeur absolue du corps non archimédien  $\mathcal{H}(x)$  soit triviale est de la forme  $\sigma(\xi)$ ,  $\xi \in X$ .*

(4) *Étant donné un point  $\xi$  dans  $X$ , le sous-espace topologique  $r_X^{-1}(\xi)$  de  $X^{\square}$  est localement compact et son adhérence dans  $X^{\square}$  est*

$$\bigcup_{\substack{\xi' \in X \\ \xi' \rightarrow \xi}} r_X^{-1}(\xi').$$

**Démonstration.** Il suffit de démontrer ces assertions lorsque le schéma  $X$  est affine, d’anneau  $A$ .

(1) Puisque  $\rho_A(x) = \{f \in A \mid |f|(x) = 0\} \subset r_A(x) = \{f \in A \mid |f|(x) < 1\}$ ,  $r_A(x)$  est, pour tout point  $x$  de  $X^{\square} = \mathcal{M}(A)$ , une spécialisation de  $\rho_A(x)$  dans  $\text{Spec}(A)$ .

Considérons réciproquement deux points  $\xi, \zeta$  dans  $X$  tels que  $\zeta \in \overline{\{\xi\}}$  et désignons par  $Y$  le sous-schéma fermé intègre de  $X$  de point générique  $\xi$ . Comme ce schéma est noethérien, il existe un anneau de valuation discrète  $R$  et un morphisme  $\text{Spec}(R) \rightarrow Y$  envoyant le point générique sur  $\xi$  et le point fermé sur  $\zeta$  ([9], Chap. II, Sect. 7, Proposition (7.1.7)); si l’on munit le corps des fractions  $K$  de  $R$  d’une valeur absolue associée à la valuation, le morphisme  $\text{Spec}(K) \rightarrow Y \hookrightarrow X$  définit alors un point  $x$  dans  $X^{\square}$  tel que  $\rho_X(x) = \xi$  et  $r_X(x) = \zeta$ .

(2) C’est immédiat.

(3) Quel que soit le point  $x$  de  $X^{\square}$ , l’égalité  $r_X(x) = \rho_X(x) = \xi$  est équivalente à la condition

$$(\forall f \in A), \quad (|f|(\xi) = 0) \iff (|f|(x) = 0) \iff (|f|(x) < 1);$$

il y a donc, pour tout point  $\xi \in X$ , un et un seul point dans  $r_X^{-1}(\xi) \cap \rho_X^{-1}(\xi)$ , à savoir celui défini par la semi-norme multiplicative sur  $A$  provenant, via l’homomorphisme canonique  $A \rightarrow \kappa(\xi)$ , de la valeur absolue triviale sur le corps résiduel  $\kappa(\xi)$  du point  $\xi$ .

Nous pouvons ainsi définir une application  $\sigma$  de  $X$  dans  $X^{\square}$  en posant  $r_X^{-1}(\xi) \cap \rho_X^{-1}(\xi) = \{\sigma(\xi)\}$  pour tout  $\xi \in X$ . Il est clair que l’image de cette application est l’ensemble des points  $x$  de  $X^{\square}$  tels que la valeur absolue du corps non archimédien  $\mathcal{H}(x)$  soit triviale.

(4) Ayant muni l’anneau  $\mathcal{O}_{X,\xi}$  de la norme triviale, l’homomorphisme canonique  $A \rightarrow \mathcal{O}_{X,\xi}$  donne lieu à une application continue et injective  $\iota : \mathcal{M}(\mathcal{O}_{X,\xi}) \rightarrow X^{\square} = \mathcal{M}(A)$ , dont l’image est précisément le sous-espace

$$\bigcup_{\substack{\xi' \in X \\ \xi' \rightarrow \xi}} r_X^{-1}(\xi')$$

de  $X^{\square}$ . L’espace topologique  $\mathcal{M}(\mathcal{O}_{X,\xi})$ , étant le spectre d’un anneau de Banach commutatif, est compact ([1], Theorem 1.2.1); il en découle que  $\iota$  réalise un homéomorphisme sur son image, qui est en particulier un sous-espace fermé de  $X^{\square}$ .

La compacité locale du sous-espace  $r_X^{-1}(\xi)$  de  $X^{\rhd}$  est claire : il s’agit en effet de l’image, par l’homéomorphisme  $\iota$ , du sous-espace

$$\{x \in \mathcal{M}(\mathcal{O}_{X,\xi}) \mid |f(x)| < 1, f \in \mathfrak{m}_\xi\}$$

du compact  $\mathcal{M}(\mathcal{O}_{X,\xi})$  et, l’idéal  $\mathfrak{m}_\xi$  étant de type fini, ce sous-espace est ouvert, donc localement compact.

Pour établir que le sous-espace fermé

$$\bigcup_{\substack{\xi' \in X \\ \xi' \rightarrow \xi}} r_X^{-1}(\xi')$$

de  $X^{\rhd}$  est l’adhérence de  $r_X^{-1}(\xi)$ , il reste à vérifier que tout fermé  $F$  de  $X^{\rhd} = \mathcal{M}(A)$  contenant  $r_X^{-1}(\xi)$  contient également  $r_X^{-1}(U_\xi)$ , où  $U_\xi = \{\xi' \in X \mid \xi' \rightarrow \xi\}$  est l’ensemble des généralisations de  $\xi$  dans  $X$ .

Comme  $F$  est l’intersection des domaines analytiques compacts le contenant, on est ramené au cas où  $F$  est un domaine analytique compact. Soit  $K$  une extension non archimédienne de  $k$  dont la valeur absolue est non triviale et satisfaisant aux deux conditions suivantes :

- $\tilde{K} = k$ ;
- $F_K = p_{K/k}^{-1}(F)$  est une réunion finie de domaines strictement  $K$ -affinoïdes de  $X^{\rhd} \widehat{\otimes}_k K$ ,  $p_{K/k}$  désignant la projection canonique de  $X^{\rhd} \widehat{\otimes}_k K$  sur  $X$ .

L’espace  $K$ -analytique  $X^{\rhd} \widehat{\otimes}_k K$  est la fibre générique (au sens de **1.1.11**) du  $K^\circ$ -schéma formel affine, plat et de présentation finie

$$\mathfrak{X} = X \times_{\text{Spf}(k)} \text{Spf}(K^\circ) = \text{Spf}(A \widehat{\otimes}_k K^\circ)$$

(**1.1.10**), dont la fibre spéciale est canoniquement isomorphe à  $X$ . D’après un théorème de M. Raynaud ([12], Theorem 1.5), il existe un éclatement admissible  $f : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$  et un ouvert  $U$  de  $\mathfrak{Y}$  tels que  $F_K = r_{\mathfrak{Y}}^{-1}(U)$ .

Désignant par  $U_\zeta$  l’ensemble des généralisations d’un point  $\zeta$  de  $\mathfrak{Y}$  (resp. de  $\mathfrak{X}$ ), commençons par vérifier l’égalité

$$f_s^{-1}(U_\xi) = \bigcup_{\zeta \in f_s^{-1}(\xi)} U_\zeta.$$

L’inclusion  $\supset$  est claire car, si  $V$  est un ouvert de  $\mathfrak{X}$  contenant le point  $\xi$ ,  $f_s^{-1}(V)$  est un ouvert de  $\mathfrak{Y}_s$  contenant chacun des points de la fibre  $f_s^{-1}(\xi)$ . L’inclusion réciproque découle de la propriété du morphisme  $f_s$  : étant donné une généralisation  $\xi'$  de  $\xi$  dans  $\mathfrak{X}$  et un point  $\zeta'$  dans  $\mathfrak{Y}_s$  tel que  $f_s(\zeta') = \xi'$ , l’image par  $f_s$  du fermé  $\overline{\{\zeta'\}}$  de  $\mathfrak{Y}_s$  est un fermé de  $\mathfrak{X}$  contenant le point  $\xi'$  et donc également sa spécialisation  $\xi$  ; il existe ainsi un point  $\zeta$  dans  $f_s^{-1}(\xi)$  tel que  $\zeta' \in U_\zeta$ .

La conclusion s'obtient maintenant aisément en considérant le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 X^{\square} \widehat{\otimes}_k K & \xrightarrow{r_{\mathfrak{Y}}} & \mathfrak{Y}_s \\
 p_{K/k} \downarrow & & \downarrow f_s \\
 X^{\square} & \xrightarrow{r_X} & X.
 \end{array}$$

Le fermé  $F_K = p_{K/k}^{-1}(F)$  contient par hypothèse

$$p_{K/k}^{-1}(r_X^{-1}(\xi)) = r_{\mathfrak{Y}}^{-1}(f_s^{-1}(\xi)).$$

Comme  $F_K = r_{\mathfrak{Y}}^{-1}(U)$ ,  $U$  contient ainsi la fibre de  $f_s$  au-dessus du point  $\xi$  et par conséquent l'ensemble

$$\bigcup_{\zeta \in f_s^{-1}(\xi)} U_{\zeta}$$

des généralisations des points de celle-ci; vu l'identité établie au paragraphe précédent,  $U$  contient donc  $f_s^{-1}(U_{\xi})$ . On obtient par suite l'inclusion

$$p_{K/k}^{-1}(r_X^{-1}(U_{\xi})) = r_{\mathfrak{Y}}^{-1}(f_s^{-1}(U_{\xi})) \subset F_K,$$

puis

$$r_X^{-1}(U_{\xi}) \subset F.$$

La démonstration est achevée.

Disons également un mot sur les relations entre les espaces  $k$ -analytiques  $X^{\text{an}}$  et  $X^{\square}$  associés à un  $k$ -schéma localement algébrique  $X$ .

**Proposition 1.10.** *Étant donné un  $k$ -schéma localement algébrique  $X$ , on désigne par  $i_X : X^{\square} \rightarrow X^{\text{an}}$  le morphisme d'espaces  $k$ -analytiques défini par le morphisme d'espaces  $k$ -localement annelés  $\rho_X : X^{\square} \rightarrow X$ .*

- (1) *Pour tout ouvert affine  $U$  de  $X$ , la restriction de  $i_X$  au domaine affinoïde  $U^{\square}$  est un isomorphisme sur un domaine affinoïde de  $X^{\text{an}}$ .*
- (2) *Le morphisme  $i_X$  réalise un isomorphisme de  $X^{\square}$  sur un domaine analytique de  $X^{\text{an}}$  (resp. sur  $X^{\text{an}}$ ) si et seulement si le  $k$ -schéma  $X$  est séparé (resp. propre).*
- (3) *Si  $f : X \rightarrow Y$  est un morphisme de  $k$ -schémas localement algébriques, le diagramme naturel*

$$\begin{array}{ccc}
 X^{\square} & \xrightarrow{i_X} & X^{\text{an}} \\
 f^{\square} \downarrow & & \downarrow f^{\text{an}} \\
 Y^{\square} & \xrightarrow{i_Y} & Y^{\text{an}}
 \end{array}$$

*est commutatif.*

**Démonstration.** (1) Soient  $U$  un ouvert affine de  $X$ , d'anneau  $A$ , et choisissons une présentation  $I \rightarrow k[T_1, \dots, T_n] \rightarrow A$  de ce dernier. Le morphisme

$$i_{\mathbb{A}_k^n} : \mathbb{A}_k^{n, \square} \rightarrow \mathbb{A}_k^{n, \text{an}}$$

réalise un isomorphisme de  $\mathbb{A}_k^{n, \square} = \mathcal{M}(k[T_1, \dots, T_n])$  sur le domaine affinoïde  $E(0, 1) = \{|T_1| \leq 1, \dots, |T_n| \leq 1\}$  de  $\mathbb{A}_k^{n, \text{an}}$ ; comme  $U^{\square}$  (resp.  $U^{\text{an}}$ ) est le sous-espace analytique de  $\mathbb{A}_k^{n, \square}$  (resp.  $\mathbb{A}_k^{n, \text{an}}$ ) défini par l'idéal  $I$  et  $i_X$  est le morphisme induit par  $i_{\mathbb{A}_k^n}$ , il en découle que  $i_X$  réalise un isomorphisme de  $U^{\square}$  sur le domaine analytique  $U^{\text{an}} \cap E(0, 1)$ . Ce dernier est donc en particulier un domaine affinoïde de  $X^{\text{an}}$ .

(2) L'image de  $i_X$  est un domaine analytique de  $X^{\text{an}}$  et  $i_X$  réalise un isomorphisme de  $X^{\square}$  sur son image si et seulement si l'application sous-jacente est injective.

Considérons des points  $x$  et  $y$  dans  $X^{\text{an}}$  et  $X^{\square}$  respectivement et notons  $\underline{x} : \text{Spec}(\mathcal{H}(x)) \rightarrow X$  et  $\underline{y} : \text{Spec}(\mathcal{H}(y)^\circ) \rightarrow X$  les morphismes qu'il définissent. L'égalité  $i_X(y) = x$  a lieu si et seulement si  $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(y)$  et si le diagramme naturel

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(\mathcal{H}(y)) & \xrightarrow{\underline{x}} & X \\ \downarrow & \nearrow \underline{y} & \downarrow \\ \text{Spec}(\mathcal{H}(y)^\circ) & \longrightarrow & \text{Spec}(k) \end{array}$$

est commutatif. La conclusion découle donc d'une application directe du critère valuatif de séparation ([9], Chap. II, Sect. 7, Proposition (7.2.3)) : si  $X$  est séparé (sur  $k$ ), il existe au plus un point  $y$  dans  $X^{\square}$  tel que  $i_X(y) = x$ ; réciproquement, si l'application  $i_X$  est injective, le morphisme structural  $X \rightarrow \text{Spec}(k)$  est séparé. (Notons que, vu le premier point de la proposition précédente et la démonstration du critère valuatif de séparation, il est suffisant de considérer les anneaux de valuation  $\mathcal{H}(y)^\circ$ ,  $y \in X^{\square}$ .)

Utilisant le critère valuatif de propreté ([9], Chap. II, Sect. 7, Théorème (7.3.8)), le même raisonnement permet de montrer que  $i_X$  réalise un isomorphisme de  $X^{\square}$  sur  $X^{\text{an}}$  si et seulement si le  $k$ -schéma  $X$  est propre.

(3) Cette assertion est évidente.

**(1.3.2)** La notion de fibre générique d'un  $k$ -schéma formel localement algébrique  $\mathfrak{X}$  que nous avons introduite à la définition 1.7 a la propriété fondamentale d'être invariante relativement aux éclatements centrés dans la fibre spéciale de  $\mathfrak{X}$ .

**Proposition 1.11.** Soient  $f : X' \rightarrow X$  un morphisme de  $k$ -schémas localement algébriques et  $Y$  un sous-schéma fermé de  $X$ . On désigne par  $\mathfrak{X}$  (resp.  $\mathfrak{X}'$ ) le complété formel de  $X$  (resp.  $X'$ ) le long de  $Y$  (resp.  $f^{-1}(Y)$ ) et on note  $\widehat{f} : \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$  le morphisme (adique) de  $k$ -schémas formels induit par  $f$ .

Si le morphisme  $f$  est propre et s'il réalise un isomorphisme de l'ouvert  $X' - f^{-1}(Y)$  sur l'ouvert  $X - Y$ , le morphisme d'espaces  $k$ -analytiques  $\widehat{f}_\eta : \mathfrak{X}'_\eta \rightarrow \mathfrak{X}_\eta$  est un isomorphisme.

**Démonstration.** Il s'agit de prouver que le morphisme d'espaces  $k$ -analytiques  $f^{\triangleright} : X'^{\triangleright} \rightarrow X^{\triangleright}$  induit un isomorphisme de l'ouvert  $\mathfrak{X}'_{\eta} = r_{X'}^{-1}(f^{-1}(Y)) - (f^{-1}(Y))^{\triangleright}$  sur l'ouvert  $\mathfrak{X}_{\eta} = r_X^{-1}(Y) - Y^{\triangleright}$ . On se ramène immédiatement au cas où le schéma  $X$  est affine, d'anneau  $A$ , et où  $Y = V(g)$ ,  $g \in A$ ; nous procédons alors en deux étapes.

Première étape. L'application sous-jacente au morphisme  $\widehat{f}_{\eta}$  est bijective.

Considérons en effet un point  $x$  dans  $\mathfrak{X}_{\eta}$  et désignons par  $\underline{x} : \text{Spec}(\mathcal{H}(x)^{\circ}) \rightarrow X$  le morphisme correspondant. L'appartenance de  $x$  à  $\mathfrak{X}_{\eta}$  se traduit par la propriété suivante : le point fermé du schéma local  $\text{Spec}(\mathcal{H}(x)^{\circ})$  est envoyé dans le fermé  $Y$  de  $X$  tandis que l'image de son point générique est contenue dans l'ouvert  $X - Y$ . Puisque le morphisme  $f$  réalise un isomorphisme de  $X' - f^{-1}(Y)$  sur  $X - Y$ , il existe un unique morphisme  $\text{Spec}(\mathcal{H}(x)) \rightarrow X'$  localisé dans  $X' - f^{-1}(Y)$  tel que le diagramme

$$\begin{CD} \text{Spec}(\mathcal{H}(x)) @>>> X' \\ @VVV @VVfV \\ \text{Spec}(\mathcal{H}(x)^{\circ}) @>>> X \\ @. @>>> \underline{x} \end{CD}$$

soit commutatif. En outre, comme  $f$  est propre, il existe alors un unique morphisme  $\varphi$  de  $\text{Spec}(\mathcal{H}(x)^{\circ})$  dans  $X'$  tel que  $f \circ \varphi = \underline{x}$ . Le morphisme  $\varphi$  définit un point  $x'$  dans  $X'^{\triangleright} - (f^{-1}(Y))^{\triangleright}$  tel que  $r_{X'}(x') \in f^{-1}(Y)$  et  $f^{\triangleright}(x') = x$  ou, de manière équivalente, un point  $x'$  dans  $\mathfrak{X}'_{\eta}$  tel que  $\widehat{f}_{\eta}(x') = x$ . L'application sous-jacente au morphisme  $\widehat{f}_{\eta}$  est ainsi bijective.

Seconde étape. Nous allons maintenant établir que le morphisme  $f^{\triangleright} : X'^{\triangleright} \rightarrow X^{\triangleright}$  réalise un isomorphisme de l'ouvert  $\mathfrak{X}'_{\eta}$  de  $X'^{\triangleright}$  sur son image dans  $X^{\triangleright}$ ; comme, par définition,  $\widehat{f}_{\eta}$  est la restriction de  $f^{\triangleright}$  à  $\mathfrak{X}'_{\eta}$ , cela conclura la démonstration.

Le schéma  $X'$  est séparé : le morphisme  $f$  est en effet séparé par hypothèse et le schéma  $X$  est séparé puisque qu'anneau affine. En vertu de la Proposition 1.10, nous disposons dans ces conditions d'un diagramme commutatif

$$\begin{CD} X'^{\triangleright} @>>> i_{X'} X'^{\text{an}} \\ @Vf^{\triangleright}VV @VVf^{\text{an}}V \\ X^{\triangleright} @>>> i_X X^{\text{an}} \end{CD}$$

et les morphismes  $i_X, i_{X'}$  réalisent des isomorphismes sur leurs images. Comme  $f$  induit un isomorphisme de  $\Omega' = X' - f^{-1}(Y)$  sur  $\Omega = X - Y$ ,  $f^{\text{an}}$  induit un isomorphisme de l'ouvert

$$\Omega'^{\text{an}} = (X' - f^{-1}(Y))^{\text{an}} = X'^{\text{an}} - f^{-1}(Y)^{\text{an}} = X'^{\text{an}} - (f^{\text{an}})^{-1}(Y^{\text{an}})$$

sur

$$\Omega^{\text{an}} = (X - Y)^{\text{an}} = X^{\text{an}} - Y^{\text{an}},$$

et il en découle que  $f^{\rhd}$  induit un isomorphisme de  $\mathfrak{X}'_{\eta} = \Omega^{\text{an}} - r_{\mathfrak{X}'}^{-1}(f^{-1}(Y))$  sur son image.

(1.3.3) Nous achevons ce premier chapitre en établissant un résultat plus technique dont nous aurons à nous servir ultérieurement.

**Proposition 1.12.** *Soient  $X, Y$  deux  $k$ -schémas localement algébriques et  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme quasi-fini et plat.*

*Quel que soit le point  $\xi$  de  $X$ , le morphisme d'espaces  $k$ -analytiques  $f^{\rhd} : X^{\rhd} \rightarrow Y^{\rhd}$  induit une application du sous-espace topologique  $r_X^{-1}(\xi)$  dans le sous-espace topologique  $r_Y^{-1}(f(\xi))$  qui est surjective, ouverte, propre et à fibres finies.*

**Démonstration.** Il suffit détablir cette assertion lorsque  $X$  et  $Y$  sont quasi-compacts.

Le schéma  $Y$  étant noethérien et le morphisme  $f$  étant de type fini, nous pouvons recourir au chapitre III, Sect. 4 de [9] et appliquer le Corollaire (4.4.5) du Théorème (4.4.3) (« Main Theorem » de Zariski) : il existe un voisinage ouvert de  $\xi$  dans  $X$  isomorphe à un ouvert d'un  $Y$ -schéma fini. Il est donc loisible de supposer que le morphisme  $f$  est fini ; on peut également remplacer  $X$  et  $Y$  par des voisinages affines de  $\xi$  et  $f(\xi)$  respectivement. Sous ces conditions, le morphisme  $f^{\rhd} : X^{\rhd} \rightarrow Y^{\rhd}$  est fini et plat en vertu de la Proposition 3.2.1 de [2] et l'application continue sous-jacente est donc ouverte (Proposition 3.2.7 du même article), surjective et à fibres finies ([1], Corollary 2.1.16). Elle est évidemment propre puisque les espaces topologiques  $X^{\rhd}$  et  $Y^{\rhd}$  sont compacts.

L'image réciproque du sous-espace  $r_Y^{-1}(f(\xi))$  par  $f^{\rhd}$  est la réunion des  $r_X^{-1}(\xi')$ ,  $\xi'$  parcourant l'ensemble des points de la fibre de  $f$  au-dessus de  $f(\xi)$ . La topologie induite sur l'image réciproque  $\Omega$  fait de chacun de ces sous-espaces une partie ouverte et fermée : en effet, quel que soit le point  $\xi'$  dans  $f^{-1}(f(\xi))$ , les sous-espaces

$$\bigcup_{\substack{\zeta \in X \\ \zeta \rightarrow \xi'}} r_X^{-1}(\zeta) \quad \text{et} \quad \bigcup_{\substack{\zeta \in X \\ \xi' \rightarrow \zeta}} r_X^{-1}(\zeta)$$

de  $X^{\rhd}$  sont respectivement fermés (Proposition 1.9) et ouverts (anti-continuité de  $r_X$ ), et tous deux ont pour trace  $r_X^{-1}(\xi')$  sur  $\Omega$ . L'application continue de  $r_X^{-1}(\xi)$  dans  $r_Y^{-1}(f(\xi))$  induite par  $f^{\rhd}$  est donc ouverte et à fibres finies ; elle est également propre, puisque composée de l'immersion propre  $r_X^{-1}(\xi') \hookrightarrow \Omega$  par l'application propre  $f^{\rhd} : \Omega = (f^{\rhd})^{-1}(r_Y^{-1}(f(\xi))) \rightarrow r_Y^{-1}(f(\xi))$ . Pour établir la surjectivité de  $f^{\rhd} : r_X^{-1}(\xi) \rightarrow r_Y^{-1}(f(\xi))$ , il suffit d'observer que l'homomorphisme  $f_{\xi}^{\#} : \mathcal{O}_{Y, f(\xi)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, \xi}$  induit un homomorphisme fini après passage aux complétés ([9], Chap. II, Sect. 6, Proposition (6.2.1) et Chap. I, Sect. 0, 7.4). Soit en effet  $y$  un point dans  $Y^{\rhd}$  tel que  $r_Y(y) = f(\xi)$  et notons  $\chi_y : \mathcal{O}_{Y, f(\xi)} \rightarrow \mathcal{H}(y)$  l'homomorphisme



correspondant ; celui-ci est à valeurs dans l'anneau  $\mathcal{H}(y)^\circ$  des entiers du corps non archimédien  $\mathcal{H}(y)$  et l'homomorphisme  $\chi_y : \mathcal{O}_{Y, f(\xi)} \rightarrow \mathcal{H}(y)^\circ$  est local, donc se prolonge au complété  $\mathfrak{m}_{f(\xi)}$ -adique de  $\mathcal{O}_{Y, f(\xi)}$ . L'anneau  $\widehat{\mathcal{O}_{X, \xi}} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}_{Y, f(\xi)}}} \mathcal{H}(y)$  est une  $\mathcal{H}(y)$ -algèbre finie et non nulle ; si  $K$  est le corps résiduel de l'un des ses idéaux maximaux, il existe un unique prolongement de la valeur absolue de  $\mathcal{H}(y)$  à  $K$  et, comme  $f$  induit un morphisme propre  $\text{Spec}(\widehat{\mathcal{O}_{X, \xi}}) \rightarrow \text{Spec}(\widehat{\mathcal{O}_{Y, f(\xi)}})$ , il existe un (unique) homomorphisme local  $\chi'_y : \widehat{\mathcal{O}_{X, \xi}} \rightarrow K^\circ$  tel que  $\chi'_y \circ f_\xi^\# = \chi_y$ . La semi-norme multiplicative induite par  $\chi'_y$  sur  $\mathcal{O}_{X, \xi}$  est bornée et elle définit un point  $x$  dans  $X^\square$  tel que  $r_X(x) = \xi$  et  $f^\square(x) = y$ .

## 2. L'espace de Berkovich d'une variété torique

Dans ce chapitre,  $k$  est un corps que l'on voit comme un corps non archimédien en le munissant de la valeur absolue triviale. On considère un  $k$ -tore déployé  $T$ , de groupe des caractères  $M = \text{Hom}_{k\text{-Gr}}(T, \mathbb{G}_m)$ , et une  $k$ -variété torique  $X$ , c'est-à-dire une  $k$ -schéma algébrique intègre muni d'une action de  $T$  et possédant une orbite ouverte  $T$ -isomorphe à  $T$ .

Les orbites de  $T$  dans  $X$  sont des sous-schémas intègres localement fermés dont les points génériques forment un sous-ensemble de  $X$ , noté  $\Xi(X)$ . Si  $x$  est un point de  $X$ , on désigne par  $O(x)$  l'orbite de  $T$  dans  $X$  contenant  $x$ .

Pour tout caractère  $m : T \rightarrow \mathbb{G}_m = \text{Spec}(k[S, S^{-1}])$ , on pose  $\chi_m = m^\#(S)$ .

Une structure de *cône rationnel* sur un espace topologique  $C$  est par définition la donnée d'un groupe abélien libre de type fini  $L$  et d'un homomorphisme injectif  $\lambda : L \rightarrow C^0(C, \mathbb{R}_{>0})$  tel que l'application tautologique

$$\lambda^\vee : C \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Ab}}(L, \mathbb{R}_{>0})$$

réalise un homéomorphisme sur un sous-cône rationnel de l'espace vectoriel réel  $\text{Hom}(L, \mathbb{R}_{>0})$ , c'est-à-dire une partie de la forme  $\{u \mid u(\ell_1) \leq 1, \dots, u(\ell_n) \leq 1, \ell_1, \dots, \ell_n \in L\}$  (notation multiplicative).

On dira que  $C$  est *strictement convexe* si  $\lambda^\vee(C)$  ne contient aucune droite. Sous cette condition, il existe un semi-groupe de type fini  $S \subset L$  engendrant  $L$  et tel que l'application  $\lambda^\vee$  réalise un homéomorphisme de  $C$  sur l'ensemble  $\text{Hom}_{\mathbf{Mon}}(S, ]0, 1])$  des morphismes de monoïdes unitaires de  $S$  dans  $]0, 1]$  muni de la topologie engendrée par les évaluations  $(u \mapsto u(s))$ ,  $s \in S$ . La *compactification canonique* de  $C$  est par définition l'immersion ouverte

$$C = \text{Hom}_{\mathbf{Mon}}(S, ]0, 1]) \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Mon}}(S, [0, 1]).$$

### 2.1. L'éventail d'une $k$ -variété torique et sa compactification

**(2.1.1)** L'action de  $T$  sur  $X$  donne naissance à une action du  $k$ -groupe analytique  $T^\square$  sur  $X^\square$ . Le groupe  $T^\square(k) = T(k)$  des  $k$ -points de  $T^\square$  opère par automorphismes sur l'espace  $k$ -analytique  $X^\square$  et l'on dispose en outre d'un endomorphisme remarquable  $\mathfrak{p}$  de l'ensemble sous-jacent à  $X^\square$ .

**Définition 2.1.** Étant donné un point  $x$  dans  $X^{\triangleright}$ ,  $\mathbf{p}(x)$  est l'image par l'application canonique

$$T^{\triangleright} \widehat{\otimes}_k \mathcal{H}(x) = T^{\triangleright} \times \mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) \rightarrow T^{\triangleright} \times X^{\triangleright} \rightarrow X^{\triangleright}$$

de l'unique point de Shilov de l'espace  $\mathcal{H}(x)$ -affinoïde  $T^{\triangleright} \widehat{\otimes}_k \mathcal{H}(x)$ .

*Remarque 2.2.* Soit  $K/k$  une extension non archimédienne.

1. L'espace  $K$ -affinoïde  $E = T^{\triangleright} \widehat{\otimes}_k K$  possède un unique point de Shilov car  $\widetilde{E}$  est le  $\widetilde{K}$ -schéma intègre  $T \otimes_k \widetilde{K}$ .
2. Si  $\alpha : \mathcal{M}(K) \rightarrow X^{\triangleright}$  est un morphisme localisé au point  $x$  de  $X^{\triangleright}$ ,  $\mathbf{p}(x)$  est l'image du point de Shilov de  $T^{\triangleright} \widehat{\otimes}_k K$  par le morphisme

$$T^{\triangleright} \widehat{\otimes}_k K = T^{\triangleright} \times \mathcal{M}(K) \xrightarrow{1 \times \alpha} T^{\triangleright} \times X^{\triangleright} \xrightarrow{m} X^{\triangleright}$$

(où  $m$  est l'action de  $T^{\triangleright}$  sur  $X^{\triangleright}$ ).

La continuité de l'application  $\mathbf{p}$  sera établie un peu plus loin.

**Proposition 2.3.** (i) L'application  $\mathbf{p}$  satisfait à la condition  $\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}$ ; son image  $\mathfrak{S}(X)$  est donc l'ensemble de ses points fixes :

$$\mathfrak{S}(X) = \{x \in X^{\triangleright} \mid \mathbf{p}(x) = x\}.$$

(ii) Si un point  $x$  de  $X^{\triangleright}$  est fixé par  $\mathbf{p}$ , il est fixe sous l'action du groupe  $T(k)$ . L'assertion réciproque est vraie dès que le corps  $k$  est infini.

**Démonstration.** (i) Étant donné un point  $x$  de  $X^{\triangleright}$ , considérons les points de Shilov respectifs  $y$  et  $z$  de  $T^{\triangleright} \times \mathcal{M}(\mathcal{H}(x))$  et  $T^{\triangleright} \times T^{\triangleright} \times \mathcal{M}(\mathcal{H}(x))$  et notons  $\alpha$  le morphisme canonique

$$\mathcal{M}(\mathcal{H}(z)) \rightarrow T^{\triangleright} \times T^{\triangleright} \times X^{\triangleright}$$

défini par le point  $z$ . Nous allons vérifier que les morphismes  $m \circ (m \times 1) \circ \alpha$  et  $m \circ (1 \times m) \circ \alpha$  de  $\mathcal{M}(\mathcal{H}(z))$  dans  $X^{\triangleright}$  sont localisés aux points  $\mathbf{p}(x)$  et  $\mathbf{p}^2(x)$  respectivement, de sorte que la conclusion découlera directement de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} T^{\triangleright} \times T^{\triangleright} \times X^{\triangleright} & \xrightarrow{m \times 1} & T^{\triangleright} \times X^{\triangleright} \\ \downarrow 1 \times m & & \downarrow m \\ T^{\triangleright} \times X^{\triangleright} & \xrightarrow{m} & X^{\triangleright}. \end{array}$$

Observons le fait suivant : quelle que soit l'extension non archimédienne  $K/k$ , le morphisme

$$m \times 1 : T^{\triangleright} \times T^{\triangleright} \times \mathcal{M}(K) \rightarrow T^{\triangleright} \times \mathcal{M}(K)$$

envoie le point de Shilov de  $T^{\square} \times T^{\square} \times \mathcal{M}(K)$  sur celui de  $T^{\square} \times \mathcal{M}(K)$  et, identifiant la fibre de la projection  $\text{pr}_{23} : T^{\square} \times T^{\square} \times \mathcal{M}(K) \rightarrow T^{\square} \times \mathcal{M}(K)$  au-dessus du point de Shilov  $\sigma$  avec  $T^{\square} \times \mathcal{M}(\mathcal{H}(\sigma))$ , le point de Shilov de  $T^{\square} \times T^{\square} \times \mathcal{M}(K)$  coïncide avec celui de  $T^{\square} \times \mathcal{M}(\mathcal{H}(\sigma))$  : en vertu de la caractérisation du bord de Shilov d'un espace strictement  $k$ -affinoïde rappelée en 1.1.7, il s'agit donc d'une reformulation des assertions analogues pour les points génériques des schémas intègres  $T \times T \times \text{Spec}(\tilde{K})$ ,  $T \times \text{Spec}(\tilde{K})$  et  $T \times \text{Spec}(\widehat{\mathcal{H}(\sigma)})$ .

Nous pouvons maintenant achever la démonstration.

– D'après ce que l'on vient de dire, le morphisme  $m \times 1$  envoie le point  $z$  de  $T^{\square} \times T^{\square} \times X^{\square}$  sur le point  $y$  de  $T^{\square} \times X^{\square}$  et le morphisme  $m \circ (m \times 1) \circ \alpha$  est donc localisé au point  $\mathbf{p}(x)$  de  $X^{\square}$ .

– On sait d'autre part que le point  $z$  est envoyé sur  $y$  par la projection  $\text{pr}_{23} : T^{\square} \times T^{\square} \times X^{\square} \rightarrow T^{\square} \times X^{\square}$  et qu'il s'identifie au point de Shilov de  $\text{pr}_{23}^{-1}(y) \simeq T^{\square} \times \mathcal{M}(\mathcal{H}(y))$ . Vu le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} T^{\square} \times T^{\square} \times X^{\square} & \xrightarrow{1 \times m} & T^{\square} \times X^{\square} \\ \text{pr}_{23} \downarrow & & \downarrow \text{pr}_2 \\ T^{\square} \times X^{\square} & \xrightarrow{m} & X^{\square}, \end{array}$$

le morphisme  $\text{pr}_2 \circ (1 \times m) \circ \alpha$  est localisé au point  $m(y) = \mathbf{p}(x)$  de  $X^{\square}$  et  $1 \times m$  envoie  $z$  sur le point de Shilov de  $T^{\square} \times \mathcal{M}(\mathcal{H}(\mathbf{p}(x)))$  ; le morphisme  $m \circ (1 \times m) \circ \alpha$  est donc localisé au point  $\mathbf{p}(\mathbf{p}(x))$  de  $X^{\square}$ .

(ii) Considérons un point  $x$  dans  $X^{\square}$  et un élément  $t$  de  $T^{\square}(k) = T(k)$ . L'automorphisme de  $X^{\square}$  que définit  $t$  est la flèche

$$\underline{t} : X^{\square} = \mathcal{M}(k) \times X^{\square} \xrightarrow{t \times 1} T^{\square} \times X^{\square} \longrightarrow X^{\square}$$

et, désignant également par  $\underline{t}$  l'automorphisme « multiplication par  $t$  » de  $T^{\square}$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} T^{\square} \times \mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) & \longrightarrow & T^{\square} \times X^{\square} & \xrightarrow{m} & X^{\square} \\ \underline{t} \times 1 \downarrow & & \underline{t} \times 1 \downarrow & & \downarrow \underline{t} \\ T^{\square} \times \mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) & \longrightarrow & T^{\square} \times X^{\square} & \xrightarrow{m} & X^{\square} \end{array}$$

est commutatif. Comme l'automorphisme  $\underline{t} \times 1$  de  $T^{\square} \times \mathcal{M}(\mathcal{H}(x))$  fixe nécessairement le point de Shilov de cet espace affinoïde, nous obtenons l'identité

$$\underline{t}(\mathbf{p}(x)) = \mathbf{p}(x)$$

et en déduisons que chacun des points de  $\mathfrak{S}(X) = \mathbf{p}(X^{\square})$  est fixé par le groupe  $T^{\square}(k) = T(k)$ .

Supposons maintenant que le corps  $k$  soit infini et soit  $x$  un point de  $X^\triangleright$  fixé par le groupe  $T^\triangleright(k)$ ; l'application  $T^\triangleright \times \mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) \rightarrow T^\triangleright \times X^\triangleright \rightarrow X^\triangleright$  envoie le sous-ensemble  $T^\triangleright(k) \times \mathcal{M}(\mathcal{H}(x))$  sur le point  $x$ . Cette application étant continue et le point  $x$  étant fermé, tout point de  $T^\triangleright \times \mathcal{M}(\mathcal{H}(x))$  adhérent à  $T^\triangleright(k) \times \mathcal{M}(\mathcal{H}(x))$  a pour image  $x$ . Comme le corps  $k$  est infini, le sous-ensemble  $T(k) \times \text{Spec}(\widehat{\mathcal{H}(x)})$  de  $T \times \text{Spec}(\widehat{\mathcal{H}(x)})$  est dense; il découle alors du lemme suivant que le point de Shilov de  $T^\triangleright \times \mathcal{M}(\mathcal{H}(x))$  est adhérent à  $T^\triangleright(k) \times \mathcal{M}(\mathcal{H}(x))$ , ce qui implique l'égalité  $\mathfrak{p}(x) = x$ .

**Lemme 2.4.** *Soient  $K/k$  une extension non archimédienne et  $\Sigma$  un sous-ensemble de  $T^\triangleright \widehat{\otimes}_k K$ . Si l'image de  $\Sigma$  par l'application de réduction  $r : T^\triangleright \widehat{\otimes}_k K \rightarrow T \otimes_k \tilde{K}$  est dense, le point de Shilov de  $T^\triangleright \widehat{\otimes}_k K$  est adhérent à  $\Sigma$ .*

**Démonstration.** Le point de Shilov  $y$  de  $T^\triangleright \widehat{\otimes}_k K$  est l'unique point dont l'image par l'application de réduction  $r$  est le point générique  $\xi$  du  $\tilde{K}$ -schéma intègre  $T \otimes \tilde{K}$ . Fixons un voisinage ouvert  $\Omega$  de  $y$ ; lorsque  $U$  parcourt l'ensemble  $\mathcal{U}$  des voisinages ouverts de  $\xi$ , les  $r^{-1}(U)$  forment une famille de sous-espaces fermés de  $T^\triangleright \widehat{\otimes}_k K$  d'intersection vide avec le compact  $T \widehat{\otimes}_k K - \Omega$  et il existe donc  $U \in \mathcal{U}$  tel que  $r^{-1}(U) \subset \Omega$ . Si le sous-ensemble  $r(\Sigma)$  de  $T \otimes_k \tilde{K}$  est dense,  $\Sigma \cap \Omega \neq \emptyset$  et le point de Shilov de  $T^\triangleright \widehat{\otimes}_k K$  est adhérent à  $\Sigma$ .

Quelle que soit l'extension non archimédienne  $K/k$ , le point de Shilov de l'espace  $K$ -affinoïde  $T \widehat{\otimes}_k K$  est l'unique élément de l'image réciproque du point générique du  $\tilde{K}$ -schéma intègre  $T \otimes_k \tilde{K}$  par l'application de réduction  $T^\triangleright \widehat{\otimes}_k K \rightarrow T \otimes_k \tilde{K}$ . Cela suggère de considérer l'application  $p : X \rightarrow X$ , associant à un point  $x \in X$  l'image du point générique de  $T \otimes_k \kappa(x)$  par l'application canonique

$$T \otimes_k \kappa(x) \rightarrow T \times X \rightarrow X.$$

- Proposition 2.5.** (1) *L'application  $p$  est un endomorphisme de l'espace topologique sous-jacent à  $X$ , vérifiant  $p^2 = p$ .*  
 (2) *Si  $x$  est un point de  $X$ ,  $p(x)$  est le point générique de l'orbite de  $T$  dans  $X$  contenant  $x$ .*  
 (3) *Les diagrammes naturels*

$$\begin{array}{ccc} X^\triangleright & \xrightarrow{p} & X^\triangleright \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho \\ X & \xrightarrow{p} & X \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} X^\triangleright & \xrightarrow{p} & X^\triangleright \\ r \downarrow & & \downarrow r \\ X & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

sont commutatifs.

**Démonstration.** (2) L'orbite d'un point  $x$  de  $X$  sous  $T$  est une partie localement fermée de  $X$  qui coïncide avec l'image du morphisme

$$T \otimes_k \kappa(x) \longrightarrow T \times X \xrightarrow{m} X ;$$

comme le schéma  $T \otimes_k \kappa(x)$  est irréductible, cette orbite est irréductible et  $p(x)$  en est le point générique.

(3) Fixons un point  $x$  dans  $X^\triangleright$ . Identifiant  $T^\triangleright \times X^\triangleright$  et  $(T \times X)^\triangleright$  via l'isomorphisme canonique  $(T \times X)^\triangleright \xrightarrow{\sim} T^\triangleright \times X^\triangleright$ , les diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
 T^\triangleright \times X^\triangleright & \xrightarrow{\text{pr}_2} & X^\triangleright \\
 \rho \downarrow & & \downarrow \rho \\
 T \times X & \xrightarrow{\text{pr}_2} & X
 \end{array}
 \quad \text{et} \quad
 \begin{array}{ccc}
 T^\triangleright \times X^\triangleright & \xrightarrow{m} & X^\triangleright \\
 \rho \downarrow & & \downarrow \rho \\
 T \times X & \xrightarrow{m} & X
 \end{array}$$

sont commutatifs. On déduit du premier que  $\rho$  envoie le point de Shilov de  $T^\triangleright \times \mathcal{M}(\mathcal{H}(x))$  — identifié à la fibre  $\text{pr}_2^{-1}(x)$  — sur le point générique de  $T \times \text{Spec}(\kappa(\rho(x)))$ , et du second découle alors l'égalité

$$p(\rho(x)) = \rho(\mathbf{p}(x)).$$

On prouve de même l'égalité  $p(r(x)) = r(\mathbf{p}(x))$ .

(1) La continuité de l'application  $p$  se déduit facilement du point 2 : étant donné un fermé  $F \subset X$ ,  $p^{-1}(F)$  est la réunion des orbites  $O(\xi)$ ,  $\xi \in \Xi(X) \cap F$ ;  $c'$  est également la réunion de leurs adhérences, et il s'agit donc bien d'un sous-ensemble fermé de  $X$  puisque l'ensemble  $\Xi(X) \cap F$  est fini.

L'identité  $p^2 = p$  découle trivialement de l'assertion 2.

**Corollaire 2.6.** *Pour tout point  $\xi \in \Xi(X)$ ,*

$$\mathfrak{S}(X) \cap \rho^{-1}(O(\xi)) = \mathfrak{S}(X) \cap \rho^{-1}(\xi) \quad \text{et} \quad \mathfrak{S}(X) \cap r^{-1}(O(\xi)) = \mathfrak{S}(X) \cap r^{-1}(\xi).$$

**Démonstration.** Ce sont des conséquences directes des Propositions 2.3 et 2.5 : si  $x$  est un point de  $\mathfrak{S}(X)$  tel que  $\rho(x)$  appartienne à l'orbite  $O(\xi)$ ,  $x = \mathbf{p}(x)$  et  $\rho(\mathbf{p}(x)) = p(\rho(x))$  est le point générique de celle-ci, c'est-à-dire  $\xi$ . On prouve de même l'égalité  $\mathfrak{S}(X) \cap r^{-1}(O(\xi)) = \mathfrak{S}(X) \cap r^{-1}(\xi)$ .

*Remarque 2.7.* Le point de Shilov  $t_0$  de  $T^\triangleright$  est « culminant » (*peaked*) au sens de Berkovich — quelle que soit l'extension non archimédienne  $K$  de  $k$ , la norme de la  $k$ -algèbre de Banach  $\mathcal{H}(x) \widehat{\otimes}_k K$  est multiplicative — et  $\mathbf{p}$  n'est pas autre chose que l'application

$$X^\triangleright \rightarrow X^\triangleright, \quad x \mapsto t_0 * x$$

définie au paragraphe 5.2 de [1].

Nous allons maintenant décrire explicitement le sous-ensemble  $\mathfrak{S}(X)$  de  $X^\triangleright$ .

**(2.1.2)** Désignons par  $X_0$  l'orbite ouverte de  $T$  dans  $X$  et soit  $V$  un ouvert affine invariant de  $X$ ;  $X_0$  est contenue dans  $V$  et s'identifie à l'orbite ouverte de  $V$  vu comme variété torique sous  $T$ . Fixons une immersion ouverte équivariante

$j : T \hookrightarrow X$ ;  $j(T) = X_0$  et l'homomorphisme  $j^\# : \Gamma(V, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(T, \mathcal{O}_T) = k[M]$  identifie  $\Gamma(V, \mathcal{O}_X)$  à l'algèbre  $k[S]$  d'un semi-groupe de type fini  $S \subset M$  engendrant  $M$ . Notons que  $j^\#$  réalise un isomorphisme du groupe  $\Gamma(X_0, \mathcal{O}_X^\times)$  sur le groupe  $\Gamma(T, \mathcal{O}_T^\times) = k^\times M$ , donc de  $\Gamma(X_0, \mathcal{O}_X^\times)/k^\times$  sur  $M$ , et que le semi-groupe  $S$  est l'image de  $\Gamma(V, \mathcal{O}_X) \cap \Gamma(X_0, \mathcal{O}_X^\times)$ . Observons enfin que, via  $j^\#$ , l'action de  $T$  sur  $V$  provient de l'homomorphisme

$$k[S] \rightarrow k[S] \otimes_k k[M], \quad \sum_{m \in S} a_m \chi_m \mapsto \sum_{m \in S} a_m \chi_m \otimes \chi_m.$$

On désigne par  $\text{Hom}_{\text{Mon}}(S, [0, 1])$  l'ensemble des morphismes de monoïdes unitaires de  $S$  dans  $[0, 1]$  — c'est-à-dire les applications  $u : S \rightarrow [0, 1]$  telles que  $u(s + s') = u(s)u(s')$  et  $u(0) = 1$  — muni de la topologie engendrée par les évaluations ( $u \mapsto u(s)$ ) que définissent les éléments de  $S$ .

**Lemme 2.8.** (1) *L'application  $\mathbf{p}$  stabilise le sous-ensemble  $V^\rhd$  de  $X^\rhd$  et, quel que soit le point  $x \in V^\rhd$ ,  $\mathbf{p}(x)$  est le point de  $V^\rhd$  correspondant à la semi-norme multiplicative*

$$k[S] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \sum_{m \in S} a_m \chi_m \mapsto \max_{m \in S} |a_m \chi_m|(x).$$

(2) *Pour tout point  $x \in V^\rhd \cap \rho^{-1}(X_0)$ ,  $\mathbf{p}^{-1}(\mathbf{p}(x))$  est un domaine affinoïde dont  $\mathbf{p}(x)$  est l'unique point de Shilov.*

**Démonstration.** (1) La première assertion découle simplement de ce que l'action de  $T^\rhd$  sur  $X^\rhd$  stabilise  $V^\rhd$ . La seconde est de vérification immédiate : le point de Shilov de  $T^\rhd \widehat{\otimes}_k \mathcal{H}(x) = \mathcal{M}(\mathcal{H}(x)\{M\})$  est défini par la semi-norme

$$\mathcal{H}(x)\{M\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \sum_{m \in M} a_m \chi_m \mapsto \max_m |a_m|$$

et le point  $\mathbf{p}(x)$  correspond donc à la semi-norme

$$k[S] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \sum_{m \in S} a_m \chi_m \mapsto \max_m |a_m \chi_m(x)| = \max_m |a_m \chi_m|(x)$$

provenant de l'homomorphisme

$$k[S] \rightarrow k[S] \otimes_k k[M] \rightarrow \mathcal{H}(x)\{M\}, \quad \sum_{m \in S} a_m \chi_m \mapsto \sum_{m \in S} a_m \chi_m(x) \chi_m.$$

(2) Quel que soit le point  $x$  de  $V^\rhd$ ,  $\mathbf{p}^{-1}(\mathbf{p}(x))$  est, d'après ce qui précède, le sous-ensemble  $\{|\chi_m| = |\chi_m|(x), m \in S\}$  de  $V^\rhd$ . Si  $x \in \rho^{-1}(X_0)$ ,  $|\chi_m|(x) \neq 0$  pour tout  $m \in S$  et, comme le semi-groupe  $S$  est de type fini, il s'agit alors bien d'un domaine affinoïde de  $V^\rhd$ . Le fait que le bord de Shilov de  $\mathbf{p}^{-1}(\mathbf{p}(x))$  soit le singleton  $\{\mathbf{p}(x)\}$  est une conséquence immédiate de ce que  $\mathbf{p}^{-1}(\mathbf{p}(x)) \widehat{\otimes}_k \mathcal{H}(x) \simeq \mathcal{H}(x)\{M\}$ .

**Proposition 2.9.** (1) *L'application  $\mathbf{p}$  est continue. Il s'agit donc d'une rétraction de  $X^{\square}$  sur le sous-espace fermé  $\mathfrak{S}(X)$ .*

(2) *Pour tout élément  $u$  de  $\text{Hom}_{\text{Mon}}(\mathbb{S}, [0, 1])$ , l'application*

$$J(u) : k[\mathbb{S}] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \sum_{m \in \mathbb{S}} a_m \chi_m \mapsto \max_{m \in \mathbb{S}} |a_m| u(m)$$

*est une semi-norme multiplicative bornée et l'application  $J$  de  $\text{Hom}_{\text{Mon}}(\mathbb{S}, [0, 1])$  dans  $V^{\square}$  ainsi obtenue réalise un homéomorphisme sur le sous-espace fermé  $\mathfrak{S}(V) = \mathfrak{S}(X) \cap V^{\square}$  de  $V^{\square}$ .*

**Démonstration.** (1) Si  $U \subset X$  est un ouvert affine invariant et  $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ , la fonction réelle  $|f| \circ \mathbf{p}$  sur  $V^{\square}$  est continue en vertu du lemme précédent. La restriction de  $\mathbf{p}$  au fermé  $U^{\square}$  est donc continue et, puisque  $X$  est recouvert par des ouverts affines invariants, l'application  $\mathbf{p}$  est continue. Comme l'espace topologique sous-jacent à  $X^{\square}$  est séparé, l'ensemble  $\mathfrak{S}(X)$  des points fixes de  $\mathbf{p}$  est fermé et  $\mathbf{p}$  est une rétraction de  $X^{\square}$  sur  $\mathfrak{S}(X)$  en vertu de l'identité  $\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}$ .

(2) La première assertion se vérifie facilement : étant donnée une application  $u : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , l'application

$$J(u) : k[\mathbb{S}] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \sum_{m \in \mathbb{S}} a_m \chi_m \mapsto \max_m |a_m| u(m)$$

est une semi-norme multiplicative bornée si et seulement si  $u(\mathbb{S}) \subset [0, 1]$ . L'application  $J$  de  $\text{Hom}_{\text{Mon}}(\mathbb{S}, [0, 1])$  dans  $V^{\square}$  ainsi définie est continue car, pour tout élément  $f = \sum_{m \in \mathbb{S}} a_m \chi_m \in k[\mathbb{S}]$ , la fonction réelle

$$u \mapsto \max_m |a_m| u(m)$$

sur  $\text{Hom}_{\text{Mon}}(\mathbb{S}, [0, 1])$  est continue. L'injectivité de  $J$  est évidente puisque  $u(m) = |\chi_m|(J(u))$  pour tout  $m \in \mathbb{M}$  et il s'agit donc d'un homéomorphisme du compact  $\text{Hom}_{\text{Mon}}(\mathbb{S}, [0, 1])$  sur son image dans  $V^{\square}$ . Le lemme précédent montre que celle-ci contient  $\mathfrak{S}(V) = \mathfrak{S}(X) \cap V^{\square}$ . Il fournit également l'inclusion réciproque : pour tout  $u \in \text{Hom}_{\text{Mon}}(\mathbb{S}, [0, 1])$ ,  $\mathbf{p}(J(u))$  est le point de  $V^{\square}$  correspondant à la semi-norme

$$k[\mathbb{S}] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \sum_{m \in \mathbb{S}} a_m \chi_m \mapsto \max_m |a_m| \|\chi_m\|(J(u)) = \max_m |a_m| u(m),$$

donc  $\mathbf{p}(J(u)) = J(u)$  et  $J(u)$  est ainsi un point de  $\mathfrak{S}(V)$ .

Posons  $\mathfrak{S}_0(X) = \mathfrak{S}(X) \cap \rho^{-1}(X_0)$  et  $\mathfrak{S}_0(V) = \mathfrak{S}(V) \cap \rho^{-1}(X_0) = \mathfrak{S}_0(X) \cap V^{\square}$ . L'application  $J : \text{Hom}_{\text{Mon}}(\mathbb{S}, [0, 1]) \rightarrow \mathfrak{S}(V)$  introduite au point 2 de la proposition précédente réalise un homéomorphisme de l'ouvert  $\text{Hom}_{\text{Mon}}(\mathbb{S}, ]0, 1])$  sur  $\mathfrak{S}_0(V)$  — car  $\rho^{-1}(X_0) \cap V^{\square}$  est précisément l'ouvert de  $V^{\square}$  défini par les conditions  $\chi_m \neq 0, m \in \mathbb{S}$  — et munit donc  $\mathfrak{S}_0(V)$  d'une structure naturelle de cône rationnel strictement convexe. En vertu de la discussion précédant le Lemme 2.8, cette structure est, de manière équivalente, définie par l'application canonique

$$\Gamma(X_0, \mathcal{O}_X^{\times})/k^{\times} \rightarrow C^0(\mathfrak{S}_0(V), \mathbb{R}_{>0}), f \mapsto |f|$$



et elle est donc indépendante du choix de l'immersion ouverte équivariante  $j : T \hookrightarrow X$ . Nous venons ainsi d'associer à tout ouvert affine invariant  $V \subset X$  un cône rationnel strictement convexe dont  $\mathfrak{S}_0(V) = \mathfrak{S}(V) \cap \rho^{-1}(X_0)$  est l'ensemble sous-jacent.

**Proposition 2.10.** *Soit  $V \subset X$  un ouvert affine invariant et rappelons que  $r$  désigne l'application de réduction  $V \twoheadrightarrow V$ .*

- (1) *Pour tout ouvert affine invariant  $U \subset V$ ,  $\mathfrak{S}_0(U)$  est une face du cône  $\mathfrak{S}_0(V)$ , d'ensemble sous-jacent  $\mathfrak{S}_0(V) \cap U \twoheadrightarrow$ , et la correspondance  $U \mapsto \mathfrak{S}_0(U)$  réalise une bijection de l'ensemble des ouverts affines invariants de  $V$  sur l'ensemble des faces du cône  $\mathfrak{S}_0(V)$ .*
- (2) *La correspondance  $\xi \mapsto \mathfrak{S}_0(V) \cap r^{-1}(\xi)$  réalise une bijection de l'ensemble  $\Xi(V) = \Xi(X) \cap V$  des points génériques des orbites de  $T$  dans  $V$  sur l'ensemble des intérieurs des faces du cône  $\mathfrak{S}_0(V)$ .*
- (3) *L'intérieur de  $\mathfrak{S}_0(V)$  correspond à l'unique orbite fermée dans  $V$ .*

**Démonstration.** (1) Toute face  $F$  du cône  $\text{Hom}_{\text{Mon}}(S, ]0, 1])$  s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme

$$F = \{u \in \text{Hom}_{\text{Mon}}(S, ]0, 1]) \mid u|_{P_F} = 1\},$$

où  $P_F$  est une partie de  $S$  contenant 0 et telle que

$$(\forall s, s' \in S, s + s' \in P_F \iff s, s' \in P_F).$$

La face  $F$  s'identifie en outre canoniquement au cône rationnel strictement convexe  $\text{Hom}_{\text{Mon}}(S_F, ]0, 1])$ ,  $S_F$  étant le semi-groupe  $S - P_F \subset M$ , et la correspondance  $F \mapsto S_F$  réalise une bijection de l'ensemble des faces de  $\text{Hom}_{\text{Mon}}(S, ]0, 1])$  sur l'ensemble des semi-groupes de type fini dans  $M$  contenant  $S$ . Ces semi-groupes  $S'$  correspondent biunivoquement aux ouverts affines invariants  $U \subset V$ , de telle sorte que le cône  $\mathfrak{S}_0(U)$  s'identifie à  $\text{Hom}_{\text{Mon}}(S', ]0, 1])$ , et l'on établit ainsi que la correspondance  $U \mapsto \mathfrak{S}_0(U) = \mathfrak{S}_0(V) \cap U \twoheadrightarrow$  réalise une bijection de l'ensemble des ouverts affines invariants de  $V$  sur l'ensemble des faces du cône  $\mathfrak{S}_0(V)$ .

(2) Si  $F$  est une face du cône  $\mathfrak{S}_0(V) = \text{Hom}_{\text{Mon}}(S, ]0, 1])$ , le sous-schéma localement fermé et intègre  $O_F$  de  $V$  défini par l'annulation des sections  $\chi_m$ ,  $m \in S - P_F$ , et par l'inversibilité des sections  $\chi_m$ ,  $m \in P_F$ , est une orbite sous  $T$  dans  $V$ . Lorsque  $F$  parcourt l'ensemble des faces de  $\mathfrak{S}_0(V)$ , les  $O_F$  recouvrent  $V$  et toute orbite de  $T$  dans  $V$  est donc de cette forme. L'image réciproque de  $O_F$  par l'application de réduction  $r$  étant définie par les conditions  $|\chi_m| < 1$  pour  $m \in S - P_F$  et  $|\chi_m| = 1$  pour  $m \in P_F$ , l'ensemble  $\mathfrak{S}_0(V) \cap r^{-1}(O_F)$  est précisément l'intérieur de la face  $F$ . Vu le Corollaire 2.6, la correspondance  $\xi \mapsto \mathfrak{S}_0(V) \cap r^{-1}(\xi)$  réalise par conséquent une bijection de l'ensemble  $\Xi(V) = \Xi(X) \cap V \twoheadrightarrow$  des points génériques des orbites de  $T$  dans  $V$  sur l'ensemble des intérieurs des faces du cône  $\mathfrak{S}_0(V)$ .

(3) Si  $\xi \in \Xi(V)$  est le point générique d'une orbite fermée de  $T$  dans  $V$ ,  $\mathfrak{S}_0(V) \cap r^{-1}(\xi) = \mathfrak{S}_0(V) \cap r^{-1}(O(\xi))$  est l'intérieur d'une face de  $\mathfrak{S}_0(V)$  en vertu du point 2; c'est par ailleurs une partie ouverte de  $\mathfrak{S}_0(V)$  puisque l'application  $r$  est anticontinue et  $\mathfrak{S}_0(V) \cap r^{-1}(\xi)$  est donc l'intérieur de  $\mathfrak{S}_0(V)$ . Réciproquement,

l'intérieur du cône  $\mathfrak{S}_0(V)$  correspond bien à une orbite fermée de  $T$  dans  $V$ , à savoir celle définie par l'annulation des sections  $\chi_m$ ,  $m$  parcourant l'ensemble des éléments de  $S$  tels que  $-m \notin S$ .

*Remarque 2.11.* Étant donnée une face  $F$  du cône  $\mathfrak{S}_0(V)$ , correspondant à un ouvert invariant  $U$  de  $V$ , l'orbite associée à l'intérieur de  $F$  est l'unique orbite fermée de  $U$  (il suffit pour le voir d'invoquer l'assertion 3 en remplaçant  $V$  par  $U$ ).

Lorsque  $V$  parcourt l'ensemble des ouverts affines invariants de la variété torique  $X$ , les cônes rationnels strictement convexes  $\mathfrak{S}_0(V)$  recouvrent l'ouvert  $\mathfrak{S}_0(X)$  de  $\mathfrak{S}(X)$  et, si  $U, V$  sont deux tels ouverts,

$$\mathfrak{S}_0(U) \cap \mathfrak{S}_0(V) = \mathfrak{S}_0(X) \cap U^{\rhd} \cap V^{\rhd} = \mathfrak{S}_0(U \cap V)$$

est une face commune des cônes  $\mathfrak{S}_0(U)$  et  $\mathfrak{S}_0(V)$ . Le sous-espace  $\mathfrak{S}_0(X)$  de  $X^{\rhd}$ , muni de la collection des cônes rationnels strictement convexes  $\mathfrak{S}_0(V)$  associés aux ouverts affines invariants  $V$  de  $X$ , est ainsi une réalisation intrinsèque de l'éventail de la variété torique  $X$  dans son espace de Berkovich  $X^{\rhd}$ .

(2.1.3) Le sous-espace fermé  $\mathfrak{S}(X)$  de  $X^{\rhd}$  est l'adhérence de  $\mathfrak{S}_0(X)$  (dans  $X^{\rhd}$ ): en effet, comme  $\mathfrak{S}_0(X)$  est l'image de l'ouvert dense  $\rho^{-1}(X_0)$  par l'application continue  $\mathbf{p} : X^{\rhd} \rightarrow X^{\rhd}$ ,  $\mathfrak{S}(X) = \mathbf{p}(X^{\rhd})$  est contenu dans l'adhérence de  $\mathfrak{S}_0(X)$ , laquelle est trivialement contenue dans  $\mathfrak{S}(X)$ .

**Proposition 2.12.** *Quel que soit l'ouvert affine invariant  $U$  de  $X$ ,  $\mathfrak{S}(U) = \mathfrak{S}(X) \cap U^{\rhd}$  est l'adhérence de  $\mathfrak{S}_0(U)$  dans  $X^{\rhd}$  et l'immersion ouverte  $\mathfrak{S}_0(U) \hookrightarrow \mathfrak{S}(U)$  est la compactification canonique du cône strictement convexe  $\mathfrak{S}_0(U)$ .*

**Démonstration.** On sait que  $\mathfrak{S}(U)$  est l'adhérence de  $\mathfrak{S}_0(U)$  dans  $U^{\rhd}$ ; comme  $U^{\rhd}$  est un sous-espace fermé de  $X^{\rhd}$ , c'est également son adhérence dans  $X^{\rhd}$ .

Si  $S \subset M$  est le semi-groupe associé à  $U$ , on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(S, [0, 1]) & \longrightarrow & \mathfrak{S}(U) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(S, ]0, 1]) & \longrightarrow & \mathfrak{S}_0(U) \end{array}$$

dont les flèches verticales sont les inclusions canoniques et dont les flèches horizontales sont des homéomorphismes, celle du bas réalisant en outre un isomorphisme de cônes rationnels. L'immersion  $\mathfrak{S}_0(U) \hookrightarrow \mathfrak{S}(U)$  est donc bien la compactification canonique du cône rationnel strictement convexe  $\mathfrak{S}_0(U)$ .

On voit ainsi que  $\mathfrak{S}(X)$  n'est autre que la compactification canonique de l'éventail de la variété torique  $X$ .

La description du bord de  $\mathfrak{S}(X)$  est aisée et reflète la stratification de  $X$  en orbites, cette fois à travers l'application  $\rho$ . Observons que, pour tout point  $\xi \in \Xi(X)$ , l'adhérence  $\overline{O(\xi)}$  de l'orbite  $O(\xi) \subset X$  est une variété torique sous un quotient de  $T$ .

**Proposition 2.13.** *Le sous-espace fermé  $\mathfrak{S}(X)$  de  $X^{\triangleright}$  est la réunion disjointe des éventails  $\mathfrak{S}_0(\overline{O(\xi)})$  des adhérences des orbites de  $T$  dans  $X$  :*

$$\mathfrak{S}(X) = \bigcup_{\xi \in \Xi(X)} \mathfrak{S}_0(\overline{O(\xi)}).$$

En outre, pour tout point  $\xi$  dans  $\Xi(X)$ ,  $\mathfrak{S}_0(\overline{O(\xi)}) = \mathfrak{S}(X) \cap \rho^{-1}(O(\xi))$ .

**Démonstration.** Étant donné un élément  $\xi$  de  $\Xi(X)$ , désignons par  $Y$  l'adhérence de l'orbite  $O(\xi)$  munie de la structure de sous-schéma fermé réduit de  $X$  et soit  $T'$  le tore quotient de  $T$  tel que  $Y$  soit une variété torique sous  $T'$ . On dispose d'un diagramme commutatif naturel

$$\begin{array}{ccc} T^{\triangleright} \times Y^{\triangleright} & \xrightarrow{m_X} & Y^{\triangleright} \\ \pi \times \text{id} \downarrow & \nearrow m_Y & \\ T'^{\triangleright} \times Y^{\triangleright} & & \end{array}$$

où  $\pi : T^{\triangleright} \rightarrow T'^{\triangleright}$  est la projection canonique,  $m_X$  est la restriction de l'action de  $T^{\triangleright}$  sur  $X^{\triangleright}$  et  $m_Y$  est l'action de  $T'^{\triangleright}$  sur  $Y^{\triangleright}$ . Pour toute extension non archimédienne  $K/k$ , l'application  $\pi_K : T^{\triangleright} \otimes_k K \rightarrow T'^{\triangleright} \otimes_k K$  envoie le point de Shilov de la source sur celui du but. Il en découle que l'endomorphisme  $\mathbf{p}_Y : Y^{\triangleright} \rightarrow Y^{\triangleright}$  obtenu en considérant  $Y$  comme une variété torique sous  $T'$  coïncide avec la restriction de l'endomorphisme  $\mathbf{p}_X : X^{\triangleright} \rightarrow X^{\triangleright}$  (considéré jusqu'ici) à l'image  $\rho^{-1}(Y)$  de l'immersion canonique  $Y^{\triangleright} \rightarrow X^{\triangleright}$ , laquelle réalise donc un homéomorphisme de  $\mathfrak{S}(Y)$  sur  $\mathfrak{S}(X) \cap \rho^{-1}(Y)$ .

Comme  $O(\xi) = Y_0$ ,  $\mathfrak{S}_0(Y)$  s'identifie canoniquement à  $\mathfrak{S}(X) \cap \rho^{-1}(O(\xi))$  et, puisque  $X$  est la réunion disjointe des orbites  $O(\xi)$ ,  $\xi \in \Xi(X)$ ,

$$\mathfrak{S}(X) = \bigcup_{\xi \in \Xi(X)} \mathfrak{S}(X) \cap \rho^{-1}(O(\xi)) = \bigcup_{\xi \in \Xi(X)} \mathfrak{S}_0(\overline{O(\xi)}).$$

(2.1.4) Nous aurons ultérieurement à utiliser le résultat suivant.

**Proposition 2.14.** *Soit  $X$  une  $k$ -variété torique sous  $T$ , affine et normale. Étant donnée une demi-droite rationnelle  $D$  dans le cône  $\mathfrak{S}_0(X)$  de  $X$  qui n'est contenue dans aucune face stricte, il existe une variété torique normale  $X'$  sous  $T$ , un morphisme propre et équivariant  $f : X' \rightarrow X$  ainsi qu'un point  $\xi' \in \Xi(X')$  tels que les conditions suivantes soient vérifiées.*

– Le morphisme  $f^{\triangleright}$  induit un homéomorphisme de  $\mathfrak{S}_0(X')$  sur  $\mathfrak{S}_0(X)$  qui identifie  $D$  à l'adhérence de  $\mathfrak{S}_0(X') \cap r_{X'}^{-1}(\xi')$  dans  $\mathfrak{S}_0(X')$ .

– Le point  $\xi = f(\xi')$  appartient à  $\Xi(X)$  et

$$\overline{\{\xi'\}} = f^{-1}(\overline{\{\xi\}}).$$

– Muni de la structure de sous-schéma fermé réduit de  $X'$ ,  $\overline{\{\xi'\}}$  est normal.

**Démonstration.** Quelle que soit la face stricte  $F$  du cône  $\mathfrak{S}_0(X)$ , on désigne par  $F'$  l'enveloppe convexe de  $F \cup D$  dans  $\mathfrak{S}_0(X)$ ; c'est un sous-cône de  $\mathfrak{S}_0(X)$  contenant  $F$  et  $D$ , le plus petit satisfaisant à cette condition. Si  $F_1, F_2$  sont deux faces strictes de  $\mathfrak{S}_0(X)$ ,  $F'_1 \cap F'_2 = (F_1 \cap F_2)'$  et l'ensemble  $\mathcal{D}$  formé de tous ces cônes  $F'$  ainsi que de leurs faces constitue une décomposition polyédrale rationnelle finie du cône  $\mathfrak{S}_0(X)$  ([11], Chap. I, Sect. 2, Définition 3). Par application des Théorèmes 6, 7 et 8 de [11], Chap. I, Sect. 2, il existe une  $k$ -variété torique normale  $X'$  sous  $T$  ainsi qu'un morphisme équivariant et propre  $f : X' \rightarrow X$  qui satisfont à la condition suivante (et sont uniquement déterminés, à un isomorphisme près, par celle-ci) : le morphisme  $f^\triangleright : X'^\triangleright \rightarrow X^\triangleright$  induit un isomorphisme du cône polyédral rationnel  $\mathfrak{S}_0(X')$  sur le cône  $\mathfrak{S}_0(X)$  tel que la décomposition  $\mathcal{D}$  de ce dernier corresponde à la décomposition de  $\mathfrak{S}_0(X')$  formée des cônes définis par les ouverts affines invariants de  $X'$ .

Utilisant la Proposition 2.10, il découle de cette propriété qu'il existe un point  $\xi'$  dans  $\Xi(X')$  tel que la demi-droite rationnelle  $D \subset \mathfrak{S}_0(X)$  soit l'image du sous-cône de  $\mathfrak{S}_0(X')$  d'intérieur  $r_{X'}^{-1}(\xi')$ . Si  $\xi$  est l'unique point de  $\Xi(X)$  tel que  $D$  soit contenue dans la face  $\mathfrak{S}_0(X) \cap \overline{r_X^{-1}(\xi)}$  de  $\mathfrak{S}_0(X)$ ,  $f(\xi') = \xi$  en vertu du troisième point de cette même proposition.

Nous identifions maintenant les cônes  $\mathfrak{S}_0(X')$  et  $\mathfrak{S}_0(X)$ , notés  $\mathfrak{S}_0$  dans ce qui suit. L'adhérence du point  $\xi$  dans  $X$  est l'unique orbite fermée car  $\mathfrak{S}_0 \cap r_X^{-1}(\xi)$  est l'intérieur du cône  $\mathfrak{S}_0$  et, le morphisme  $f$  étant équivariant,  $f^{-1}(\xi)$  est la réunion des orbites  $O(\zeta)$  de  $X'$  telles que  $\mathfrak{S}_0 \cap r_{X'}^{-1}(\zeta)$  soit contenu dans l'intérieur de  $\mathfrak{S}_0$ . D'un autre côté, l'adhérence de  $\xi'$  dans  $X'$  est la réunion des orbites  $O(\zeta')$  telles que  $D$  soit une face du cône d'intérieur  $\mathfrak{S}_0 \cap r_{X'}^{-1}(\zeta')$ . L'égalité  $\overline{\{\xi'\}} = f^{-1}(\overline{\{\xi\}})$  découle immédiatement de cette description puisqu'elle est équivalente au fait suivant : quel que soit le cône  $C$  figurant dans  $\mathcal{D}$ ,  $C$  rencontre l'intérieur de  $\mathfrak{S}_0$  si et seulement si  $D$  en est une face.

Enfin, le sous-schéma intègre  $\overline{\{\xi'\}} = \overline{O(\xi')}$  de  $X'$  est normal car la variété torique  $X'$  l'est ([11], Chap. I, Sect. 1, Proposition 2).

## 2.2. La contraction de $X^\triangleright$ sur $\mathfrak{S}(X)$

(2.2.1) Comme l'a montré Berkovich, l'action du groupe  $k$ -analytique  $T^\triangleright$  sur  $X^\triangleright$  conduit naturellement à une contraction de  $X^\triangleright$  sur le sous-espace fermé  $\mathfrak{S}(X)$ , c'est-à-dire une homotopie reliant l'application identique de  $X^\triangleright$  à la rétraction  $\mathbf{p}$  de  $X^\triangleright$  sur le sous-espace fermé  $\mathfrak{S}(X)$ .

**Lemme 2.15.** *Quels que soient l'élément  $t \in [0, 1]$  et l'extension non archimédienne  $K/k$ , l'espace  $K$ -affinoïde*

$$G_K(t) = \{x \in T^\triangleright \widehat{\otimes}_k K \mid |\chi_m - 1| \leq t, m \in M\}$$

*est un sous-groupe  $K$ -analytique de  $T^\triangleright \widehat{\otimes}_k K$  possédant un unique point de Shilov, noté  $g_K(t)$ . Si  $K'/K/k$  est une tour d'extensions non archimédiennes, la projection canonique de  $G_{K'}(t)$  sur  $G_K(t)$  envoie  $g_{K'}(t)$  sur  $g_K(t)$ .*

**Démonstration.** Quelle que soit la  $k$ -algèbre affinoïde  $A$ , l'ensemble des  $A$ -points de  $T^{\square}$  est le groupe des homomorphismes bornés du groupe abélien  $M$  dans le groupe  $A^{\times}$ . Étant donnés  $x, y \in T^{\square}(A)$  tels que  $\|x(m) - 1\|, \|y(m) - 1\| \leq t$  pour tout  $m \in M$ ,  $\|x(m)\| = \|y(m)\| = 1$  (c'est la condition pour que  $x$  et  $y$  soient bornés) et

$$\|x(m)y(m)^{-1} - 1\| \leq \max(\|x(m) - 1\|, \|y(m) - 1\|) \leq t$$

pour tout  $m \in M$ . Cela prouve que l'ensemble des  $A$ -points de  $G(t)$  est un sous-groupe de  $T^{\square}(A)$ , et donc que le domaine  $k$ -affinoïde  $G(t)$  est un sous-groupe  $k$ -analytique de  $T^{\square}$ . Il en est de même après toute extension non archimédienne  $K/k$ .

Choisissons maintenant une base  $(m_1, \dots, m_n)$  de  $M$ . L'homomorphisme  $\varphi : T \otimes_k K \rightarrow \mathbb{A}_K^n = \text{Spec}(K[X_1, \dots, X_n])$  tel que  $\varphi^{\#}(X_i) = \chi_{m_i} - 1, 1 \leq i \leq n$ , induit un isomorphisme de  $G_K(t)$  sur le domaine  $K$ -affinoïde  $\{|X_1| \leq t, \dots, |X_n| \leq t\}$  de  $\mathbb{A}_K^n$ . Ce dernier a un unique point de Shilov, défini par le prolongement de la semi-norme multiplicative

$$K[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \sum_{v \in \mathbb{N}^n} a_v X^v \mapsto \max_v |a_v| t^{|v|},$$

et il en est donc de même pour  $G_K(t)$ .

Le comportement des points  $g_K(t)$  en fonction de  $K$  est évident.

*Remarque 2.16.* Quelle que soit l'extension non archimédienne  $K/k$ , l'application  $g_K : t \mapsto g_K(t)$  de  $[0, 1]$  dans  $T^{\square} \widehat{\otimes}_k K$  est continue : en effet, si  $(m_1, \dots, m_n)$  est une base du groupe abélien  $M$ , la composée de  $g_K$  par l'immersion  $T^{\square} \widehat{\otimes}_k K \hookrightarrow \mathcal{M}(K\{X_1, \dots, X_n\})$  définie par  $X_i = \chi_{m_i} - 1, 1 \leq i \leq n$ , est continue car

$$|f|(g_K(t)) = \max_v |a_v(f)| t^{|v|}$$

pour tout élément  $f = \sum_{v \in \mathbb{N}^n} a_v(f) X^v$  de  $K\{X_1, \dots, X_n\}$ .

L'homotopie  $H : [0, 1] \times X^{\square} \rightarrow X^{\square}$  est définie comme suit : étant donné un élément  $t$  de  $[0, 1]$  et un point  $x$  dans  $X^{\square}$ ,  $H(t, x)$  est l'image du point  $g_K(t)$  de  $T^{\square} \widehat{\otimes}_k \mathcal{H}(x)$  par l'application canonique

$$T^{\square} \widehat{\otimes}_k \mathcal{H}(x) = T^{\square} \times \mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) \rightarrow T^{\square} \times X^{\square} \rightarrow X^{\square}.$$

**Proposition 2.17.** *L'application  $H : [0, 1] \times X^{\square} \rightarrow X^{\square}$  que l'on vient de définir satisfait aux conditions suivantes :*

- (i) elle est continue ;
- (ii)  $H(0, \cdot) = \text{id}_{X^{\square}}, H(1, \cdot) = \mathbf{p}$  et, pour tout  $t \in [0, 1]$ , la restriction de l'application  $H(t, \cdot)$  à  $\mathfrak{S}(X)$  est l'injection canonique de  $\mathfrak{S}(X)$  dans  $X^{\square}$  ;
- (iii) pour tout  $t \in [0, 1]$  et tout ouvert affine invariant  $U \subset X$ , l'application  $H(t, \cdot)$  envoie  $U^{\square}$  dans  $U^{\square}$ .

**Démonstration.** (iii) Quel que soit l'ouvert affine invariant  $U \subset X$ , la stabilité de  $U^\triangleright$  sous chacune des applications  $H(t, \cdot), t \in [0, 1]$ , est une conséquence immédiate de la stabilité de  $U^\triangleright$  sous l'action de  $T^\triangleright$  sur  $X^\triangleright$ .

(ii) Les égalités  $H(0, \cdot) = \text{id}_{X^\triangleright}$  et  $H(1, \cdot) = \mathbf{p}$  découlent immédiatement de la définition de l'application  $H$ . Considérons un ouvert affine invariant  $U \subset X$ , un point  $x$  dans  $U^\triangleright$  et un élément  $f$  de  $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ . Comme, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $g_{\mathcal{H}(x)}(t)$  est le point de Shilov du domaine  $\mathcal{H}(x)$ -affinoïde  $G_{\mathcal{H}(x)}(t)$  de  $T^\triangleright \widehat{\otimes}_k \mathcal{H}(x)$ ,

$$|f(H(t, x))| = \max_{G_{\mathcal{H}(x)}(t)} |m_x^\#(f)|,$$

où  $m_x$  est le morphisme  $T^\triangleright \widehat{\otimes}_k \mathcal{H}(x) \rightarrow T^\triangleright \times X^\triangleright \rightarrow X^\triangleright$ . La famille des  $G_{\mathcal{H}(x)}(t)$  étant croissante avec  $t$ , nous en déduisons la croissance de  $|f(H(t, x))|$  par rapport à  $t$  et obtenons ainsi les inégalités

$$|f(x)| = |f(H(0, x))| \leq |f(H(t, x))| \leq |f(H(1, x))| = |f(\mathbf{p}(x))|$$

pour tout  $t \in [0, 1]$ . Si le point  $x$  appartient à  $\mathfrak{S}(X)$ ,  $\mathbf{p}(x) = x$ ; on a alors

$$|f(H(t, x))| = |f(x)|$$

pour tous  $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X), t \in [0, 1]$ , et donc  $H(t, x) = x$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .

(i) Nous allons établir la continuité de  $H$  en vérifiant que la fonction réelle  $|f(H(t, x))|$  est continue sur  $[0, 1] \times U^\triangleright$  pour tout ouvert affine invariant  $U \subset X$  et tout élément  $f$  de  $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ . Posons  $\varphi(t, x) = |f(H(t, x))|$ .

- La continuité de  $\varphi$  par rapport à  $t$  découle directement de la Remarque 2.16.
- Vérifions ensuite la continuité de  $\varphi$  par rapport à  $x$ . Les cas  $t = 0$  et  $t = 1$  étant déjà acquis, nous pouvons supposer  $t \in ]0, 1[$ . Choisissons une base  $(m_1, \dots, m_n)$  de  $M$  et notons  $F$  le composé de l'homomorphisme  $m^\# : \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_X)[M]$  par le  $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ -homomorphisme  $\alpha : \Gamma(U, \mathcal{O}_X)[M] \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_X)[[X_1, \dots, X_n]]$  tel que  $\alpha(\chi_{m_i}) = 1 + X_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). On a

$$F(f) = \sum_{v \in \mathbb{N}^n} F_v(f) X_1^{v_1} \dots X_n^{v_n}$$

$$\text{et } \varphi(t, x) = \max_{v \in \mathbb{N}^n} |F_v(f)|(x)t^{|v|}.$$

La continuité des fonctions  $|F_v(f)|$  implique trivialement la semi-continuité inférieure de  $\varphi(t, \cdot)$ . Ces fonctions étant de plus majorées par 1 et  $t$  appartenant à  $]0, 1[$ , il existe, pour tout point  $x_0 \in U^\triangleright$  et tout nombre réel  $\varepsilon > 0$ , un entier naturel  $N$  tel que, pour tout multi-indice  $v \in \mathbb{N}^n$  de longueur  $|v| \geq N$ ,

$$|F_v(f)|t^{|v|} \leq t^{|v|} < \varphi(t, x_0) + \varepsilon.$$

On en déduit que

$$\{\varphi(t, \cdot) < \varphi(t, x_0) + \varepsilon\} = \bigcap_{v, |v| \leq N} \{|F_v(f)| < \varepsilon t^{-|v|}\}$$

est un voisinage de  $x_0$ , et donc que la fonction  $\varphi(t, \cdot)$  est semi-continue supérieurement au point  $x_0$ . Nous avons donc établi la continuité de  $\varphi(t, \cdot)$ .

– La continuité de  $\varphi$  découle facilement des continuités partielles que l'on vient de vérifier et de la croissance par rapport à  $t$ . Considérons en effet un point  $(t_0, x_0)$  dans  $[0, 1] \times U^{\square}$  et un nombre réel  $\varepsilon > 0$ . Il existe un nombre réel  $\delta > 0$  tel que

$$\varphi(t_0, x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \varphi(t, x_0) \leq \varphi(t_0, x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout  $t$  appartenant au segment  $[t_1, t_2] = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap [0, 1]$ ; il existe également un voisinage  $\Omega$  de  $x_0$  dans  $U^{\square}$  tel que

$$\varphi(t_1, x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \varphi(t_1, x) \quad \text{et} \quad \varphi(t_2, x) \leq \varphi(t_2, x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout  $x$  appartenant à  $U^{\square}$ . Quels que soient alors  $t \in [t_1, t_2]$  et  $x \in U^{\square}$ , la croissance de  $\varphi(\cdot, x)$  sur  $[0, 1]$  et les inégalités précédentes impliquent :

$$\varphi(t, x) \leq \varphi(t_2, x) \leq \varphi(t_2, x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varphi(t_0, x_0) + \varepsilon$$

et

$$\varphi(t, x) \geq \varphi(t_1, x) \geq \varphi(t_1, x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \geq \varphi(t_0, x_0) - \varepsilon.$$

La fonction  $\varphi$  est donc continue au point  $(t_0, x_0)$ .

*Remarque 2.18.* L'homotopie  $H$  considérée ici est un cas particulier de la construction effectuée par Berkovich dans le paragraphe 6.1 de [1].

(2.2.2) Soient  $Y$  le fermé complémentaire de l'orbite ouverte  $X_0$  dans  $X$ ,  $\mathfrak{X}$  le complété formel de  $X$  le long de  $Y$  et  $o$  l'unique point de  $X^{\square}$  tel que  $r(o)$  soit le point générique de  $X$ . Le point  $o$  est le sommet commun de chacun des cônes  $\mathfrak{S}_0(U)$  associés aux ouverts affines invariants  $U \subset X$  (Proposition 2.10). La fibre générique  $\mathfrak{X}_\eta$  de  $\mathfrak{X}$  est un ouvert de  $X^{\square}$  dont la trace sur  $\mathfrak{S}(X)$  est le polyèdre conique épointé  $\mathfrak{S}_0(X)^* = \mathfrak{S}_0(X) - \{o\}$  car

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_\eta &= r^{-1}(Y) - \rho^{-1}(Y) \\ &= \rho^{-1}(X_0) - r^{-1}(X_0). \end{aligned}$$

**Proposition 2.19.** *L'homotopie  $H : [0, 1] \times X^{\square} \rightarrow X^{\square}$  stabilise l'ouvert  $\mathfrak{X}_\eta$  de  $X^{\square}$  et l'application induite*

$$H : [0, 1] \times \mathfrak{X}_\eta \rightarrow \mathfrak{X}_\eta$$

*contracte  $\mathfrak{X}_\eta$  sur  $\mathfrak{S}_0(X)^*$ .*

*Il en découle en particulier que l'espace analytique  $\mathfrak{X}_\eta$  est homotope à la sphère  $S^{\dim(X)-1}$  si le  $k$ -schéma  $X$  est propre, contractile sinon.*

**Démonstration.** Quel que soit le point  $\xi$  de  $\Xi(X)$ , l’homotopie  $H$  stabilise les sous-ensembles  $\rho^{-1}(O(\xi))$  et  $r^{-1}(O(\xi))$  de  $X^{\square}$  : cela découle directement de la commutativité des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} T^{\square} \times X^{\square} & \xrightarrow{m} & X^{\square} \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho \\ T \times X & \xrightarrow{m} & X \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} T^{\square} \times X^{\square} & \xrightarrow{m} & X^{\square} \\ r \downarrow & & \downarrow r \\ T \times X & \xrightarrow{m} & X \end{array}$$

et du fait que, pour tout  $x \in X^{\square}$  et tout  $t \in [0, 1]$ , les points  $x$  et  $H(t, x)$  appartiennent tous deux, vu la construction de  $H$ , à la même orbite sous  $T^{\square}$ .

Comme

$$\mathfrak{X}_{\eta} = \rho^{-1}(O(r(o))) \cap \bigcup_{\xi \in \Xi(X), \xi \neq r(o)} r^{-1}(O(\xi)),$$

l’homotopie  $H$  stabilise  $\mathfrak{X}_{\eta}$ .

La restriction de  $H$  à  $\mathfrak{X}_{\eta}$  relie  $H(0, \cdot) = \text{id}_{\mathfrak{X}_{\eta}}$  à la rétraction  $\mathbf{p}|_{\mathfrak{X}_{\eta}} : \mathfrak{X}_{\eta} \rightarrow \mathfrak{S}_0(X)^*$  et contracte donc  $\mathfrak{X}_{\eta}$  sur  $\mathfrak{S}_0(X)^*$ . On a vu que le polyèdre conique  $\mathfrak{S}_0(X)$  s’identifie canoniquement à l’éventail de la variété torique  $X$  ; l’espace topologique sous-jacent à  $\mathfrak{S}_0(X)^*$  est donc homotope à la sphère  $S^{\dim(X)-1}$  si cet éventail est complet — c’est-à-dire si  $X$  est propre — et il est contractile sinon.

### 3. L’espace de Berkovich associé à un plongement toroïdal

Nous considérons toujours un corps  $k$ , muni de la valeur absolue triviale. Un *plongement toroïdal simple* est la donnée d’un  $k$ -schéma normal  $X$  et d’un ouvert dense  $X_0$  de  $X$  tels que l’immersion ouverte  $X_0 \hookrightarrow X$  satisfasse à la condition suivante : tout point  $x$  de  $X$  admet un voisinage ouvert  $U$  muni d’un morphisme étale  $\gamma$  vers une variété torique  $Z$  tel que  $X_0 \cap U$  soit l’image réciproque de l’orbite ouverte  $Z_0$  de  $Z$ .

Un *plongement toroïdal* est la donnée d’un  $k$ -schéma  $X$  et d’un ouvert dense  $X_0$  de  $X$  tels que l’immersion ouverte  $X_0 \hookrightarrow X$  satisfasse à la condition suivante : il existe pour tout point  $x$  de  $X$  un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  dans  $X$  et un morphisme étale surjectif  $\delta : V \rightarrow U$  tels que l’immersion ouverte  $\delta^{-1}(X_0) \hookrightarrow V$  soit un plongement toroïdal simple.

*Remarque 3.1.* 1. Il est évidemment loisible d’imposer aux  $k$ -schémas  $U, V$  et  $Z$  d’être affines.

2. La normalité de  $X$  permet de supposer que toutes les variétés toriques considérées sont normales.

Nous allons voir que les résultats du chapitre précédent s’étendent aisément au cas des plongements toroïdaux. Nous ne considérons dans les deux premières sections que des plongements toroïdaux simples et l’extension aux plongements toroïdaux généraux, quasi immédiate, fait l’objet de la troisième et dernière section.



### 3.1. L'éventail d'un plongement toroïdal simple et sa compactification

Dans cette section et la suivante, tous les plongements toroïdaux sont supposés *simples*.

Nous considérons dans ce qui suit une  $k$ -variété irréductible et normale  $X$  et un ouvert dense  $X_0$  tels que l'immersion ouverte  $X_0 \hookrightarrow X$  soit un plongement toroïdal. Nous appellerons *carte étale* la donnée d'un ouvert  $U$  de  $X$  et d'un morphisme étale  $\gamma$  de  $U$  vers une variété torique normale  $Z$  tel que  $X_0 \cap U = \gamma^{-1}(Z_0)$ .

**(3.1.1)** Les orbites d'une variété torique  $X$  constituent une stratification en parties localement fermées irréductibles. Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  la suite des parties localement fermées de  $X$  obtenue par induction à partir de l'orbite ouverte  $X_0$  de  $X$  en définissant  $X_{n+1}$  comme la réunion des orbites ouvertes du fermé  $T$ -invariant  $X - (X_0 \cup \dots \cup X_n)$ . Il revient au même de prendre pour  $X_{n+1}$  l'ensemble des points *réguliers* de ce fermé. Chaque orbite ouverte est, en effet, constituée de points *réguliers*, tandis que tout point *régulier* de  $X - (X_0 \cup \dots \cup X_n)$  appartient nécessairement à une orbite ouverte : ainsi qu'on le vérifie sur l'éventail de  $X$ , une orbite non ouverte  $O$  est contenue dans les adhérences de deux orbites ouvertes distinctes, et donc dans l'intersection de deux composantes irréductibles distinctes de  $X - (X_0 \cup \dots \cup X_n)$ , car  $O$  correspond à un cône de dimension  $d \geq 2$ , lequel a au moins deux faces distinctes de dimension  $d' \in \{1, \dots, d-1\}$  donnée; en particulier,  $X - (X_0 \cup \dots \cup X_n)$  n'est normal en aucun point de  $O$ .

Chaque  $X_n$  est par définition une réunion d'orbites de  $X$  et l'ensemble  $\Xi(X)$  des points génériques de ces dernières est exactement l'ensemble des points génériques des  $X_n$ .

Plus généralement, si  $X_0 \hookrightarrow X$  est un plongement toroïdal,  $X$  possède une stratification canonique généralisant la stratification d'une variété torique par ses orbites.

**Lemme 3.2.** Soit  $U$  un  $k$ -schéma et soient  $\gamma : U \rightarrow Z, \gamma' : U \rightarrow Z'$  des morphismes étales vers des  $k$ -variétés toriques. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\gamma^{-1}(Z_0) = \gamma'^{-1}(Z'_0)$ ;
- (ii)  $\gamma^{-1}(\Xi(Z)) = \gamma'^{-1}(\Xi(Z'))$ .

**Démonstration.** Vu la discussion qui précède, il revient au même de démontrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

- (i)  $\gamma^{-1}(Z_0) = \gamma'^{-1}(Z'_0)$ ;
- (iii)  $\forall n \geq 0, \gamma^{-1}(Z_n) = \gamma'^{-1}(Z'_n)$ .

L'implication (iii)  $\Rightarrow$  (i) est triviale. Étant donné  $n \in \mathbb{N}$ , supposons que  $\gamma^{-1}(Z_i) = \gamma'^{-1}(Z'_i)$  pour tout  $i \leq n$ . Ainsi qu'on l'a établi précédemment,  $Z_{n+1}$  (resp.  $Z'_{n+1}$ ) n'est autre que l'ensemble des points réguliers de  $Z - (Z_0 \cup \dots \cup Z_n)$  (resp. de  $Z' - (Z'_0 \cup \dots \cup Z'_n)$ ); comme les morphismes  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont étales,  $\gamma^{-1}(Z_{n+1})$  et  $\gamma'^{-1}(Z'_{n+1})$  sont respectivement les ensembles des points réguliers de  $\gamma^{-1}(Z - (Z_0 \cup \dots \cup Z_n)) = \gamma'^{-1}(Z' - (Z'_0 \cup \dots \cup Z'_n))$  et donc  $\gamma^{-1}(Z_{n+1}) = \gamma'^{-1}(Z'_{n+1})$ . Cela établit l'implication réciproque (i)  $\Rightarrow$  (iii).

**Définition 3.3.** Nous désignerons par  $\Xi(X)$  l'ensemble des points  $\xi$  de  $X$  satisfaisant à la condition suivante :

il existe une carte étale  $\gamma : U \rightarrow Z$  telle que  $\xi \in U$  et  $\gamma(\xi) \in \Xi(Z)$ .

En vertu du lemme précédent, cette propriété ne dépend pas du choix de la carte  $(U, \gamma)$ .

Étant donné un point  $\xi$  dans  $\Xi(X)$ , nous noterons  $\Sigma(\xi)$  le complémentaire dans  $\overline{\{\xi\}}$  des fermés  $\{\xi'\}$ ,  $\xi'$  parcourant l'ensemble des spécialisations strictes de  $\xi$  dans  $\Xi(X)$ .

**Proposition 3.4.** Les sous-ensembles  $\Sigma(\xi)$ ,  $\xi \in \Xi(X)$ , sont des parties localement fermées, irréductibles et disjointes de  $X$ ,

$$X = \bigcup_{\xi \in \Xi(X)} \Sigma(\xi)$$

et

$$\overline{\Sigma(\xi)} = \bigcup_{\xi' \in \Xi(X), \xi \rightarrow \xi'} \Sigma(\xi').$$

Quelle que soit en outre la carte étale  $\gamma : U \rightarrow Z$ ,  $\Xi(X) \cap U = \gamma^{-1}(\Xi(Z))$  et

$$\gamma^{-1}(O) = \bigcup_{\xi \in \Xi(X), \gamma(\xi) \in O} \Sigma(\xi) \cap U$$

pour toute orbite  $O$  de  $Z$ .

**Démonstration.** Le sous-ensemble  $\Xi(X)$  de  $X$  étant localement fini, il découle manifestement de la définition des  $\Sigma(\xi)$ ,  $\xi \in \Xi(X)$ , qu'il s'agit de parties localement fermées, irréductibles et disjointes de  $X$ . La description de leurs adhérences se déduit de même immédiatement de cette définition.

Étant donnée une carte étale  $\gamma : U \rightarrow Z$  sur  $X$ ,  $\Xi(X) \cap U = \gamma^{-1}(\Xi(Z))$ . Quel que soit le point  $\zeta$  de  $\Xi(Z)$ , son orbite  $O(\zeta)$  dans  $Z$  est le complémentaire dans  $\overline{\{\zeta\}}$  des fermés  $\{\zeta'\}$ ,  $\zeta'$  parcourant l'ensemble des spécialisations strictes de  $\zeta$  dans  $\Xi(Z)$ . Comme le morphisme  $\gamma$  est quasi-fini, on en déduit que  $\gamma^{-1}(O(\zeta))$  est la réunion des  $\Sigma(\xi) \cap U$ ,  $\xi$  parcourant l'ensemble des antécédents de  $\zeta$  ou, de manière équivalente, l'ensemble des points de  $\Xi(X) \cap U$  dont l'image appartient à  $O(\zeta)$ .

Enfin,

$$X = \bigcup_{\xi \in \Xi(X)} \Sigma(\xi)$$

car tout point de  $X$  est contenu dans le domaine d'une carte étale et toute variété torique est la réunion de ses orbites.

Étant donné un point  $\xi$  dans  $\Xi(X)$ , nous posons

$$X(\xi) = \bigcup_{x' \in \Xi(X), \xi' \rightarrow \xi} \Sigma(\xi').$$

Il s'agit d'un ouvert de  $X$  — c'est en effet une partie constructible de  $X$  stable par généralisation — qui contient la strate  $\Sigma(\xi)$  et dans lequel celle-ci est fermée.

*Remarque 3.5.* Si  $X$  est une  $k$ -variété torique,  $X(\xi)$  est un ouvert affine invariant pour tout point  $\xi$  de  $\Xi(X)$ . Il est en effet invariant car réunion d'orbites, et il est affine car

$$\mathfrak{S}_0(X) \cap r^{-1}(X(\xi))$$

est l'un des cônes figurant dans la décomposition canonique de  $\mathfrak{S}_0(X)$  définie par les ouverts affines invariants.

**Lemme 3.6.** *Étant donné un point  $\xi$  dans  $\Xi(X)$  et une carte étale  $\gamma : U \rightarrow Z$  telle que  $\xi \in U \subset X(\xi)$ ,*

- (i)  $\gamma(X(\xi)) \subset Z(\gamma(\xi))$ ;
- (ii)  $\gamma$  induit une bijection de  $\Xi(U) = \Xi(X) \cap U$  sur  $\Xi(Z(\gamma(\xi)))$ .

**Démonstration.** (i) Cette assertion découle directement du fait que la stratification de  $U$  est l'image réciproque de celle de  $Z$  par ses orbites.

- (ii) Le point précédent permet de supposer  $Z = Z(\gamma(\xi))$ . Considérons un point  $\xi'$  dans  $\Xi(Z)$  et soit  $Y$  le sous-schéma fermé intègre de  $Z$  de point générique  $\xi'$ ; la variété torique  $Z$  étant normale, il en est de même pour  $Y$  ([11], Chap. I, Proposition 2). Comme  $\gamma$  induit un morphisme étale de  $Y' = \gamma^{-1}(Y)$  sur  $Y$ ,  $Y'$  est également normal et ses composantes connexes sont donc irréductibles. Toutes ces composantes doivent par ailleurs contenir le point  $\xi$  puisque  $U$  est un voisinage ouvert de  $\xi$  dans  $X(\xi)$  et  $Y'$  est ainsi irréductible. Son point générique est l'unique élément de  $\gamma^{-1}(\xi')$ .

(3.1.2) On rappelle que, si cela ne prête pas à confusion, un morphisme de  $k$ -schémas et le morphisme qu'il induit entre leurs espaces de Berkovich sont désignés par la même lettre.

Nous allons maintenant construire l'éventail compactifié  $\mathfrak{S}(X)$  du plongement toroidal  $X_0 \hookrightarrow X$  dans l'espace  $k$ -analytique  $X^{\square}$ .

**Proposition 3.7.** *Soient  $\xi$  un point dans  $\Xi(X)$  et  $\gamma : U \rightarrow Z$  une carte étale telle que  $U \subset X(\xi)$ . Posant  $\xi' = \gamma(\xi)$ , le morphisme  $\gamma$  induit un homéomorphisme de  $\gamma^{-1}(\mathfrak{S}(Z(\xi')))$  sur  $\mathfrak{S}(Z(\xi'))$ .*

**Démonstration.** Nous procédons en quatre étapes.

Première étape. Quelques réductions évidentes pour commencer. On peut tout d'abord remplacer la variété torique  $Z$  par l'ouvert invariant  $Z(\xi')$ , qui est affine (Remarque 3.5), auquel cas le morphisme  $\gamma$  réalise une bijection de  $\Xi(U) = \gamma^{-1}(\Xi(Z))$  sur  $\Xi(Z)$  (Lemme 3.6).

Notons ensuite qu'il est loisible de supposer que l'ouvert  $U$  est affine : en effet, comme le sous-ensemble  $\mathfrak{S}(Z)$  de  $Z^{\square}$  est inclus dans  $r^{-1}(\Xi(Z))$ , son image réciproque par  $\gamma$  est contenue dans  $r^{-1}(\Xi(X(\xi)))$  et l'ensemble  $\Xi(X(\xi))$  des généralisations du point  $\xi$  dans  $\Xi(X)$  est contenu dans tout voisinage ouvert affine de  $\xi$ .

Remarquons également qu'il suffit d'établir la bijectivité de l'application  $\gamma^{-1}(\mathfrak{S}(Z)) \rightarrow \mathfrak{S}(Z)$  induite par  $\gamma$ ; vu la continuité de  $\gamma$  et la compacité de  $U^{\square}$  et  $Z^{\square}$ , il s'agira alors automatiquement d'un homéomorphisme.

Nous pouvons enfin nous restreindre à montrer que chacune des fibres de  $\gamma$  contient exactement un point au-dessus de l'intérieur  $\mathfrak{S}_0(Z) \cap r_Z^{-1}(\xi')$  du cône  $\mathfrak{S}_0(Z)$ . En effet :

– comme

$$\mathfrak{S}_0(Z) = \bigcup_{\zeta' \in \Xi(Z)} \mathfrak{S}_0 \cap r_Z^{-1}(\zeta'),$$

il suffit de remplacer  $Z$  par l'ouvert  $Z(\zeta')$  pour obtenir que chaque fibre de  $\gamma$  ne contient qu'un point au-dessus de  $\mathfrak{S}_0(Z) \cap r_Z^{-1}(\zeta')$ , quel que soit le point  $\zeta' \in \Xi(Z)$  ;

– ayant vérifié que chacune des fibres de  $\gamma$  contient un unique point au-dessus du cône  $\mathfrak{S}_0(Z)$ , on en déduit qu'il en est de même au-dessus de  $\mathfrak{S}(Z)$  en remplaçant la variété torique  $Z$  par les adhérences de ses orbites puisque

$$\mathfrak{S}(Z) = \bigcup_{\zeta' \in \Xi(Z)} \mathfrak{S}_0(\overline{O(\zeta')}).$$

Nous établissons finalement dans ce qui suit que les fibres du morphisme  $\gamma$  sont réduites à un point au-dessus de l'intérieur  $\mathfrak{S}_0(Z) \cap r_Z^{-1}(\xi')$  du cône  $\mathfrak{S}_0(Z)$ .

Deuxième étape. Le cas d'un cône  $\mathfrak{S}_0(Z)$  réduit à un seul point — c'est-à-dire le cas d'une variété torique  $Z$  ayant une unique orbite — est immédiat puisqu'alors  $\Xi(U) = \gamma^{-1}(Z)$  contient également un unique point (en l'occurrence, le point générique de  $U$ ) et  $\mathfrak{S}_0(Z)$  (resp.  $\gamma^{-1}(\mathfrak{S}_0(Z))$ ) est l'unique point de  $Z^{\square}$  (resp. de  $U^{\square}$ ) se réduisant sur le point de  $\Xi(Z)$  (resp. de  $\Xi(U)$ ).

Nous supposons dans ce qui suit que le cône  $\mathfrak{S}_0(Z)$  n'est pas réduit à un point.

Troisième étape. Soit  $D$  une demi-droite rationnelle dans le cône  $\mathfrak{S}_0(Z)$  qui n'est contenue dans aucune face stricte. En vertu de la Proposition 2.14, il existe une variété torique normale  $Z'$  sous le même tore que  $Z$ , un point  $\zeta$  dans  $\Xi(Z')$  et un morphisme  $f : Z' \rightarrow Z$ , propre et équivariant, tels que les conditions suivantes soient vérifiées :

- $f$  induit un homéomorphisme de  $\mathfrak{S}_0(Z')$  sur  $\mathfrak{S}_0(Z)$  qui identifie  $D$  à l'adhérence de  $\mathfrak{S}_0(Z') \cap r_{Z'}^{-1}(\zeta)$  dans  $Z'^{\square}$  ;
- le point  $\pi = f(\zeta)$  appartient à  $\Xi(Z)$  et

$$\overline{\{\zeta\}} = f^{-1}(\overline{\{\pi\}});$$

- muni de sa structure de sous-schéma fermé réduit de  $Z'$ ,  $\overline{\{\zeta\}}$  est normal.

Considérons alors le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{f'} & U \\ \gamma' \downarrow & & \downarrow \gamma \\ Z' & \xrightarrow{f} & Z. \end{array}$$

Le morphisme  $f'$ , propre et birationnel, induit un isomorphisme de l'ouvert  $\gamma'^{-1}(Z'_0)$  sur l'ouvert  $\gamma^{-1}(Z_0)$ ;  $f'$  réalise alors un isomorphisme de l'ouvert  $\gamma'^{-1}(\rho_{Z'}^{-1}(Z'_0)) \subset U'^{\square}$  sur l'ouvert  $\gamma^{-1}(\rho_Z^{-1}(Z_0)) \subset U^{\square}$  et, comme  $\mathfrak{S}_0(Z) \subset \rho_Z^{-1}(Z_0)$ ,  $\mathfrak{S}_0(Z') \subset \rho_{Z'}^{-1}(Z'_0)$ , ce morphisme induit donc un homéomorphisme de  $\gamma'^{-1}(\mathfrak{S}_0(Z'))$  sur  $\gamma^{-1}(\mathfrak{S}_0(Z))$ .

L'anneau local de  $\zeta$  dans  $Z'$  est de dimension 1 (car  $D$  est une demi-droite) et il s'agit donc d'un anneau de valuation discrète puisque le schéma noethérien  $Z'$  est normal. Désignant par  $\text{ord}_{\zeta}$  cette valuation, la demi-droite  $D \subset \mathfrak{S}_0(Z')$  est l'image de l'application  $d_{\zeta}$  de  $]0, 1]$  dans  $\mathcal{M}(\mathcal{O}_{Z',\zeta}) \subset Z'^{\square}$ , qui associe au point  $t$  la semi-norme multiplicative  $t^{-\text{ord}_{\zeta}(\cdot)}$  sur  $\mathcal{O}_{Z',\zeta}$  ( $d_{\zeta}(1)$  est la norme triviale). L'image réciproque de  $D$  par  $\gamma'$  est la réunion des images des applications analogues  $d_{\zeta'} : ]0, 1] \rightarrow U'^{\square}$  associées aux anneaux de valuation discrète  $\mathcal{O}_{U',\zeta'}$ ,  $\zeta' \in \gamma^{-1}(\zeta)$ . Les trois assertions suivantes sont donc équivalentes :

- $\gamma$  réalise une bijection de  $\gamma^{-1}(D)$  sur  $D$ ;
- $\gamma'$  réalise une bijection de  $\gamma'^{-1}(D)$  sur  $D$ ;
- la fibre de  $\gamma'$  au-dessus de  $\zeta$  contient exactement un point.

C'est cette dernière que nous allons vérifier.

Soit  $\pi'$  l'unique point de  $U$  tel que  $\gamma(\pi') = \pi$  (on rappelle que  $\pi$  appartient à  $\Xi(Z)$  et que  $\gamma$  réalise une bijection de  $\Xi(U) = \gamma^{-1}(\Xi(Z))$  sur  $\Xi(Z)$ ) et posons  $Y = \overline{\{\pi\}}$ ,  $Y' = \overline{\{\pi'\}}$ , de sorte que  $Y' = \gamma^{-1}(Y)$ . Le morphisme  $f'$  étant propre et birationnel, ses fibres sont connexes en vertu de la normalité de  $X$  et le fermé

$$Y'' = \gamma'^{-1}(f^{-1}(Y)) = f'^{-1}(\gamma^{-1}(Y)) = f'^{-1}(Y')$$

est donc connexe puisque  $Y'$  est irréductible. Munissant  $Y''$  (resp.  $f^{-1}(Y')$ ) de la structure de sous-schéma fermé réduit de  $U'$  (resp. de  $U$ ),  $\gamma'$  induit d'autre part un morphisme étale et dominant de  $Y''$  sur  $f^{-1}(Y)$ . Comme  $f^{-1}(Y)$  est irréductible et normal, de point générique  $\zeta$ ,  $Y''$  est également normal. Nous obtenons ainsi que  $Y''$  est un  $k$ -schéma normal et connexe dominant  $\overline{\{\zeta\}}$ ; il s'agit donc d'un  $k$ -schéma irréductible et son point générique est l'unique élément de  $\gamma'^{-1}(\zeta)$ .

À l'issue de cette étape, nous avons établi que le morphisme  $\gamma$  réalise une bijection de  $\gamma^{-1}(D)$  sur  $D$  pour toute demi-droite rationnelle  $D \subset \mathfrak{S}_0(Z)$  qui n'est contenue dans aucune face stricte.

Quatrième étape. Nous achevons maintenant de prouver que les fibres du morphisme  $\gamma$  au-dessus de l'intérieur  $\mathfrak{S}_0(Z) \cap r_Z^{-1}(\xi')$  du cône  $\mathfrak{S}_0(Z)$  sont réduites à un point. Ce résultat est acquis au-dessus du sous-ensemble dense de  $\mathfrak{S}_0(Z) \cap r_Z^{-1}(\xi')$  constitué des points contenus dans une demi-droite rationnelle.

L'argument est purement topologique. D'après la Proposition 1.12, l'application continue de  $r_U^{-1}(\xi)$  dans  $r_Z^{-1}(\xi')$  induite par le morphisme  $\gamma$  est ouverte, propre et surjective. Ces propriétés ont la conséquence suivante, qui fait l'objet du lemme ci-dessous : si  $\varphi$  est une fonction réelle continue sur  $r_U^{-1}(\xi)$ , la fonction réelle  $y \mapsto \Lambda_z(\varphi) = \max\{\varphi(x) \mid x \in \gamma^{-1}(z)\}$  définie sur  $r_Z^{-1}(\xi')$  est continue. Quels que soient ainsi  $f, g \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ , la fonction  $\Lambda(|fg|) - \Lambda(|f|\Lambda(|g|))$  est continue sur  $r_Z^{-1}(\xi)$ ; comme elle s'annule manifestement sur le sous-ensemble de

$\mathfrak{S}_0(\mathbb{Z}) \cap r_{\mathbb{Z}}^{-1}(\xi')$  formé des points contenus dans une demi-droite rationnelle, elle est identiquement nulle sur  $\mathfrak{S}_0(\mathbb{Z}) \cap r_{\mathbb{Z}}^{-1}(\xi')$  par densité.

Considérons finalement un point  $z$  dans  $\mathfrak{S}_0(\mathbb{Z}) \cap r_{\mathbb{Z}}^{-1}(\xi')$ . Si  $\gamma^{-1}(z)$  contient deux points, il existe un élément  $f$  de  $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$  tel que  $M = \max_{\gamma^{-1}(z)} |f| > m = \min_{\gamma^{-1}(z)} |f| > 0$ . Comme l'application  $g \mapsto \Lambda_z(|g|)$  est une semi-norme multiplicative et bornée sur  $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$  se prolongeant multiplicativement à l'anneau  $\Gamma(D(f), \mathcal{O}_X)$ , on obtient alors une contradiction puisque

$$1 = \Lambda_z(|f||f^{-1}|) = \Lambda_z(|f|)\Lambda_z(|f^{-1}|) = Mm^{-1}.$$

La fibre  $\gamma^{-1}(z)$  contient donc un unique point quel que soit  $z \in \mathfrak{S}_0(\mathbb{Z}) \cap r_{\mathbb{Z}}^{-1}(\xi')$  et la démonstration est achevée.

**Lemme 3.8.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques localement compacts et soit  $\gamma : X \rightarrow Y$  une application continue, ouverte, propre et surjective dont les fibres sont finies. Si  $\varphi$  est une fonction réelle continue sur  $X$ , la fonction réelle*

$$y \mapsto \psi(y) = \max\{\varphi(x), x \in \gamma^{-1}(y)\}$$

définie sur  $Y$  est continue.

**Démonstration.** Soient  $y$  un point dans  $Y$  et  $\varepsilon > 0$  un nombre réel. L'application  $\gamma$  étant ouverte, il existe pour chaque point  $x$  de  $\gamma^{-1}(y)$  un voisinage ouvert arbitrairement petit  $U_x$  de  $x$  dans  $X$  et un voisinage ouvert  $V_x$  de  $y$  dans  $Y$  tels que  $\gamma(U_x) = V_x$ . Comme la fibre  $\gamma^{-1}(y)$  est finie,

$$V = \bigcap_{x \in \gamma^{-1}(y)} V_x$$

est un voisinage ouvert de  $y$  dans  $Y$  et

$$U = \bigcup_{x \in \gamma^{-1}(y)} U_x \cap \gamma^{-1}(V)$$

est un voisinage ouvert de  $\gamma^{-1}(y)$  dans  $X$ . Quitte à réduire ces voisinages, on peut en outre supposer que la majoration

$$\sup_{U_x} |\varphi - \varphi(x)| \leq \varepsilon$$

est vérifiée pour tout  $x$  dans  $\gamma^{-1}(y)$ .

Le point  $y$  admettant un système fondamental  $\mathcal{W}$  de voisinages compacts, la fibre  $\gamma^{-1}(y)$  est l'intersection des compacts  $\gamma^{-1}(W)$ ,  $W \in \mathcal{W}$ , et la compacité locale de  $X$  garantit l'existence d'un élément  $W$  de  $\mathcal{W}$  tel que  $\gamma^{-1}(W) \subset U$ .

Considérons maintenant un point  $y'$  dans le voisinage  $W \cap V$  de  $y$ . Comme  $U$  est un voisinage de  $\gamma^{-1}(y')$  dans  $X$ , il existe pour tout point  $x'$  de  $\gamma^{-1}(y')$  un point  $x$  dans  $\gamma^{-1}(y)$  tel que  $x' \in U_x$ , et ceci implique  $\varphi(x) - \varepsilon \leq \varphi(x') \leq \varphi(x) + \varepsilon$ ; de ces inégalités découle alors la majoration

$$\psi(y') = \max\{\varphi(x'), x' \in \gamma^{-1}(y')\} \leq \max\{\varphi(x) + \varepsilon, x \in \gamma^{-1}(y)\} = \psi(y) + \varepsilon.$$

Enfin, puisque  $V \subset \gamma(U_x)$ , chacun des ouverts  $U_x$  rencontre la fibre  $\gamma^{-1}(y')$  et les inégalités précédentes impliquent également la minoration

$$\psi(y) = \max\{\varphi(x), x \in \gamma^{-1}(y)\} \leq \max\{\varphi(x') + \varepsilon, x' \in \gamma^{-1}(y')\} = \psi(y') + \varepsilon.$$

Nous avons établi la continuité de la fonction  $\psi$  en tout point  $y$  de  $Y$ .

Étant donnée une carte étale  $\gamma : U \rightarrow Z$ , le sous-espace fermé  $\gamma^{-1}(\mathfrak{S}(Z))$  de  $U^{\square}$  dépend *a priori* du choix de cette carte. Qu'il n'en soit en fait rien découle de la Proposition 3.11 ci-dessous.

**Définition 3.9.** Soit  $X_0 \hookrightarrow X$  un plongement toroïdal. Étant donné un ouvert  $U$  de  $X$ , on désigne par  $\Lambda(U)$  le groupe des diviseurs (de Cartier) sur  $U$  dont le support est contenu dans  $U - (X_0 \cap U)$  et par  $\Lambda(U)_+$  le sous-semi-groupe constitué des diviseurs effectifs.

*Remarque 3.10.* Soit  $T$  un  $k$ -tore déployé, de groupe des caractères  $M$ , et soit  $Z$  une variété torique sous  $T$ , affine et normale, correspondant à un semi-groupe  $S \subset M$ . Quelle que soit l'immersion ouverte équivariante  $j : T \hookrightarrow Z$ , l'application  $M \rightarrow \text{Div}(Z)$ ,  $m \mapsto \text{div}(\chi_m)$  induit un isomorphisme de  $M/(S \cap (-S))$  sur le groupe  $\Lambda(Z)$ .

Quel que soit l'ouvert  $U$  de  $X$ , tout élément  $D$  de  $\Lambda(U)$  donne naissance à une fonction réelle continue  $|D|$  sur  $U^{\square} \cap \rho^{-1}(X_0)$  de la manière suivante. Étant donné un point  $x$  de  $U^{\square} \cap \rho^{-1}(X_0)$  et une équation  $f$  de  $D$  sur un voisinage  $V$  de  $r(x)$  dans  $U$ , le nombre réel strictement positif  $|f|(x)$  ne dépend que de  $D$  : si  $g$  est une autre équation de  $D$  sur un ouvert affine  $W \subset V$ , il existe en effet une unité  $u \in \Gamma(W, \mathcal{O}_X)^\times$  telle que  $g = uf|_W$  ; comme chaque élément de l'anneau  $\Gamma(W, \mathcal{O}_X)$  est, en tout point de  $W^{\square}$ , de valeur absolue inférieure à 1 (valeur absolue triviale), les unités ont une valeur absolue constante, égale à 1, sur  $W^{\square}$  ; on a donc  $|f|(x) = |g|(x)$  et l'on pose  $|D|(x) = |f|(x)$ . La fonction  $|D|$  est majorée par 1 si et seulement si le diviseur  $D$  est effectif et l'application

$$\Lambda(U) \rightarrow C^0(U^{\square} \cap \rho^{-1}(X_0), \mathbb{R}_{>0}), \quad D \mapsto |D|$$

est un homomorphisme de groupes abéliens.

**Proposition 3.11.** Soit  $\xi$  un point dans  $\Xi(X)$  et soit  $\gamma : U \rightarrow Z$  une carte étale telle que  $\xi \in U \subset X(\xi)$ .

(i) L'image de l'application

$$\mu_U : U^{\square} \cap \rho^{-1}(X_0) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Ab}}(\Lambda(U), \mathbb{R}_{>0})$$

est le cône  $\text{Hom}_{\mathbf{Mon}}(\Lambda(U)_+, ]0, 1])$ .

- (ii) L'application  $\mu_U$  réalise un homéomorphisme de  $\gamma^{-1}(\mathfrak{S}_0(Z))$  sur son image.  
 (iii) Pour tout point  $x \in \text{Im}(\mu_U)$ ,  $\mu_U^{-1}(x)$  est un domaine affinoïde tel que

$$\Gamma(\mu_U^{-1}(x)) = \mu_U^{-1}(x) \cap \gamma^{-1}(\mathfrak{S}(Z)).$$

Remplaçant au besoin  $Z$  par un ouvert invariant, nous pouvons supposer  $Z = Z(\gamma(\xi))$  (Lemme 3.6).

**Lemme 3.12.** *L'homomorphisme  $\gamma^* : \Lambda(Z) \rightarrow \Lambda(U)$  induit un isomorphisme*

$$\Lambda(Z) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \Lambda(U) \otimes \mathbb{Q}.$$

**Démonstration.** Les notations sont celles de la proposition précédente.

Il est facile de voir que l'homomorphisme  $\gamma^* : \Lambda(Z) \rightarrow \Lambda(U)$  est injectif. Soit  $\Xi(Z, 1)$  (resp.  $\Xi(U, 1)$ ) l'ensemble des points de  $\Xi(Z)$  (resp.  $\Xi(U)$ ) de hauteur 1. Le morphisme  $\gamma$  induit une application bijective  $c : \Xi(U, 1) \rightarrow \Xi(Z, 1)$  et, ce morphisme étant en outre étale, le diagramme naturel

$$\begin{array}{ccc} \Lambda(U) & \xrightarrow{\text{cyc}} & \text{Hom}(\Xi(U, 1), \mathbb{Z}) \\ \gamma^* \uparrow & & \uparrow c^* \\ \Lambda(Z) & \xrightarrow[\text{cyc}]{} & \text{Hom}(\Xi(Z, 1), \mathbb{Z}), \end{array}$$

dans lequel les flèches horizontales sont injectives en vertu de la normalité de  $U$  et  $Z$ , est commutatif. Cela établit l'injectivité de  $\gamma^*$ .

Posons  $X_\xi = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\xi})$ ,  $\widehat{X}_\xi = \text{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_{X,\xi})$ ,  $Z_{\xi'} = \text{Spec}(\mathcal{O}_{Z,\xi'})$ ,  $\widehat{Z}_{\xi'} = \text{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_{Z,\xi'})$ , où  $\xi' = \gamma(\xi)$ , et considérons le diagramme commutatif naturel

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda(U) & \xrightarrow{\text{res}} & \Lambda(X_\xi) & \longrightarrow & \Lambda(\widehat{X}_\xi) \\ \gamma^* \uparrow & & \gamma^* \uparrow & & \uparrow \gamma^* \\ \Lambda(Z) & \xrightarrow{\text{res}} & \Lambda(Z_{\xi'}) & \longrightarrow & \Lambda(\widehat{Z}_{\xi'}). \end{array}$$

Les flèches horizontales sont injectives et l'on vient de voir qu'il en est de même pour les flèches verticales. Les deux flèches  $\text{res} : \Lambda(Z) \rightarrow \Lambda(Z_{\xi'})$  et  $\Lambda(Z_{\xi'}) \rightarrow \Lambda(\widehat{Z}_{\xi'})$  sont en outre des isomorphismes. Pour établir la surjectivité de ces homomorphismes, il s'agit de vérifier qu'un cycle 1-codimensionnel sur  $Z$ , positif et dont le support est contenu dans  $Z - Z_0$ , provient d'un diviseur sur  $Z$  si et seulement si tel est le cas sur  $\widehat{Z}_{\xi'}$ . Désignant par  $\mathfrak{J}$  l'idéal T-invariant associé à ce cycle,

- $\mathfrak{J}$  est localement principal sur un ouvert invariant de  $Z$ ; par conséquent, il est localement principal sur  $Z$  si et seulement s'il l'est au point  $\xi'$ ;
- les anneaux  $\mathcal{O}_{Z,\xi'}$  et  $\widehat{\mathcal{O}}_{Z,\xi'}$  étant intègres, l'idéal  $\mathfrak{J}\mathcal{O}_{Z,\xi'}$  (resp.  $\mathfrak{J}\widehat{\mathcal{O}}_{Z,\xi'}$ ) est principal si et seulement s'il est libre en tant que  $\mathcal{O}_{Z,\xi'}$ -module (resp.  $\widehat{\mathcal{O}}_{Z,\xi'}$ -module) et  $\mathfrak{J}\mathcal{O}_{Z,\xi'}$  est donc principal si et seulement si  $\mathfrak{J}\widehat{\mathcal{O}}_{Z,\xi'}$  l'est par platitude de  $\widehat{\mathcal{O}}_{Z,\xi'}$  sur  $\mathcal{O}_{Z,\xi'}$ .



Le morphisme  $\widehat{X}_\xi \rightarrow \widehat{Z}_{\xi'}$  induit par  $\gamma$  est étale et *fini*, de degré  $\text{deg}_\xi \gamma$ . On dispose par suite d'un homomorphisme *norme*  $N : \Lambda(\widehat{X}_\xi) \rightarrow \Lambda(\widehat{Z}_{\xi'})$  tel que

$$\gamma^*(N(D)) = (\text{deg}_\xi \gamma)D$$

pour tout  $D \in \Lambda(\widehat{X}_\xi)$  (en vertu du fait que  $\gamma$  réalise une bijection de  $\Xi(U, 1) = \gamma^{-1}(\Xi(Z, 1))$  sur  $\Xi(Z, 1)$ ) et l'on en déduit que l'homomorphisme injectif  $\gamma^* : \Lambda(\widehat{Z}_{\xi'}) \rightarrow \Lambda(\widehat{X}_\xi)$  donne naissance à un isomorphisme de  $\mathbb{Q}$ -vectoriels  $\Lambda(\widehat{Z}_{\xi'})_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \Lambda(\widehat{X}_\xi)_{\mathbb{Q}}$ .

Finalement, toutes les flèches du diagramme précédent deviennent des isomorphismes après tensorisation par  $\mathbb{Q}$  et cela achève la démonstration du lemme.

*Démonstration de la Proposition 3.11.*

(i)–(ii) L'application  $\mu_U$  est manifestement à valeurs dans le cône

$$\text{Hom}_{\mathbf{Mon}}(\Lambda(U)_+, ]0, 1]) = \{u \in \text{Hom}_{\mathbf{Ab}}(\Lambda(U), \mathbb{R}_{>0}) \mid u(D) \leq 1, D \in \Lambda(U)_+\}$$

et le diagramme naturel

$$\begin{array}{ccc} U^{\rhd} \cap \rho^{-1}(X_0) & \xrightarrow{\mu_U} & \text{Hom}_{\mathbf{Mon}}(\Lambda(U)_+, ]0, 1]) \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \cdot \circ \gamma^* \\ Z^{\rhd} \cap \rho^{-1}(Z_0) & \xrightarrow{\mu_Z} & \text{Hom}_{\mathbf{Mon}}(\Lambda(Z)_+, ]0, 1]) \end{array}$$

est commutatif. Il a déjà été établi que :

- l'application  $\mu_Z$  est surjective et réalise un homéomorphisme de  $\mathfrak{S}_0(Z)$  sur son image (Proposition 2.9) ;
- l'application  $\gamma$  réalise un homéomorphisme de  $\gamma^{-1}(\mathfrak{S}(Z))$  sur  $\mathfrak{S}(Z)$  (Proposition 3.7) ;

il découle en outre du lemme précédent que l'application  $(\cdot \circ \gamma^*)$  est bijective. Ces trois observations impliquent immédiatement les assertions (i) et (ii) de la proposition.

(iii) Soient  $f_1, \dots, f_d \in \mathcal{O}_Z(Z)$  engendrant le semi-groupe  $\Lambda(Z)_+$ . Étant donné un point  $u \in \text{Hom}_{\mathbf{Mon}}(\Lambda(U), ]0, 1])$ , d'image  $v$  dans  $\text{Hom}_{\mathbf{Mon}}(\Lambda(Z), ]0, 1])$ ,  $\mu_Z^{-1}(v)$  est le domaine affinoïde  $\{|f_1| = v(f_1), \dots, |f_d| = v(f_d)\}$  de  $Z^{\rhd}$  et

$$\begin{aligned} \mu_U^{-1}(u) &= \{|\gamma^\# f_1| = v(f_1), \dots, |\gamma^\# f_d| = v(f_d)\} \\ &= \{|\gamma^\# f_1| = u(\gamma^\# f_1), \dots, |\gamma^\# f_d| = u(\gamma^\# f_d)\}. \end{aligned}$$

Cela prouve que  $\mu_U^{-1}(u)$  est un domaine affinoïde de  $U^{\rhd}$ . Enfin, son bord de Shilov  $\Gamma(\mu_U^{-1}(u))$  (non vide) est contenu dans l'image réciproque du bord de Shilov de  $\mu_Z^{-1}(v)$  ; comme  $\Gamma(\mu_Z^{-1}(v)) = \mathfrak{S}(Z) \cap \mu_Z^{-1}(v)$  (Lemme 2.8), la conclusion découle de la bijectivité de l'application  $\gamma : \mathfrak{S}(U) = \gamma^{-1}(\mathfrak{S}(Z)) \rightarrow \mathfrak{S}(Z)$  (Proposition 3.7).

**Corollaire 3.13.** *Il existe une application continue et une seule  $\mathbf{p}_X : X^\square \rightarrow X^\square$  qui satisfasse à la condition suivante : pour toute carte étale  $\gamma : U \rightarrow Z$ ,  $\mathbf{p}_X(U^\square) \subset U^\square$  et le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} U^\square & \xrightarrow{\mathbf{p}_X} & U^\square \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \gamma \\ Z^\square & \xrightarrow{\mathbf{p}_Z} & Z^\square, \end{array}$$

dans lequel  $\mathbf{p}_Z$  est l'endomorphisme de  $Z^\square$  introduit au cours du chapitre précédent, est commutatif.

Cette application est telle que  $\mathbf{p}_X^2 = \mathbf{p}_X$ .

**Démonstration.** Considérons une carte étale  $\gamma : U \rightarrow Z$ . Puisque, par définition,  $\mathfrak{S}(Z) = \mathbf{p}_Z(Z^\square)$ , il existe en vertu de la Proposition 3.7 une application continue  $\mathbf{p}_U : U^\square \rightarrow U^\square$  et une seule telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U^\square & \xrightarrow{\mathbf{p}_U} & U^\square \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \gamma \\ Z^\square & \xrightarrow{\mathbf{p}_Z} & Z^\square \end{array}$$

soit commutatif. L'identité  $\mathbf{p}_Z^2 = \mathbf{p}_Z$  implique immédiatement  $\mathbf{p}_U^2 = \mathbf{p}_U$ . Le morphisme  $\gamma$  étant fixé,  $\mathbf{p}_V$  est la restriction de  $\mathbf{p}_U$  à  $V^\square$  pour tout ouvert  $V \subset U$  car, quel que soit l'ouvert affine invariant  $Z'$  de  $Z$ ,  $\mathbf{p}_{Z'}$  est la restriction de  $\mathbf{p}_Z$  à  $Z'^\square$  (Lemme 2.8).

Étant donné un point  $x$  dans  $U^\square \cap \rho^{-1}(X_0)$ , il découle d'autre part de la proposition précédente que  $\mathbf{p}_U(x)$  est l'unique point de Shilov du domaine affinoïde  $\mu_U^{-1}(\mu_U(x))$  de  $U^\square$ . La restriction de  $\mathbf{p}_U$  à l'ouvert dense  $U^\square \cap \rho^{-1}(X_0)$  de  $U^\square$  est donc indépendante du choix du morphisme étale  $\gamma$ , et cela est vrai sur  $U^\square$  tout entier en vertu de la continuité de  $\mathbf{p}_U$ . Cette dernière application ne dépend donc que de l'ouvert  $U$  de  $X$  et pas du morphisme  $\gamma : U \rightarrow Z$ .

Les différentes applications  $\mathbf{p}_U$  se recollent finalement en un endomorphisme  $\mathbf{p}_X$  de l'espace topologique sous-jacent à  $X^\square$  qui satisfait aux conditions de l'énoncé.

On désigne par  $\mathfrak{S}(X)$  l'image de l'application  $\mathbf{p}_X$  ; c'est un sous-espace fermé de  $X^\square$  et l'on pose  $\mathfrak{S}_0(X) = \mathfrak{S}(X) \cap \rho^{-1}(X_0)$ . L'application  $\mathbf{p}_X$  est une rétraction de  $X^\square$  sur  $\mathfrak{S}(X)$ .

(3.1.3) La description de  $\mathfrak{S}(X)$  est tout à fait semblable à celle de l'éventail compactifié d'une variété torique.

Commençons par introduire l'analogie de l'application  $\mathbf{p}_X$  au niveau schématique.

**Lemme 3.14.** Soit  $p_X : X \rightarrow X$  l'application associant à tout point  $x$  de  $X$  le point générique de l'unique strate de  $X$  contenant  $x$ . Il s'agit d'un endomorphisme continu de  $X$ , d'image  $\Xi(X)$  et s'insérant dans les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} X^\triangleright & \xrightarrow{p_X} & X^\triangleright \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho \\ X & \xrightarrow{p_X} & X \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} X^\triangleright & \xrightarrow{p_X} & X^\triangleright \\ r \downarrow & & \downarrow r \\ X & \xrightarrow{p_X} & X. \end{array}$$

**Démonstration.** Quelle que soit la carte étale  $\gamma : U \rightarrow Z$ ,  $p_X$  stabilise l'ouvert  $U$  et sa restriction à  $U$  est l'application  $p_U$ . La continuité de  $p_X$  s'établit comme celle de  $p_Z$  (proposition 2.5) et la commutativité des deux diagrammes considérés découle directement de l'assertion analogue pour  $Z$  (idem) et de la Proposition 3.7.

Comme dans le cas torique, nous obtenons que, pour tout point  $\xi \in \Xi(X)$ , la trace sur  $\mathfrak{S}(X)$  de l'image réciproque de la strate  $\Sigma(\xi)$  de  $X$  par l'application de réduction  $r : X^\triangleright \rightarrow X$  (resp. par l'application  $\rho : X^\triangleright \rightarrow X$ ) coïncide avec  $\mathfrak{S}(X) \cap r^{-1}(\xi)$  (resp. avec  $\mathfrak{S}(X) \cap \rho^{-1}(\xi)$ ).

**Proposition 3.15.** Soit  $\xi$  un point dans  $\Xi(X)$ .

(1) L'application

$$\Lambda(X(\xi)) \rightarrow C^0(\mathfrak{S}_0(X(\xi)), \mathbb{R}_{>0}), \quad D \mapsto |D|$$

munit  $\mathfrak{S}_0(X(\xi)) = \mathfrak{S}_0(X) \cap r^{-1}(X(\xi))$  d'une structure de cône rationnel strictement convexe.

(2) Quel que soit la généralisation  $\xi'$  de  $\xi$  dans  $\Xi(X)$ ,

$$\mathfrak{S}_0(X(\xi')) = \mathfrak{S}_0(X(\xi)) \cap X(\xi')^\triangleright$$

est une face du cône  $\mathfrak{S}_0(X(\xi))$  et la correspondance

$$\xi' \mapsto \mathfrak{S}_0(X(\xi'))$$

réalise une bijection de l'ensemble des généralisations de  $\xi$  dans  $\Xi(X)$  sur l'ensemble des faces du cône  $\mathfrak{S}_0(X(\xi))$ .

(3) L'application

$$\xi' \mapsto \mathfrak{S}_0(X(\xi)) \cap r^{-1}(\xi')$$

réalise une bijection de l'ensemble des généralisations de  $\xi$  dans  $\Xi(X)$  sur l'ensemble des intérieurs des faces du cône  $\mathfrak{S}_0(X(\xi))$ .

**Démonstration.** Le premier point est une conséquence directe de la Proposition 3.11. Les deux points suivants se déduisent immédiatement des assertions analogues dans le cas torique, démontrées à la Proposition 2.10.

Ainsi que nous venons de l'établir, le sous-espace  $\mathfrak{S}_0(X)$  de  $X^{\rhd}$  est naturellement muni d'une structure de polyèdre conique rationnel et la stratification canonique de  $X$  donne naissance à un recouvrement de  $\mathfrak{S}_0(X)$  par des cônes rationnels strictement convexes  $\mathfrak{S}_0(X(\xi))$  ( $\xi \in \Xi(X)$ ) tel que, pour tous points  $\xi', \xi'' \in \Xi(X)$ ,

$$\mathfrak{S}_0(X(\xi')) \cap \mathfrak{S}_0(X(\xi''))$$

soit la réunion des faces communes à  $\mathfrak{S}_0(X(\xi))$  et  $\mathfrak{S}_0(X(\xi''))$ . Par analogie avec le cas torique, nous dirons que  $\mathfrak{S}_0(X)$  est l'*éventail* du plongement toroïdal  $X_0 \hookrightarrow X$ .

La description du sous-espace fermé  $\mathfrak{S}(X)$  de  $X^{\rhd}$  se déduit facilement de celle de  $\mathfrak{S}_0(X)$ .

**Lemme 3.16.** *Soit  $\xi$  un point dans  $\Xi(X)$ ; munissant l'adhérence de la strate  $\Sigma(\xi)$  de sa structure canonique de sous-schéma fermé réduit de  $X$ , l'immersion ouverte*

$$\Sigma(\xi) \hookrightarrow \overline{\Sigma(\xi)}$$

*est un plongement toroïdal.*

**Démonstration.** Modulo le fait que, dans toute variété torique normale  $Z$ , l'adhérence  $\overline{O}$  d'une orbite  $O$  est une variété torique normale dont  $O$  est l'orbite ouverte, cette assertion est une conséquence immédiate de la Proposition 3.4.

**Proposition 3.17.** (1) *Le sous-ensemble fermé  $\mathfrak{S}(X)$  de  $X^{\rhd}$  est l'adhérence de  $\mathfrak{S}_0(X)$  et l'immersion ouverte  $\mathfrak{S}_0(X) \hookrightarrow \mathfrak{S}(X)$  est la compactification canonique provenant du recouvrement par les cônes strictement convexes  $\mathfrak{S}_0(X) \cap X(\xi)^{\rhd}$ ,  $\xi \in \Xi(X)$ .*

(2) *Soit  $\xi$  un point dans  $\Xi(X)$ . L'immersion fermée canonique*

$$\overline{\Sigma(\xi)^{\rhd}} \hookrightarrow X^{\rhd}$$

*induit un homéomorphisme de  $\mathfrak{S}(\overline{\Sigma(\xi)})$  sur  $\mathfrak{S}(X) \cap \rho^{-1}(\overline{\Sigma(\xi)})$ .*

(3) *Le bord de la compactification  $\mathfrak{S}(X)$  de  $\mathfrak{S}_0(X)$  reflète la stratification de  $X$  :*

$$\mathfrak{S}(X) - \mathfrak{S}_0(X) = \bigcup_{\xi \in \Xi(X)} \mathfrak{S}(\overline{\Sigma(\xi)}).$$

**Démonstration.** Modulo le lemme précédent, ces résultats découlent directement des énoncés analogues dans le cas torique (Proposition 2.13).

### 3.2. La contraction de $X^{\rhd}$ sur $\mathfrak{S}(X)$

Comme dans le cas torique, nous allons maintenant voir qu'il existe une manière naturelle de définir une contraction de  $X^{\rhd}$  sur  $\mathfrak{S}(X)$ . La construction qui suit est essentiellement celle de Berkovich au paragraphe 5 de l'article [5].

(3.2.1) L'homotopie  $H$  va être obtenue en recollant des applications construites localement à partir des cartes étales.

**Définition 3.18.** Étant donné un  $k$ -groupe algébrique  $G$ , on désigne par  $\widehat{G}_1$  le complété formel de  $G$  au point unité 1.

On rappelle que la catégorie des  $k$ -schémas s'identifie naturellement à une sous-catégorie pleine de la catégorie des  $k$ -schémas formels, au  $k$ -schéma affine  $X = \text{Spec}(A)$  correspondant le  $k$ -schéma formel affine  $\text{Spf}(A)$  obtenu en munissant l'anneau  $A$  de la topologie discrète. En particulier, si  $m : G \times Z \rightarrow Z$  est l'action d'un  $k$ -groupe  $G$  sur un  $k$ -schéma  $Z$ , le morphisme de  $k$ -schémas formels obtenu en composant  $m$  avec  $i \times \text{id}_Z : \widehat{G}_1 \times Z \rightarrow G \times Z$ , où  $i$  est le morphisme canonique de  $\widehat{G}_1$  dans  $G$ , est une action de  $\widehat{G}_1$  sur le  $k$ -schéma formel  $Z$ .

L'observation suivante se trouve dans l'article [5] de V. Berkovich (Lemma 5.5).

**Lemme 3.19.** Soient  $G$  un  $k$ -groupe,  $Z$  un  $k$ -schéma et  $m : G \times Z \rightarrow Z$  une action de  $G$  sur  $Z$ . Quel que soit le morphisme étale  $\gamma : U \rightarrow Z$ , il existe un unique morphisme de  $k$ -schémas formels  $m_\gamma : \widehat{G}_1 \times U \rightarrow U$  définissant une action de  $\widehat{G}_1$  et tel que le diagramme

$$\begin{CD} \widehat{G}_1 \times U @>{m_\gamma}>> U \\ @V{\text{id} \times \gamma}VV @VV{\gamma}V \\ \widehat{G}_1 \times Z @>{m}>> Z \end{CD}$$

soit commutatif.

**Démonstration.** Notons  $i$  l'immersion fermée  $\text{Spf}(k) \rightarrow \widehat{G}_1$  définissant le  $k$ -point 1 de  $\widehat{G}_1$  et considérons le diagramme cartésien suivant dans la catégorie des  $k$ -schémas formels :

$$\begin{CD} V @>{f}>> U \\ @V{g}VV @VV{\gamma}V \\ \widehat{G}_1 \times U @>{\text{id}_{\widehat{G}_1} \times \gamma}>> \widehat{G}_1 \times Z @>{m}>> Z. \end{CD}$$

Le diagramme

$$\begin{CD} U @>{\text{id}_U}>> U \\ @V{\text{id}_U}VV @VV{\gamma}V \\ \{1\} \times U @>{i \times \gamma}>> \widehat{G}_1 \times Z @>{m}>> Z \end{CD}$$

est commutatif puisque  $m \circ (i \times \text{id}_Z)$  est l'identité de  $Z = \{1\} \times Z$ ; il détermine donc une section  $\sigma_0$  de  $g$  au-dessus de la fibre spéciale  $\{1\} \times U$  du  $k$ -schéma formel

$\widehat{G}_1 \times U$ . Le morphisme  $g$  étant étale,  $\sigma_0$  se prolonge de manière unique en une section  $\sigma$  de  $g$ . Par construction, le morphisme  $m_\gamma = f \circ \sigma$  s'insère alors dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widehat{G}_1 \times U & \xrightarrow{m_\gamma} & U \\ \text{id}_{\widehat{G}_1} \times \gamma \downarrow & & \downarrow \gamma \\ \widehat{G}_1 & \xrightarrow{m} & Z \end{array}$$

et  $m_\gamma \circ (i \times \text{id}_U) = f \circ \sigma_0$  est l'identité de  $U = \{1\} \times U$ . Pour établir que  $m_\gamma$  définit une action de  $\widehat{G}_1$  sur  $U$ , il reste à vérifier que le diagramme suivant,

$$\begin{array}{ccc} \widehat{G}_1 \times \widehat{G}_1 \times U & \xrightarrow{\mu \times \text{id}_U} & \widehat{G}_1 \times U \\ \text{id}_{\widehat{G}_1} \times m_\gamma \downarrow & & \downarrow m_\gamma \\ \widehat{G}_1 \times U & \xrightarrow{m_\gamma} & U, \end{array}$$

dans lequel  $\mu : \widehat{G}_1 \times \widehat{G}_1 \rightarrow \widehat{G}_1$  est la loi de groupe de  $\widehat{G}_1$ , est commutatif. Ceci découle du fait que chacun des morphismes  $m_\gamma \circ (\mu \times \text{id}_U)$  et  $m_\gamma \circ (\text{id}_{\widehat{G}_1} \times m_\gamma)$  fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \widehat{G}_1 \times \widehat{G}_1 \times U & \dashrightarrow & U \\ \text{id} \times \text{id} \times \gamma \downarrow & & \downarrow \gamma \\ \widehat{G}_1 \times \widehat{G}_1 \times Z & \xrightarrow{m''} & Z, \end{array}$$

où

$$m'' = m \circ (\mu \times \text{id}_Z) = m \circ (\text{id}_{\widehat{G}_1} \times m),$$

le même raisonnement que précédemment montrant en effet qu'il existe un unique morphisme ayant cette propriété.

**(3.2.2)** Considérons maintenant une carte étale  $\gamma : U \rightarrow Z$  et notons  $T$  le tore de  $Z$ , de groupe des caractères  $M$ . Posant  $\mathfrak{T} = \widehat{T}_1$ , l'espace de Berkovich

$$\mathfrak{T}^\square = \{x \in T^\square \mid |\chi(m) - 1|(x) < 1, m \in M\}$$

du  $k$ -schéma formel  $\mathfrak{T}$  est un sous-groupe  $k$ -analytique de  $T^\square$ , réunion des sous-groupes  $G(t)$ ,  $t \in [0, 1[$ , définis au paragraphe 2.2.1.

*Remarque 3.20.* Quelle que soit l'extension non archimédienne  $K$  de  $k$ , l'ensemble des  $K$ -points de  $\mathfrak{T}^\square$  est le groupe des éléments  $x$  de  $\text{Hom}_{\text{Ab}}(M, K^\times)$  tels que  $|x(m) - 1| < 1$  pour tout  $m \in M$ .

Le morphisme de  $k$ -schémas formels  $m_\gamma : \mathfrak{T} \times U \rightarrow U$ , déduit à l'aide du lemme précédent de l'action de  $T$  sur  $Z$ , induit un morphisme d'espaces  $k$ -analytiques  $m_\gamma : \mathfrak{T}^\square \times U^\square \rightarrow U^\square$  qui définit une action du  $k$ -groupe analytique  $\mathfrak{T}^\square$  sur  $U^\square$  telle que le morphisme  $p : U^\square \rightarrow Z^\square$  soit équivariant.

Tout point  $x$  de  $U^\square$  définit tautologiquement un  $\mathcal{H}(x)$ -point  $\underline{x} : \mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) \rightarrow U^\square$  et donne lieu au morphisme canonique

$$m_{\gamma,x} : \mathfrak{T}_{\mathcal{H}(x)}^\square = \mathfrak{T}^\square \times \mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) \rightarrow U^\square,$$

composé par  $m_\gamma$  de l'homomorphisme  $\text{id}_{\mathfrak{T}^\square} \times \underline{x} : \mathfrak{T}^\square \times \mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) \rightarrow \mathfrak{T}^\square \times U^\square$ .

La définition suivante s'impose d'elle-même.

**Définition 3.21.** Étant donnée une carte étale  $\gamma : U \rightarrow Z$  sur  $X$ , on définit une application  $H_\gamma$  de  $[0, 1] \times U^\square$  dans  $U^\square$  de la manière suivante : pour tout point  $x \in U^\square$ ,

- $H_\gamma(t, x)$  est l'image par  $m_{\gamma,x}$  du point de Shilov  $g_{\mathcal{H}(x)}(t)$  de l'espace  $\mathcal{H}(x)$ -affinoïde  $G_{\mathcal{H}(x)}(t)$  si  $t \in [0, 1[$ ;
- $H_\gamma(1, x) = \mathbf{p}_X(x)$ .

*Remarque 3.22.* 1. Quel que soit  $t$  dans  $[0, 1[$ , l'application  $H_\gamma(t, \cdot)$  stabilise chacune des fibres de l'application de réduction  $r : U^\square \rightarrow U$ .

2. Soit  $\gamma : U \rightarrow Z$  une carte étale sur  $X$  et soit  $x$  un point de  $U^\square$ . Désignant par  $m_\gamma : \mathfrak{T} \times U \rightarrow U$  l'action de  $\mathfrak{T}$  sur  $U$  fournie par le Lemme 3.19, le morphisme  $m_{\gamma,x} : \mathfrak{T}^\square \rightarrow U^\square \widehat{\otimes}_k \mathcal{H}(x)$  se factorise par la projection canonique de  $U^\square \widehat{\otimes}_k \mathcal{H}(x)$  sur  $U^\square$ . Pour tout  $t \in [0, 1[$ , l'image  $G(t, x)$  du sous-groupe analytique  $G_{\mathcal{H}(x)}(t) \subset \mathfrak{T}^\square \widehat{\otimes}_k \mathcal{H}(x)$  dans  $U^\square \widehat{\otimes}_k \mathcal{H}(x)$  est l'orbite du  $\mathcal{H}(x)$ -point  $\underline{x}$  sous  $G_{\mathcal{H}(x)}(t)$ .

3. Le corps  $\mathcal{H}(x)$  ne joue aucun rôle particulier dans ce qui précède. Quels que soient en effet l'extension non archimédienne  $K$  de  $k$  et le point  $\underline{x}$  de  $U^\square(K)$  localisé en  $x$ ,  $H_\gamma(t, x)$  est, pour tout  $t \in [0, 1[$ , l'image du point de Shilov de l'espace  $K$ -affinoïde  $G_K(t)$  par le morphisme

$$\mathfrak{T}_K^\square = \mathfrak{T}^\square \times \mathcal{M}(K) \rightarrow \mathfrak{T}^\square \times U^\square \rightarrow U^\square.$$

Ceci découle du fait qu'un tel corps  $K$  est nécessairement une extension de  $\mathcal{H}(x)$  et que la projection canonique de  $\mathfrak{T}^\square \widehat{\otimes}_k K$  sur  $\mathfrak{T}^\square \widehat{\otimes}_k \mathcal{H}(x)$  envoie le point de Shilov de la source sur le point de Shilov du but.

**Proposition 3.23.** *Quelle que soit la carte étale  $\gamma : U \rightarrow Z$  sur  $X$ , l'application*

$$H_\gamma : [0, 1] \times U^\square \rightarrow U^\square$$

*possède les propriétés suivantes :*

- (i) elle est continue ;
- (ii)  $H_\gamma(0, \cdot)$  est l'identité de  $U^\square$  et  $H_\gamma(1, \cdot)$  est la rétraction  $\mathbf{p}_U$  de  $U^\square$  sur  $\mathfrak{S}(U)$  ;
- (iii)  $H_\gamma(t, \cdot)$  induit l'identité sur  $\mathfrak{S}(U)$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .

**Démonstration.** Désignant par  $H_Z$  l’homotopie  $[0, 1] \times Z^{\rhd} \rightarrow Z^{\rhd}$  construite à la Sect. 2.2 du chapitre précédent, le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 [0, 1] \times U^{\rhd} & \xrightarrow{H_\gamma} & U^{\rhd} \\
 \text{id}_{[0,1]} \times \gamma \downarrow & & \downarrow \gamma \\
 [0, 1] \times Z^{\rhd} & \xrightarrow{H_Z} & Z^{\rhd}
 \end{array}$$

est commutatif.

(ii) Ces deux assertions sont trivialement vérifiées.

(iii) Modulo le diagramme commutatif que l’on vient d’écrire, cette assertion découle directement du résultat analogue pour  $H_Z$  (Proposition 2.17) et du fait que  $\gamma$  réalise une bijection de  $\gamma^{-1}(\mathfrak{S}(Z)) = \mathfrak{S}(U)$  sur le sous-ensemble  $\gamma(\mathfrak{S}(U))$  de  $\mathfrak{S}(Z)$  (Proposition 3.7).

(i) La preuve de la continuité de  $H_\gamma$  est essentiellement la même que celle de la continuité de l’application  $H_Z$  donnée à la Proposition 2.17 :

- comme pour  $H_Z$ , il suffit d’établir la continuité partielle de  $H_\gamma$  relativement à chacune des variables ;
- quel que soit  $t \in ]0, 1[$ , la continuité de  $H_\gamma(t, \cdot)$  s’établit comme dans la Proposition 2.17 ;
- pour tout  $x \in U^{\rhd}$ , la continuité de  $H_\gamma(\cdot, x)$  sur  $[0, 1[$  découle directement de la définition et il suffit d’établir la continuité au point 1. Le  $k$ -schéma  $U$  étant recouvert par les ouverts  $\mathfrak{T}$ -invariants  $U(\xi)$ ,  $\xi \in \Xi(U)$ , il existe  $\xi \in \Xi(U)$  tel que  $x$  soit contenu dans le fermé  $\mathfrak{T}^{\rhd}$ -invariant  $U(\xi)^{\rhd}$ . Comme  $U(\xi)^{\rhd}$  est en outre stable sous  $\mathbf{p}_U$ , il est stabilisé par  $H_\gamma$  et nous pouvons remplacer  $U$  par  $U(\xi)$ . Remplaçant de même  $Z$  par  $Z(\gamma(\xi))$  (ouvert invariant contenant  $\gamma(\xi)$ ), nous nous réduisons au cas où l’application  $\gamma : U^{\rhd} \rightarrow Z^{\rhd}$  induit un homéomorphisme de  $\mathfrak{S}(U) = \gamma^{-1}(\mathfrak{S}(Z))$  sur  $\mathfrak{S}(Z)$ .

Soit alors  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de points de  $[0, 1[$  convergeant vers 1. Si  $y$  est une valeur d’adhérence de la suite  $(H(t_n, x))_n$  dans  $U^{\rhd}$ ,  $\gamma(y) = H_Z(1, \gamma(x)) = \mathbf{p}_Z(\gamma(x))$ . Comme  $\gamma^{-1}(\mathbf{p}_Z(\gamma(x))) = \{\mathbf{p}_U(x)\}$ , on a donc  $y = \mathbf{p}_U(x)$  et la suite  $(H_\gamma(t_n, x))_n$  converge ainsi vers  $\mathbf{p}_U(x) = H(1, x)$ .

La dernière étape consiste à s’assurer que les homotopies locales  $H_\gamma$  peuvent se recoller en une homotopie globale  $H$ .

**Lemme 3.24.** *Étant données deux cartes étales  $\gamma : U \rightarrow Z$  et  $\gamma' : U' \rightarrow Z'$  sur  $X$ ,  $H_\gamma$  et  $H_{\gamma'}$  stabilisent  $(U \cap U')^{\rhd} = U^{\rhd} \cap U'^{\rhd}$ .*

**Démonstration.** Les applications  $H_\gamma(t, \cdot)$  et  $H_{\gamma'}(t, \cdot)$  stabilisent respectivement les fibres des applications de réduction  $r_U : U^{\rhd} \rightarrow U$  et  $r_{U'} : U'^{\rhd} \rightarrow U'$  pour tout  $t \in [0, 1[$  ; elles stabilisent donc le sous-espace fermé  $U^{\rhd} \cap U'^{\rhd} = (U \cap U')^{\rhd} = r^{-1}(U \cap U') = r_U^{-1}(U \cap U') = r_{U'}^{-1}(U \cap U')$  de  $X^{\rhd}$ .



**Proposition 3.25.** *Quelles que soient les cartes étales  $\gamma : U \rightarrow Z$  et  $\gamma' : U \rightarrow Z'$  sur  $X$ ,  $H_\gamma = H_{\gamma'}$ .*

**Démonstration.** Considérons deux cartes étales  $\gamma : U \rightarrow Z$  et  $\gamma' : U \rightarrow Z'$  sur  $X$ ; nous pouvons supposer que  $U, Z$  et  $Z'$  sont affines, de la forme  $U = U(\xi), Z = Z(\zeta)$  et  $Z' = Z'(\zeta')$  avec  $\xi \in \Xi(X), \zeta = \gamma(\xi) \in \Xi(Z)$  et  $\zeta' = \gamma'(\xi) \in \Xi(Z')$ . Rappelons que, dans ces conditions, les morphismes  $\gamma$  et  $\gamma'$  induisent respectivement des homéomorphismes de  $\mathfrak{S}(U) = \gamma^{-1}(\mathfrak{S}(Z)) = \gamma'^{-1}(\mathfrak{S}(Z'))$  sur  $\mathfrak{S}(Z)$  et  $\mathfrak{S}(Z')$ . Observons également que  $Z$  et  $Z'$  sont deux variétés toriques sous le même tore puisque  $\dim(Z) = \dim(U) = \dim(Z')$ .

En vertu de la continuité des applications  $H_\gamma$  et  $H_{\gamma'}$ , il suffit d'établir l'identité

$$H_\gamma(t, x) = H_{\gamma'}(t, x)$$

pour tout point  $(t, x)$  de l'ouvert dense  $[0, 1[\times \rho^{-1}(U_0)$  de  $[0, 1] \times U^\square$ .

Nous fixons un point  $x$  dans  $\rho^{-1}(U_0)$  et choisissons une extension non archimédienne  $K$  de  $k$  dont la valeur absolue n'est pas triviale, ainsi qu'un point  $\underline{x}$  dans  $U^\square(K)$  localisé en  $x$ .

Première étape. Par application du Lemme 3.19, nous obtenons deux actions  $m_\gamma : \mathfrak{T} \times U \rightarrow U$  et  $m_{\gamma'} : \mathfrak{T} \times U \rightarrow U$  du  $k$ -groupe formel  $\mathfrak{T}$  sur  $U$ . Nous allons vérifier que l'orbite  $G_\gamma(1^-, \underline{x})$  de  $\underline{x}$  sous l'action  $m_\gamma$  de  $\mathfrak{T}_K^\square = \mathfrak{T}^\square \widehat{\otimes}_k K$  coïncide avec son orbite  $G_{\gamma'}(1^-, \underline{x})$  sous l'action de  $m_{\gamma'}$ .

Posons  $\underline{z} = \gamma(\underline{x})$  et  $z = \gamma(x)$ . Comme  $z$  appartient à  $\rho^{-1}(Z_0), |\chi_m|(z) \neq 0$  pour tout caractère  $m$  du tore  $T$  de  $Z$  et, vu la définition de la rétraction  $\mathbf{p}_Z : Z^\square \rightarrow \mathfrak{S}(Z), \mathbf{p}_Z^{-1}(\mathbf{p}_Z(z))$  est le domaine affinoïde

$$V = \{|\chi_m| = |\chi_m|(z), m \in M\}$$

de  $Z^\square$ , où  $M$  désigne le groupe des caractères de  $T$ . De manière équivalente,  $V \widehat{\otimes}_k K$  est l'orbite du point  $\underline{z}$  sous  $T^\square \widehat{\otimes}_k K$ , c'est-à-dire l'image du morphisme

$$\tilde{m}_{\underline{z}} : T^\square \widehat{\otimes}_k K \rightarrow Z^\square \widehat{\otimes}_k K$$

factorisant le morphisme canonique

$$T^\square \widehat{\otimes}_k K = T^\square \times \mathcal{M}(K) \longrightarrow T^\square \times Z^\square \xrightarrow{m} Z^\square.$$

Le domaine  $K$ -affinoïde  $V \widehat{\otimes}_k K = \mathcal{M}(A)$  est isomorphe, via  $\tilde{m}_{\underline{z}}$ , à  $T^\square \widehat{\otimes}_k K$ . On en déduit que  $\tilde{m}_{\underline{z}}$  induit un isomorphisme du  $K^\circ$ -schéma formel  $T \times \mathrm{Spf}(K^\circ) = \mathrm{Spf}(K^\circ\{M\})$  sur  $\mathrm{Spf}(A^\circ)$ , et donc que  $\mathrm{Spf}(A^\circ)$  est un  $K^\circ$ -schéma formel de présentation finie et lisse.

Soit  $\mathfrak{W}$  le  $K^\circ$ -schéma formel défini par le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{W} & \longrightarrow & U \times \mathrm{Spf}(K^\circ) \\ \delta \downarrow & & \downarrow \gamma \\ \mathrm{Spf}(A^\circ) & \xrightarrow{i} & Z \times \mathrm{Spf}(K^\circ), \end{array}$$

où  $i$  désigne le  $K^\circ$ -morphisme provenant de l'immersion affinoïde  $\mathcal{M}(A) \rightarrow Z_\eta \widehat{\otimes}_k K$ . Il s'agit d'un  $K^\circ$ -schéma formel affine car tel est le cas des trois autres. Le morphisme  $\gamma$  étant étale, il en est de même de  $\delta$  et le  $K^\circ$ -schéma formel  $\mathfrak{W}$  est donc de présentation finie et lisse. Comme sa fibre générique est le domaine  $K$ -affinoïde  $\gamma^{-1}(V_K) = \mathcal{M}(B)$  de  $U^\triangleright \widehat{\otimes}_k K$ , nous obtenons finalement  $\mathfrak{W} = \text{Spf}(B^\circ)$  puisque,  $\mathfrak{W}$  étant lisse, son anneau de coordonnées est égal à sa fermeture intégrale  $B^\circ$  dans  $B$  ([7], 6.1.2 et 6.3.4).

Le groupe  $K$ -analytique  $\mathfrak{I}_K^\triangleright \subset T^\triangleright \widehat{\otimes}_k K$  est la fibre de l'application de réduction  $T^\triangleright \widehat{\otimes}_k K \rightarrow T \otimes_k \tilde{K}$  au-dessus du point 1 de  $T(\tilde{K})$ . L'orbite  $G(1^-, \underline{z})$  de  $\underline{z}$  sous  $\mathfrak{I}_K^\triangleright$  est de même la fibre de l'application de réduction  $r : V_K \rightarrow \text{Spf}(A^\circ)$  au-dessus du  $\tilde{K}$ -point  $r(\underline{z})$ . L'action  $m_\gamma$  de  $\mathfrak{I}$  sur  $U$  relevant, par définition, l'action de  $\mathfrak{I}$  sur  $Z$  via  $\gamma$ , les fibres de l'application de réduction  $r : \mathfrak{W}_\eta = \gamma^{-1}(V_K) \rightarrow \mathfrak{W}$  sont stables sous  $\mathfrak{I}_K^\triangleright$  et donc  $G_\gamma(1^-, \underline{x}) \subset r^{-1}(r(\underline{x}))$ . L'inclusion réciproque est facile à établir : quel que soit le point  $y$  de  $r^{-1}(r(\underline{x}))$ ,  $\delta(y) \in r^{-1}(r(\underline{z})) = G(1^-, \underline{z})$  et donc  $y \in G_\gamma(1^-, y')$ , où  $y'$  est un point de  $r^{-1}(r(\underline{x}))$  tel que  $\delta(y') = \underline{z}$ ; en vertu du caractère étale du morphisme  $\delta : \mathfrak{W} \rightarrow \text{Spf}(A^\circ)$ ,  $\underline{x}$  est l'unique point de  $r^{-1}(r(\underline{x}))$  d'image  $\underline{z}$  et l'on en conclut à l'appartenance de  $y$  à  $G_\gamma(1^-, \underline{x})$ .

Nous avons ainsi démontré que l'orbite de  $\underline{x}$  sous  $\mathfrak{I}_K^\triangleright$  s'identifie à la fibre de  $r : \mathfrak{W}_\eta = \gamma^{-1}(V_K) \rightarrow \mathfrak{W}$  au-dessus de  $r(\underline{x})$ .

La même discussion que précédemment, en partant cette fois de la carte étale  $\gamma' : U \rightarrow Z'$ , permet d'établir que l'orbite  $G_{\gamma'}(1^-, \underline{x})$  est la fibre de l'application de réduction  $r' : \gamma'^{-1}(V_K) = \mathfrak{W}'_\eta \rightarrow \mathfrak{W}'$  au-dessus du point  $r'(\underline{x})$ ,  $\mathfrak{W}'$  étant ici le  $K^\circ$ -schéma formel  $\text{Spf}(B'^\circ)$  de fibre générique le domaine  $K$ -affinoïde  $\gamma'^{-1}(V_K) = \mathcal{M}(B')$  de  $U^\triangleright \widehat{\otimes}_k K$ .

Il est maintenant aisé de conclure. Comme le morphisme  $\gamma$  induit un homéomorphisme de  $\mathfrak{S}(U) = \gamma^{-1}(\mathfrak{S}(Z))$  sur  $\mathfrak{S}(Z)$ , le domaine affinoïde  $\gamma^{-1}(V) = \gamma^{-1}(\mathfrak{p}_Z^{-1}(\mathfrak{p}_Z(z)))$  de  $U^\triangleright$  coïncide avec  $\mathfrak{p}_U^{-1}(\mathfrak{p}_U(x))$ ; on a de même

$$\gamma'^{-1}(V) = \mathfrak{p}_U^{-1}(\mathfrak{p}_U(x))$$

et donc

$$\gamma^{-1}(V_K) = \gamma^{-1}(V) \widehat{\otimes}_k K = \gamma'^{-1}(V) \widehat{\otimes}_k K = \gamma'^{-1}(V_K).$$

Les  $K^\circ$ -schémas formels  $\mathfrak{W}$  et  $\mathfrak{W}'$  sont par conséquent identiques et

$$G_\gamma(1^-, \underline{x}) = G_{\gamma'}(1^-, \underline{x}).$$

Seconde étape. Soit  $\varphi$  l'automorphisme de  $\mathfrak{I}_K^\triangleright$  défini par

$$\mathfrak{I}_K^\triangleright \xrightarrow{\sim} G_\gamma(1^-, \underline{x}) = G_{\gamma'}(1^-, \underline{x}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{I}_K^\triangleright.$$

Il est clair que  $\varphi(1) = 1$  et, comme tout automorphisme analytique d'un polydisque ouvert fixant l'origine préserve le rayon des polydisques fermés ([1], Lemma 6.4.4), nous obtenons les égalités

$$\varphi(G_K(t)) = G_K(t)$$

puis

$$H_\gamma(t, x) = H_{\gamma'}(t, x)$$

pour tout  $t \in [0, 1[$ .

**Théorème 3.26.** *Il existe une application*

$$H : [0, 1] \times X^\triangleright \rightarrow X^\triangleright$$

et une seule satisfaisant à la condition suivante : quelle que soit la carte étale  $\gamma : U \rightarrow Z$  sur  $X$ ,  $H$  envoie  $[0, 1] \times U^\triangleright$  dans  $U^\triangleright$  et sa restriction à  $[0, 1] \times U^\triangleright$  est l'homotopie  $H_\gamma$  de la proposition 3.23.

*C'est une application continue telle que, pour tout point  $x \in X^\triangleright$  :*

- $H(0, x) = x$  ;
- $H(1, x) = \mathbf{p}_X(x)$  ;
- si  $x$  appartient à  $\mathfrak{S}(X)$ ,  $H(t, x) = x$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .

**Démonstration.** Cet énoncé la conjonction du lemme 3.24 et de la Proposition 3.25.

**Corollaire 3.27.** *Soit  $X_0 \hookrightarrow X$  un plongement toroïdal simple et soit  $\mathfrak{X}$  le complété formel de  $X$  le long du fermé  $X - X_0$ .*

- (1) *La rétraction  $\mathbf{p}_X : X^\triangleright \rightarrow \mathfrak{S}(X)$  envoie l'ouvert  $\mathfrak{X}_\eta$  sur le polyèdre conique épointé*

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{S}(X^\triangleright) \cap \mathfrak{X}_\eta = \mathfrak{S}(X) - r^{-1}(X^{(0)}),$$

où  $X^{(0)}$  désigne l'ensemble des points génériques de  $X$ .

- (2) *L'homotopie  $H : [0, 1] \times X^\triangleright \rightarrow X^\triangleright$  stabilise l'ouvert  $\mathfrak{X}_\eta$  de  $X^\triangleright$  et elle induit une homotopie  $H : [0, 1] \times \mathfrak{X}_\eta \rightarrow \mathfrak{X}_\eta$  contractant  $\mathfrak{X}_\eta$  sur  $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$ .*

**Démonstration.** (1) La rétraction  $\mathbf{p}_X$  de  $X^\triangleright$  sur  $\mathfrak{S}(X)$  envoie  $\rho^{-1}(X_0)$  sur  $\mathfrak{S}_0(X)$  et  $\mathbf{p}_X^{-1}(r^{-1}(X^{(0)})) = r^{-1}(X_0)$ . Comme  $\mathfrak{X}_\eta = \rho^{-1}(X_0) \cap (X^\triangleright - r^{-1}(X_0))$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_X(\mathfrak{X}_\eta) &= \mathfrak{S}_0(X) - r^{-1}(X^{(0)}) = \mathfrak{S}(X) \cap \rho^{-1}(X_0) - \mathfrak{S}(X) \cap r^{-1}(X_0) \\ &= \mathfrak{S}(X) \cap \mathfrak{X}_\eta. \end{aligned}$$

- (2) Par construction, chacune des applications  $H(t, \cdot)$  stabilise les fibres de  $\rho$  et  $r$  lorsque  $t$  appartient à  $[0, 1[$ . Ces applications préservent donc  $\mathfrak{X}_\eta$  et, comme tel est également le cas de  $H(1, \cdot) = \mathbf{p}_X$  d'après ce qui précède, l'homotopie  $H$  stabilise  $\mathfrak{X}_\eta$ . L'application  $H : [0, 1] \times \mathfrak{X}_\eta \rightarrow \mathfrak{X}_\eta$  contracte  $\mathfrak{X}_\eta$  sur le polyèdre conique épointé  $H(1, \mathfrak{X}_\eta) = \mathfrak{S}_0(X) - r^{-1}(X^{(0)})$ .

3.3. Extension : plongements toroïdaux généraux

(3.3.1) Les résultats que l'on vient d'établir au sujet des plongements toroïdaux simples valent en toute généralité et leur extension est quasi immédiate.

**Lemme 3.28.** Soit  $U_0 \hookrightarrow U$  un plongement toroïdal simple et soit  $v : V \rightarrow U$  un morphisme étale.

- (1) L'immersion ouverte  $v^{-1}(U_0) \hookrightarrow V$  est un plongement toroïdal simple,  $\mathfrak{S}(V) = v^{-1}(\mathfrak{S}(U))$  et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] \times V^{\square} & \xrightarrow{H_V} & V^{\square} \\ \text{id} \times v \downarrow & & \downarrow v \\ [0, 1] \times U^{\square} & \xrightarrow{H_U} & U^{\square}, \end{array}$$

dans lequel  $H_U$  et  $H_V$  sont les applications décrites au théorème 3.26, est commutatif.

- (2) Quels que soient les points  $\xi \in \Xi(U)$  et  $\zeta \in \Xi(V)$  tels que  $v(\zeta) = \xi$ , l'application  $v$  réalise un homéomorphisme de  $\mathfrak{S}(V(\zeta))$  sur  $\mathfrak{S}(U(\xi))$ . En particulier, l'application de  $\Xi(V(\zeta))$  dans  $\Xi(U(\xi))$  induite par  $v$  est bijective.

**Démonstration.** (1) Le morphisme  $v : V \rightarrow U$  étant ouvert — car de présentation finie et plat — la densité de l'ouvert  $U_0$  de  $U$  implique celle de l'ouvert  $v^{-1}(U_0)$  de  $V$  et l'immersion ouverte  $v^{-1}(U_0) \hookrightarrow V$  est trivialement un plongement toroïdal simple.

Quelle que soit la carte étale  $\gamma : U' \rightarrow Z$  sur  $U$ ,  $\gamma \circ v : \gamma^{-1}(U') \rightarrow Z$  est une carte étale sur  $V$ . L'identité  $\mathfrak{S}(V) = v^{-1}(\mathfrak{S}(U))$  vient de ce que

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(V) \cap v^{-1}(U')^{\square} &= \mathfrak{S}(v^{-1}(U')) = (\gamma \circ v)^{-1}(\mathfrak{S}(Z)) = v^{-1}(\gamma^{-1}(\mathfrak{S}(Z))) \\ &= v^{-1}(\mathfrak{S}(U')) \end{aligned}$$

(Proposition 3.7). D'autre part, il existe en vertu du Lemme 3.19 une unique action  $m : \mathfrak{T} \times U' \rightarrow U'$  (resp.  $m' : \mathfrak{T} \times v^{-1}(U') \rightarrow v^{-1}(U')$ ) du tore formel  $\mathfrak{T}$  sur  $U'$  (resp. sur  $v^{-1}(U')$ ) relevant son action sur la variété torique  $Z$  via le morphisme  $\gamma$  (resp.  $\gamma \circ v$ ). Toujours en vertu du Lemme 3.19, il existe une unique action  $m'' : \mathfrak{T} \times v^{-1}(U') \rightarrow v^{-1}(U')$  relevant  $m$  via le morphisme  $v$ ; comme  $m''$  relève également  $m$ ,  $m'' = m'$  et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{T} \times v^{-1}(U') & \xrightarrow{m'} & v^{-1}(U') \\ \text{id} \times v \downarrow & & \downarrow v \\ \mathfrak{T} \times U' & \xrightarrow{m} & U' \end{array}$$

est commutatif.

Il découle de la définition des applications  $H_\gamma$  et  $H_{\gamma \circ \nu}$  que la commutativité du diagramme précédent implique celle du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 [0, 1[ \times \nu^{-1}(U') & \xrightarrow{H_{\gamma \circ \nu}} & \nu^{-1}(U') \\
 \text{id} \times \nu \downarrow & & \downarrow \nu \\
 [0, 1[ \times U' & \xrightarrow{H_\gamma} & U',
 \end{array}$$

et l'on conclut alors en invoquant la définition et la continuité des applications  $H_U$  et  $H_V$  (Théorème 3.26).

(2) Soit  $\gamma : U' \rightarrow Z$  une carte étale sur  $U$  telle que  $\xi \in U'$ . Les morphismes  $\gamma$  et  $\gamma \circ \nu$  induisant respectivement des homéomorphismes de  $\mathfrak{S}(U(\xi))$  et de  $\mathfrak{S}(V(\zeta))$  sur  $\mathfrak{S}(Z(\gamma(\xi)))$  (Proposition 3.7), le morphisme  $\nu$  réalise un homéomorphisme de  $\mathfrak{S}(V(\zeta))$  sur  $\mathfrak{S}(U(\xi))$ .

Il découle d'autre part de la Proposition 3.15 que l'application de  $\mathfrak{S}_0(V(\zeta))$  sur  $\mathfrak{S}_0(U(\xi))$  induite par  $\nu$  est un morphisme de cônes rationnels ; elle définit par conséquent une bijection de l'ensemble des faces de  $\mathfrak{S}_0(V(\zeta))$  sur l'ensemble des faces de  $\mathfrak{S}(U(\xi))$ , ce qui signifie précisément que l'application  $\nu : \Xi(V(\zeta)) \rightarrow \Xi(U(\xi))$  est bijective (Proposition 3.15).

**Proposition 3.29.** *Soit  $X_0 \hookrightarrow X$  un plongement toroïdal. Il existe une application continue et une seule  $H_X : [0, 1] \times X^{\rhd} \rightarrow X^{\rhd}$  qui satisfasse à la condition suivante : quels que soient l'ouvert  $U \subset X$  et le morphisme étale  $\delta : V \rightarrow U$  tel que l'immersion ouverte  $\delta^{-1}(X_0) \hookrightarrow V$  soit un plongement toroïdal simple,  $H_X$  stabilise  $U^{\rhd}$  et le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
 [0, 1] \times V^{\rhd} & \xrightarrow{H_V} & V^{\rhd} \\
 \text{id} \times \delta \downarrow & & \downarrow \delta \\
 [0, 1] \times U^{\rhd} & \xrightarrow{H_X} & U^{\rhd},
 \end{array}$$

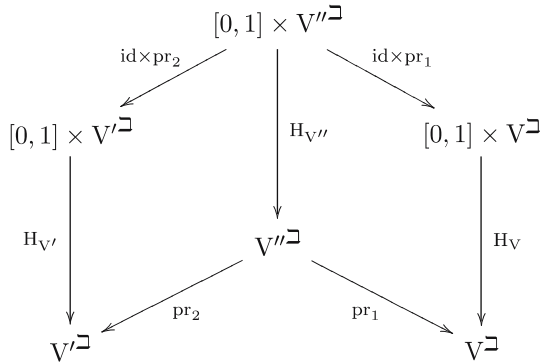
dans lequel  $H_V$  est l'application construite au Théorème 3.26, est commutatif.

**Démonstration.** L'unicité d'une telle application est évidente puisque, par hypothèse,  $X$  est recouvert par des ouverts  $U$  qui sont le but de morphismes étales et surjectifs  $\delta : V \rightarrow U$  tels que les immersions ouvertes  $\delta^{-1}(X_0) \hookrightarrow V$  soient des plongements toroïdaux simples.

Considérons un ouvert  $U$  de  $X$  et deux morphismes étales et surjectifs  $\delta : V \rightarrow U, \delta' : V' \rightarrow U$  tels que les immersions ouvertes  $\delta^{-1}(X_0) \hookrightarrow V$  et  $\delta'^{-1}(X_0) \hookrightarrow V'$  soient des plongements toroïdaux simples.

Posons  $V'' = V \times_U V'$  et  $V''_0 = \text{pr}_1^{-1}(V_0) = \text{pr}_2^{-1}(V'_0)$ . L'immersion ouverte  $V''_0 \hookrightarrow V''$  est un plongement toroïdal simple et, en vertu du lemme précédent, le

diagramme



est commutatif.

Étant donnés deux points  $y \in V \sqsupseteq$  et  $y' \in V' \sqsupseteq$  tels que  $\delta(y) = \delta'(y')$ , il existe un point  $z \in V'' \sqsupseteq$  tel que  $\text{pr}_1(z) = y$ ,  $\text{pr}_2(z) = y'$  et l'on a alors

$$\begin{aligned}
 (\delta \circ H_V)(t, y) &= (\delta \circ \text{pr}_1 \circ H_{V''})(t, z) \\
 &= (\delta' \circ \text{pr}_2 \circ H_{V''})(t, z) \\
 &= (\delta' \circ H_{V'})(t, y').
 \end{aligned}$$

En prenant  $V' = V$ , nous en déduisons tout d'abord que l'application  $\delta \circ H_V$  se factorise à travers la flèche  $\text{id} \times \delta : [0, 1] \times V \sqsupseteq \rightarrow [0, 1] \times U \sqsupseteq$ , l'application obtenue  $H_\delta : [0, 1] \times U \sqsupseteq \rightarrow U \sqsupseteq$  étant automatiquement continue puisque tous les espaces topologiques en jeu sont compacts. Nous obtenons ensuite que les applications  $H_\delta$  et  $H_{\delta'}$  coïncident, ce qui achève la démonstration.

**Corollaire 3.30.** (1) L'application  $\mathbf{p}_X = H_X(1, \cdot) : X \sqsupseteq \rightarrow X \sqsupseteq$  est une rétraction de  $X \sqsupseteq$  sur un sous-espace fermé  $\mathfrak{S}(X)$  de  $X \sqsupseteq$ . On pose  $\mathfrak{S}_0(X) = \mathfrak{S}(X) \cap \rho^{-1}(X_0)$ .

- (2) L'application  $H_X$  est une homotopie reliant  $H_X(0, \cdot) = \text{id}_{X \sqsupseteq}$  à  $\mathbf{p}_X$  tout en fixant chaque point de  $\mathfrak{S}(X)$ .
- (3) Soit  $\mathfrak{X}$  le complété formel de  $X$  le long du fermé  $X - X_0$ . L'application  $H_X$  stabilise l'ouvert  $\mathfrak{X}_\eta$  de  $X \sqsupseteq$  et l'application induite

$$H_{\mathfrak{X}} : [0, 1] \times \mathfrak{X}_\eta \rightarrow \mathfrak{X}_\eta$$

contracte  $\mathfrak{X}_\eta$  sur

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{S}(X) \cap \mathfrak{X}_\eta = \mathfrak{S}_0(X) - r^{-1}(X^{(0)}),$$

où  $X^{(0)}$  désigne l'ensemble des points génériques de  $X$ .

**Démonstration.** Ce corollaire est une conséquence immédiate de la Proposition 3.29 et des assertions analogues pour les plongements toroïdaux simples (Théorème 3.26 et Corollaire 3.27).

(3.3.2) Il nous reste à décrire le sous-espace fermé  $\mathfrak{S}(X)$  de  $X \sqsupseteq$ .

**Proposition 3.31.** *Soit  $U \subset X$  un ouvert et soit  $\delta : V \rightarrow U$  un morphisme étale et surjectif tel que  $\delta^{-1}(X_0) \hookrightarrow V$  soit un plongement toroïdal simple. Posons  $V' = V \times_U V$  et  $V'_0 = V_0 \times_U V = V \times_U V_0$ . L'immersion ouverte  $V'_0 \hookrightarrow V'$  est un plongement toroïdal simple, chacune des projections canoniques  $\text{pr}_1, \text{pr}_2 : V' \rightarrow V_0$  envoie  $\mathfrak{S}(V')$  sur  $\mathfrak{S}(V)$  et le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}(V') & \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{pr}_1} \\ \xrightarrow{\text{pr}_2} \end{array} & \mathfrak{S}(V) \xrightarrow{\delta} \mathfrak{S}(U) \end{array}$$

est exact dans la catégorie des espaces topologiques.

**Démonstration.** Les deux projections canoniques  $\text{pr}_1, \text{pr}_2 : V' \rightarrow V$  sont étales et il découle du Lemme 3.28 que l'immersion ouverte  $V'_0 \hookrightarrow V'$  est un plongement toroïdal simple ; en outre,  $\mathfrak{S}(V') = \text{pr}_1^{-1}(\mathfrak{S}(V)) = \text{pr}_2^{-1}(\mathfrak{S}(V))$ .

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}(V') & \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{pr}_1} \\ \xrightarrow{\text{pr}_2} \end{array} & \mathfrak{S}(V) \xrightarrow{\delta} \mathfrak{S}(U) \end{array}$$

est exact dans la catégorie des ensembles :

- l'application  $\delta$  est surjective puisque, par définition,  $\mathfrak{S}(U) = \delta(\mathfrak{S}(V))$  ;
- étant donné deux points  $x_1, x_2 \in \mathfrak{S}(V)$  tels que  $\delta(x_1) = \delta(x_2)$ , il existe un point  $x \in V' \rightarrow V_0$  tel que  $\text{pr}_1(x) = x_1, \text{pr}_2(x) = x_2$  et un tel point appartient nécessairement à  $\mathfrak{S}(V') = \text{pr}_1^{-1}(\mathfrak{S}(V))$ .

L'exactitude du diagramme précédent dans la catégorie des espaces topologiques découle immédiatement de la continuité de l'application  $\delta : V \rightarrow U$  et la compacité des espaces topologiques  $\mathfrak{S}(V)$  et  $\mathfrak{S}(U)$ .

**Corollaire 3.32.** *Soit  $U \subset X$  un ouvert et soit  $\delta : V \rightarrow U$  un morphisme étale et surjectif tel que  $\delta^{-1}(X_0) \hookrightarrow V$  soit un plongement toroïdal simple.*

- (1) *Quels que soient les points  $\xi \in \mathfrak{S}(U)$  et  $\zeta \in \mathfrak{S}(V)$  tels que  $\delta(\zeta) = \xi$ , l'application  $\delta : \mathfrak{S}(V) \rightarrow \mathfrak{S}(U)$  réalise un homéomorphisme de  $\mathfrak{S}(V) \cap r^{-1}(\xi)$  sur  $\mathfrak{S}(U) \cap r^{-1}(\xi)$ .*
- (2) *L'espace topologique  $\mathfrak{S}(U)$  s'obtient à partir de  $\mathfrak{S}(V)$  en identifiant les cônes compactifiés  $\mathfrak{S}(V(\zeta'))$  et  $\mathfrak{S}(V(\zeta''))$  tels que  $\delta(\zeta') = \delta(\zeta'')$ . Plus précisément : quels que soient les points  $\zeta', \zeta'' \in \mathfrak{S}(V)$  tels que  $\delta(\zeta') = \delta(\zeta'')$ , il existe un point  $\zeta \in \mathfrak{S}(V)$  tel que  $\text{pr}_1(\zeta) = \zeta', \text{pr}_2(\zeta) = \zeta''$  et l'on identifie les cônes compactifiés  $\mathfrak{S}(V(\zeta'))$  et  $\mathfrak{S}(V(\zeta''))$  via les homéomorphismes*

$$\mathfrak{S}(V(\zeta')) \xleftarrow[\sim]{\text{pr}_1} \mathfrak{S}(V(\zeta)) \xrightarrow[\sim]{\text{pr}_2} \mathfrak{S}(V(\zeta'')).$$

Cette identification ne dépend pas du choix du point  $\zeta$ .

**Démonstration.** (1) Quitte à restreindre  $U$  et  $V$ , il est loisible de supposer que  $\zeta$  est l'unique point dans  $\Xi(V)$  tel que  $\delta(\zeta) = \xi$ , auquel cas la surjectivité de l'application  $\delta : \mathfrak{S}(V) \cap r^{-1}(\zeta) \rightarrow \mathfrak{S}(U) \cap r^{-1}(\xi)$  est évidente. Pour établir qu'il s'agit d'un homéomorphisme, il suffit de prouver que cette application est injective.

Considérons deux points  $y, y'$  dans  $\mathfrak{S}(V) \cap r^{-1}(\zeta)$  tels que  $\delta(y) = \delta(y')$ . Il existe, en vertu de la proposition précédente, un point  $z$  dans  $\mathfrak{S}(V')$  tel que  $\text{pr}_1(z) = y$  et  $\text{pr}_2(z) = y'$ . Le point  $\zeta' = r(z)$  de  $\Xi(V')$  est tel que  $\text{pr}_1(\zeta') = \text{pr}_2(\zeta') = \zeta$ . D'après le Lemme 3.28, les projections canoniques  $\text{pr}_1, \text{pr}_2 : V' \rightarrow V$  induisent toutes deux des homéomorphismes de  $\mathfrak{S}(V'(\zeta'))$  sur  $\mathfrak{S}(V(\zeta))$ , donc de  $\mathfrak{S}(V') \cap r^{-1}(\zeta')$  sur  $\mathfrak{S}(V) \cap r^{-1}(\zeta)$ , et il suffit pour conclure de savoir que les deux applications  $\text{pr}_1, \text{pr}_2 : \mathfrak{S}(V'(\zeta')) \rightarrow \mathfrak{S}(V(\zeta))$  coïncident; c'est ce qu'affirme la première assertion du Lemme 3.33 ci-dessous.

(2) Étant donnés deux points  $\zeta', \zeta''$  dans  $\Xi(V)$  tels que  $\delta(\zeta') = \delta(\zeta'')$ , l'existence d'un point  $\zeta$  dans  $\Xi(V')$  vérifiant  $\text{pr}_1(\zeta) = \zeta'$  et  $\text{pr}_2(\zeta) = \zeta''$  est triviale.

Supposons que  $\zeta$  et  $\eta$  soient deux points dans  $\Xi(V')$  tels que  $\text{pr}_1(\zeta) = \text{pr}_1(\eta) = \zeta'$  et  $\text{pr}_2(\zeta) = \text{pr}_2(\eta) = \zeta''$ . Soit  $V'' = V \times_U V \times_U V$  et soient  $\text{pr}_{12}, \text{pr}_{13}$  et  $\text{pr}_{23}$  (resp.  $\text{pr}_1, \text{pr}_2$  et  $\text{pr}_3$ ) les trois projections canoniques de  $V''$  sur  $V'$  (resp. sur  $V$ ). Le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 V'' & \xrightarrow{\text{pr}_{12}} & V' \\
 \text{pr}_{13} \downarrow & & \downarrow \text{pr}_1 \\
 V' & \xrightarrow{\text{pr}_1} & V
 \end{array}$$

étant manifestement cartésien, il existe un point  $\pi$  dans  $\Xi(V'')$  tel que  $\text{pr}_{12}(\pi) = \zeta$  et  $\text{pr}_{13}(\pi) = \eta$ ; on a en outre  $\text{pr}_2 \text{pr}_{12}(\pi) = \text{pr}_2(\zeta) = \text{pr}_2(\eta) = \text{pr}_2 \text{pr}_{13}(\pi)$ , soit encore  $\text{pr}_2(\pi) = \text{pr}_3(\pi)$ . En vertu de la seconde assertion du Lemme 3.33 ci-dessous, cette dernière observation implique l'identité des homéomorphismes de  $\mathfrak{S}(V''(\pi))$  sur  $\mathfrak{S}(V(\zeta''))$  induits par  $\text{pr}_2 \text{pr}_{12}$  et  $\text{pr}_2 \text{pr}_{13}$ . Les homéomorphismes  $\text{pr}_1 \text{pr}_{12}$  et  $\text{pr}_1 \text{pr}_{13}$  de  $\mathfrak{S}(V''(\pi))$  sur  $\mathfrak{S}(V(\zeta'))$  étant égaux par constructions, le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathfrak{S}(V(\zeta')) & & \\
 & \text{pr}_1 \nearrow & & \nwarrow \text{pr}_1 & \\
 \mathfrak{S}(V'(\zeta)) & & \mathfrak{S}(V''(\pi)) & & \mathfrak{S}(V'(\eta)) \\
 & \text{pr}_{12} \longleftarrow & & \longrightarrow \text{pr}_{13} & \\
 & \text{pr}_2 \searrow & & \swarrow \text{pr}_2 & \\
 & & \mathfrak{S}(V(\zeta'')) & & 
 \end{array}$$

est commutatif et il en découle que les deux homéomorphismes de  $\mathfrak{S}(V(\zeta'))$  sur  $\mathfrak{S}(V(\zeta''))$  associés aux points  $\zeta$  et  $\eta$  de  $V'$  coïncident.



**Lemme 3.33.** *Soit  $U \subset X$  un ouvert et soit  $\delta : V \rightarrow U$  un morphisme étale tel que l'immersion ouverte  $v^{-1}(X_0) \hookrightarrow V$  soit un plongement toroïdal simple. On pose  $V' = V \times_U V$  et  $V'' = V \times_U V \times_U V$ .*

- (1) *Quel que soit le point  $\zeta \in \Xi(V')$  tel que  $\text{pr}_1(\zeta) = \text{pr}_2(\zeta) = \xi$ ,  $\text{pr}_1$  et  $\text{pr}_2$  induisent la même application de  $\mathfrak{S}(V'(\zeta))$  dans  $\mathfrak{S}(V(\xi))$ .*
- (2) *Quels que soient le point  $\zeta \in \Xi(V'')$  et  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  tels que  $\text{pr}_i(\zeta) = \text{pr}_j(\zeta) = \xi$ ,  $\text{pr}_i$  et  $\text{pr}_j$  induisent la même application de  $\mathfrak{S}(V''(\zeta))$  dans  $\mathfrak{S}(V(\xi))$ .*

**Démonstration.** (1) Chacune des applications  $\text{pr}_1, \text{pr}_2 : \mathfrak{S}_0(V'(\zeta)) \rightarrow \mathfrak{S}_0(V(\xi))$  est un homéomorphisme (Lemme 3.28) et un morphisme de cônes rationnels (Proposition 3.15). L'assertion à démontrer étant triviale si ces cônes sont de dimension nulle, nous supposons dans ce qui suit qu'ils sont de dimension supérieure à 1. Sous cette hypothèse, les deux applications considérées coïncident si et seulement si tel est le cas de leurs restrictions à chaque face unidimensionnelle de  $\mathfrak{S}_0(V'(\zeta))$ ; c'est ce que nous allons vérifier.

Observons tout d'abord que  $\text{pr}_1$  et  $\text{pr}_2$  envoient chacune des faces de  $\mathfrak{S}_0(V'(\zeta))$  sur la même face de  $\mathfrak{S}_0(V(\xi))$ , ou, de manière équivalente, que  $\text{pr}_1$  et  $\text{pr}_2$  induisent la même application de  $\Xi(V'(\zeta))$  dans  $\Xi(V(\xi))$  (Proposition 3.15). Soit en effet  $\eta$  une généralisation de  $\xi$  dans  $\Xi(V(\xi))$ . Comme  $\text{pr}_1(\zeta) = \text{pr}_2(\zeta) = \xi$ ,  $\zeta$  appartient au fermé  $\overline{\{\eta\}} \times_U \overline{\{\eta\}}$  de  $V'$ . Il existe alors une généralisation  $\pi$  de  $\zeta$  dans  $F$  telle que  $\text{pr}_1(\pi) = \eta$  et, le morphisme  $\text{pr}_2$  étant quasi fini,  $\text{pr}_2(\pi) = \eta$ . On établit ainsi que les applications  $\text{pr}_1, \text{pr}_2 : \Xi(V'(\zeta)) \rightarrow \Xi(V(\xi))$  coïncident sur un sous-ensemble  $\Sigma$  de  $\Xi(V'(\zeta))$  tel que  $\text{pr}_1(\Sigma) = \Xi(V(\xi))$  et la conclusion découle de la bijectivité de ces applications (Lemme 3.28).

Achevons maintenant la démonstration. Soit  $\eta'$  un point dans  $\Xi(V'(\zeta))$  correspondant à une face unidimensionnelle de  $\mathfrak{S}_0(V'(\zeta))$  et soit  $\eta$  son image dans  $\Xi(V(\xi))$ . Les anneaux locaux  $\mathcal{O}_{V', \eta'}$  et  $\mathcal{O}_{V, \eta}$  sont des anneaux de valuation discrète et les faces de  $\mathfrak{S}_0(V'(\zeta))$  et  $\mathfrak{S}_0(V(\xi))$  associées à  $\eta'$  et  $\eta$  sont les images respectives des applications  $i_{\eta'} : t \mapsto t^{-\text{ord}_{\eta'}(\cdot)}$  et  $i_\eta : t \mapsto t^{-\text{ord}_\eta(\cdot)}$  de  $]0, 1[$  dans  $\mathcal{M}(\mathcal{O}_{V', \eta'})$  et  $\mathcal{M}(\mathcal{O}_{V, \eta})$ . Les morphismes  $\text{pr}_1$  et  $\text{pr}_2$  étant étales,

$$i_\eta = \text{pr}_1 \circ i_{\eta'} = \text{pr}_2 \circ i_{\eta'}$$

et cette identité prouve que  $\text{pr}_1$  et  $\text{pr}_2$  ont la même restriction à chaque face unidimensionnelle de  $\mathfrak{S}_0(V'(\zeta))$ .

(2) La seconde assertion se démontre exactement comme la première.

#### 4. Application aux diviseurs à croisements normaux

Dans ce dernier chapitre, les résultats obtenus jusqu'ici sur les espaces de Berkovich associés aux plongements toroïdaux sont appliqués à la détermination explicite du type d'homotopie de la fibre générique  $\mathfrak{X}_\eta$  du complété formel  $\mathfrak{X}$  d'un  $k$ -schéma localement algébrique  $X$  le long d'un diviseur à croisements normaux. La formulation toroïdale de cette dernière situation nécessite de supposer que le corps  $k$  soit *parfait*.

#### 4.1. Le complexe d'incidence d'un diviseur à croisements normaux

(4.1.1) On désigne par  $\underline{\Delta}$  la catégorie dont les objets sont les ensembles  $[n] = \{0, \dots, n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , et dont les flèches  $[n] \rightarrow [m]$  sont les applications croissantes. Par définition, un *ensemble simplicial* est un foncteur de la catégorie  $\underline{\Delta}^{\text{op}}$  dans celle des ensembles et un morphisme (ou une application simpliciale) entre ensembles simpliciaux est un morphisme de foncteurs. Si  $\Delta$  est un ensemble simplicial et  $n$  est un entier naturel, les éléments de l'ensemble  $\Delta([n])$  sont les  $n$ -*simplexes* de  $\Delta$ .

Étant donné un ensemble ordonné  $I$ , on désigne par  $\Delta_I$  l'ensemble simplicial tel que  $\Delta_I([n])$  soit, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'ensemble des applications *croissantes* de  $[n]$  dans  $I$ .

(4.1.2) Un *diviseur*  $D$  sur un schéma  $X$  est, par convention, un diviseur de Cartier et l'on désigne par  $\text{Supp}(D)$  son support.

**Définition 4.1.** Un diviseur  $D$  sur un schéma localement noethérien  $X$  est dit à *croisements normaux simples* s'il existe en tout point  $x$  de  $\text{Supp}(D)$  un système régulier de paramètres  $(z_1, \dots, z_d)$  dans l'anneau local  $\mathcal{O}_{X,x}$  et des entiers naturels  $N_1, \dots, N_d$  tels que :  $D_x = \text{div}(z_1^{N_1} \dots z_d^{N_d})$ .

**Définition 4.2.** Un diviseur  $D$  sur un schéma localement noethérien  $X$  est dit à *croisements normaux* s'il existe en tout point  $x$  de  $\text{Supp}(D)$  un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  et un morphisme étale surjectif  $\delta : V \rightarrow U$  tel que le diviseur  $\delta^*D$  soit à croisements normaux simples.

*Remarque 4.3.* Dans la définition précédente, le schéma  $X$  est *régulier* en tout point du support  $\text{Supp}(D)$  de  $D$ ; si ce schéma est excellent, il existe donc un voisinage ouvert  $U$  de  $\text{Supp}(D)$  qui est régulier.

(4.1.3) Nous définissons maintenant le complexe d'incidence d'un diviseur à croisements normaux, en commençant par le cas simple.

**Définition et Proposition 4.4.** Soient  $X$  un schéma localement noethérien excellent et  $D$  un diviseur à croisements normaux simples sur  $X$ .

(1) La suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de sous-ensembles de  $X$  définie par

$$X_0 = X - \text{Supp}(D) \quad \text{et, pour tout } n \geq 0, \quad X_{n+1} = \text{Rég}(\overline{X_n} - X_n)$$

est une stratification de  $X$  en sous-espaces localement fermés. Quel que soit le point  $x$  de  $\text{Supp}(D)$ , on note  $\Psi(D; x)$  l'ensemble des points génériques de  $\text{Supp}(D)$  qui sont des généralisations de  $x$ .

Ayant muni l'ensemble  $X_1^{(0)}$  des points génériques de  $\text{Supp}(D)$  d'un ordre total, on désigne par  $\Delta(D; x)$  l'ensemble simplicial  $\Delta_{\Psi(D; x)}$ .

(2) Quels que soient les points  $x, y \in X$ , on note  $\ll x \rightarrow y \gg$  la relation de spécialisation  $y \in \overline{\{x\}}$  et l'on voit ainsi  $X$  comme une petite catégorie dont  $\text{Supp}(D)$  est une sous-catégorie pleine. Si  $x \rightarrow y$ , l'inclusion évidente  $\Psi(D; x) \subset \Psi(D; y)$  donne lieu à une application simpliciale  $\Delta(D; x) \rightarrow \Delta(D; y)$ ; on dispose donc d'un foncteur  $\Delta(D; \cdot)$  de  $\text{Supp}(D)$  dans la catégorie des ensembles

*simpliciaux. Par définition, le complexe d'incidence du diviseur à croisements normaux simples D est l'ensemble simplicial*

$$\Delta(D) = \varinjlim_{\text{Supp}(D)} \Delta(D; \cdot).$$

*À isomorphisme canonique près, cet ensemble simplicial est indépendant du choix d'un ordre total sur  $X_1^{(0)}$ .*

- (3) *Pour tout entier naturel q, les q-simplexes non dégénérés de  $\Delta(D)$  correspondent biunivoquement aux points génériques de  $X_{q+1}$ .*
- (4) *Quel que soit le morphisme étale et surjectif  $\delta : X' \rightarrow X$ ,  $D' = \delta^{-1}(D)$  est un diviseur à croisements normaux simples sur  $X'$ ,  $\delta^{-1}(X_n) = X'_n$  pour tout entier naturel n et  $\delta$  induit un morphisme d'ensembles simpliciaux  $[\delta] : \Delta(D') \rightarrow \Delta(D)$  satisfaisant à la propriété suivante : pour tous points  $x' \in \text{Supp}(D')$  et  $x \in \text{Supp}(D)$  tels que  $\delta(x') = x$ ,  $[\delta]$  induit un isomorphisme du sous-ensemble  $\Delta(D', x')$  de  $\Delta(D')$  sur le sous-ensemble simplicial  $\Delta(D; x)$  de  $\Delta(D)$ .*

**Démonstration.** (1) Pour tout  $n \geq 0$ , le sous-schéma fermé réduit  $\overline{X}_n$  de X est excellent et  $X_n$  est l'ouvert dense de ses points réguliers. L'hypothèse que D soit à croisements normaux implique en outre immédiatement que

$$\overline{X}_{n+1} = \overline{X}_n - X_n = \overline{X}_n - \text{Rég}(\overline{X}_n)$$

soit purement de codimension un dans  $\overline{X}_n$ .

- (2) Si  $\prec$  et  $\prec'$  sont deux ordres totaux sur  $X_1^{(0)}$ , il existe pour tout point  $x \in \text{Supp}(D)$  une permutation  $u_x$  et une seule de l'ensemble fini  $\Psi(D; x)$  transformant  $\prec$  en  $\prec'$ . Ces permutations sont trivialement compatibles avec la relation de spécialisation ; elles se recollent donc en une permutation  $u$  de  $X_1^{(0)}$  définissant un isomorphisme de l'ensemble ordonné  $(X_1^{(0)}, \prec)$  sur l'ensemble ordonné  $(X_1^{(0)}, \prec')$ .
- (3) Quel que soit l'entier naturel q, l'ensemble des q-simplexes non dégénérés de  $\Delta(D)$  est la réunion des q-simplexes non dégénérés des ensembles simpliciaux  $\Delta(D; x)$  vus comme sous-ensembles simpliciaux de  $\Delta(D)$ .

Étant donné un point  $x$  dans  $\text{Supp}(D)$ , un système régulier de paramètres  $(z_1, \dots, z_d)$  dans  $\mathcal{O}_{X,x}$  et des entiers naturels  $N_1, \dots, N_d$  tels que  $D_x = \text{div}(z_1^{N_1} \dots z_d^{N_d})$ , désignons par I le sous-ensemble non vide de  $\{1, \dots, d\}$  constitué des indices  $i$  tels que  $N_i \geq 1$ . Pour toute partie non vide  $I'$  de I, le fermé  $Z_{I'} = V(z_i \ i \in I')$  de  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\xi})$  est irréductible (car régulier), de codimension  $\text{Card}(I')$  dans X, et on vérifie par récurrence sur l'entier naturel n que l'application

$$C \rightarrow \overline{C} \cap \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$$

réalise une bijection de l'ensemble des composantes connexes de  $X_n$  auxquelles le point  $x$  est adhérent sur l'ensemble des fermés  $Z_{I'}$ , où  $I'$  est une partie de I de cardinal n. D'autre part,  $\Psi(D; x)$  est, par définition, l'ensemble des points génériques des fermés  $Z_{\{i\}}$ ,  $i \in I$ , et les q-simplexes non dégénérés

de l'ensemble simplicial  $\Delta(D; x) = \Delta_{\Psi(D;x)}$  sont canoniquement en bijection avec les parties à  $q + 1$  éléments de l'ensemble  $\Psi(D; x)$ . On voit donc que, pour tout entier naturel  $q$ , les  $q$ -simplexes non dégénérés de  $\Delta(D; x)$  correspondent biunivoquement aux points génériques de  $X_{q+1}$  dont  $x$  est une spécialisation.

- (4) Le diviseur  $D'$  est à croisements normaux simples sur  $X'$  car, quel que soit le point  $x'$  de  $X'$  d'image  $x$  dans  $X$  et quel que soit le système régulier de paramètres  $(z_1, \dots, z_d)$  dans  $\mathcal{O}_{X,x}$  tel que  $D_x = \text{div}(z_1^{N_1} \dots z_d^{N_d})$ ,  $(z'_1, \dots, z'_d) = (\delta^\# z_1, \dots, \delta^\# z_d)$  est un système régulier de paramètres dans  $\mathcal{O}_{X',x'}$  et  $D'_{x'} = \text{div}(z'^{N_1}_1 \dots z'^{N_d}_d)$ . Les identités  $X'_n = \delta^{-1}(X_n)$  découlent immédiatement du fait que le morphisme  $\delta$  est étale et de l'égalité  $X'_0 = X_0$ . Enfin, quels que soient les points  $x' \in \text{Supp}(D')$  et  $x \in \text{Supp}(D)$  tels que  $\delta(x') = x$ , le morphisme  $\delta$  induit naturellement une application *bijective*  $\Psi(D'; x') \rightarrow \Psi(D, x)$ , donc un isomorphisme d'ensembles simpliciaux  $[\delta]_{x'} : \Delta(D'; x') \rightarrow \Delta(D; x)$ . Les isomorphismes  $[\delta]_{x'}$  sont trivialement compatibles aux spécialisations et donnent donc naissance à un morphisme  $[\delta] : \Delta(D') \rightarrow \Delta(D)$  satisfaisant à la condition annoncée.

*Remarque 4.5.* Considérons la stratification

$$\text{Supp}(D) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{>0}} X_n$$

et désignons par  $\Xi(D)$  l'ensemble des points génériques des strates. Étant donné un point  $x$  dans  $X_n, n \geq 1$ , il existe un unique point  $y$  dans  $\Xi(D)$  tel que  $x \in \overline{\{y\}}$ ; l'inclusion  $\Psi(D; y) \subset \Psi(D; x)$  est alors une égalité et l'application canonique  $\Delta(D; y) \rightarrow \Delta(D; x)$  est donc un isomorphisme. Cette observation permet de remplacer  $\text{Supp}(D)$  par  $\Xi(D)$  dans la définition de  $\Delta(D)$  :

$$\Delta(D) = \varinjlim_{\Psi(D)} \Delta(D; \cdot)$$

(4.1.4) Passons maintenant au cas d'un diviseur à croisements normaux quelconque.

**Définition et Proposition 4.6.** Soient  $X$  un schéma localement noethérien excellent et  $D$  un diviseur à croisements normaux sur  $X$ .

- (1) La suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de sous-ensembles de  $X$  définie par

$$X_0 = X - \text{Supp}(D) \text{ et, pour tout } n \geq 0, X_{n+1} = \text{Rég}(\overline{X_n} - X_n)$$

est une stratification de  $X$  en sous-espaces localement fermés.

Soit  $\delta : X' \rightarrow X$  un morphisme étale surjectif tel que  $D' = \delta^{-1}(D)$  soit un diviseur à croisements normaux simples et soit  $D''$  l'image réciproque de  $D$  sur  $X'' = X' \times_X X'$ .

- (2) Le diviseur  $D''$  est à croisements normaux simples et, quel que soit le point  $x''$  de  $X''$  tel que  $\text{pr}_1(x'') = \text{pr}_2(x'')$ , les applications  $[\text{pr}_1], [\text{pr}_2] : \Delta(D'') \rightarrow \Delta(D')$  coïncident sur le sous-ensemble simplicial  $\Delta(D''; x'')$  de  $\Delta(D'')$ .

(3) *L'égalisateur du diagramme*

$$\Delta(D'') \begin{array}{c} \xrightarrow{[\text{pr}_1]} \\ \xrightarrow{[\text{pr}_2]} \end{array} \Delta(D')$$

*est un ensemble simplicial ne dépendant pas, à un morphisme canonique près, du choix du morphisme  $\delta$ . C'est par définition le complexe d'intersection du diviseur à croisements normaux  $D$ , noté  $\Delta(D)$ .*

- (4) *Pour tout entier naturel  $q$ , les  $q$ -simplexes non dégénérés de  $\Delta(D)$  correspondent biunivoquement aux points génériques de  $X_{q+1}$ .*

**Démonstration.** (1) Cette assertion est évidente.

- (2) Le diviseur  $D''$  est à croisements normaux simples car c'est l'image réciproque du diviseur à croisements normaux simples  $D'$  par le morphisme étale  $\text{pr}_1$ .

Soit  $x''$  un point de  $X''$  tel que  $\text{pr}_1(x'') = \text{pr}_2(x'') = x'$ . Étant donné un système régulier de paramètres  $(z_1, \dots, z_d)$  dans  $\mathcal{O}_{X',x'}$  tel que  $D_{x'} = \text{div}(z_1^{N_1} \dots z_d^{N_d})$ ,  $N_1, \dots, N_d \in \mathbb{N}$ ,  $\Psi(D'; x')$  est canoniquement isomorphe à l'ensemble simplicial  $\Delta_I$ ,  $I$  désignant l'ensemble des indices  $i \in \{1, \dots, d\}$  tels que  $N_i > 0$ . Les  $d$ -uplets  $(z_{11}, \dots, z_{1d}) = (\text{pr}_1^\# z_1, \dots, \text{pr}_1^\# z_d)$  et  $(z_{21}, \dots, z_{2d}) = (\text{pr}_2^\# z_1, \dots, \text{pr}_2^\# z_d)$  sont des systèmes réguliers de paramètres dans l'anneau local  $\mathcal{O}_{X'',x''}$  et  $D''_{x''} = \text{div}(z_{11}^{N_1} \dots z_{1d}^{N_d}) = \text{div}(z_{21}^{N_1} \dots z_{2d}^{N_d})$ . L'ensemble simplicial  $\Psi(D''; x'')$  est canoniquement isomorphe à  $\Delta_I$  et les applications de  $\Psi(D''; x'')$  dans  $\Psi(D'; x')$  induites par  $\text{pr}_1$  et  $\text{pr}_2$  correspondent toutes deux à l'application identique de  $I$ ; elles coïncident donc.

- (3) Soient  $\delta_1 : X'_1 \rightarrow X$  et  $\delta_2 : X'_2 \rightarrow X$  deux morphismes étales surjectifs,  $D'_1 = \delta_1^{-1}(D)$  et  $D'_2 = \delta_2^{-1}(D)$ . Posons  $X'_3 = X'_1 \times_X X'_2$  et désignons par  $\pi_1 : X'_3 \rightarrow X'_1$  et  $\pi_2 : X'_3 \rightarrow X'_2$  les deux projections canoniques, qui sont surjectives. Le diviseur  $D'_3 = \pi_1^{-1}(D'_1) = \pi_2^{-1}(D'_2)$  sur  $X'_3$  est à croisements normaux simples.

Le diagramme suivant ( $i = 1, 2$ )

$$\begin{array}{ccccc} \Delta(D'_3) & \begin{array}{c} \xrightarrow{[\text{pr}_1]} \\ \xrightarrow{[\text{pr}_2]} \end{array} & \Delta(D'_3) & \xrightarrow{q_3} & \Delta_3 \\ [\pi_i] \downarrow & & [\pi_i] \downarrow & & \\ \Delta(D'_i) & \begin{array}{c} \xrightarrow{[\text{pr}_2]} \\ \xrightarrow{[\text{pr}_1]} \end{array} & \Delta(D'_i) & \xrightarrow{q_i} & \Delta_i, \end{array}$$

dans lequel les lignes sont exactes, est commutatif et il existe donc une flèche  $\alpha : \Delta_3 \rightarrow \Delta_i$  le complétant. Nous allons construire une flèche dans l'autre sens en nous appuyant sur la dernière assertion de la Proposition 4.4.

Étant donné un point  $x$  de  $X'_i$  et deux points  $y, y'$  de  $X'_3$  tels que  $\pi_i(y) = \pi_i(y') = x$ , considérons un point  $z'$  dans  $X''_3$  tel que  $\text{pr}_1(z') = y, \text{pr}_2(z') = y'$  et soit  $z$  son image dans  $X''_i$ . L'application  $[\pi_i]$  induit des isomorphismes  $\varphi_y$  et  $\varphi_{y'}$  des sous-ensemble simpliciaux  $\Delta(D'_3; y)$  et  $\Delta(D'_3; y')$  de  $\Delta(D'_3)$  sur  $\Delta(D'_i; x)$ . En vertu du point 2, les restrictions des applications  $[\text{pr}_1]$  et  $[\text{pr}_2]$  à  $\Delta(D''_i; z)$  induisent le même isomorphisme sur  $\Delta(D'_i; x)$ ; via la commutativité du diagramme précédent, on en conclut à l'égalité des applications  $q_3 \circ \varphi_y^{-1}$  et  $q_3 \circ \varphi_{y'}^{-1}$  de  $\Delta(D'_i; x)$  dans  $\Delta_3$ . On vérifie ensuite que l'application obtenue ne dépend pas du choix du point  $z'$  dans  $X''_3$  en introduisant le schéma  $X'_3 \times_X X'_3 \times_X X'_3$  et en invoquant de nouveau le point 2). Ceci implique en particulier la compatibilité des différents morphismes  $\Delta(D'_i; x) \rightarrow \Delta_3, x \in X'_i$ , ainsi définis, lesquels se recollent donc en un morphisme  $\beta : \Delta(D'_i) \rightarrow \Delta_3$ . Il découle de nouveau du point 2) que les deux flèches  $\beta \circ [\text{pr}_1], \beta \circ [\text{pr}_2] : \Delta(D''_i) \rightarrow \Delta_3$  coïncident, de sorte que  $\beta$  se factorise à travers  $q$  et induit par suite un morphisme  $\beta : \Delta_i \rightarrow \Delta_3$ . Il s'agit trivialement de l'isomorphisme réciproque de  $\alpha$ .

- (4) Quel que soit l'entier naturel  $q$ , l'ensemble des  $q$ -simplexes non dégénérés de  $\Delta(D'')$  (resp. de  $\Delta(D')$ ) est naturellement en bijection avec l'ensemble  $X''^{(0)}_{q+1}$  (resp.  $X'^{(0)}_{q+1}$ ) des points génériques de la strate  $X''_{q+1}$  (resp.  $X'_{q+1}$ ) de  $X''$  (resp. de  $X'$ ). Vu la définition de l'ensemble simplicial  $\Delta(D)$ , il en découle que l'ensemble de ses  $q$ -simplexes non dégénérés est en bijection avec l'ensemble  $X^{(0)}_{q+1}$  des points génériques de la strate  $X_{q+1}$  de  $X$  car le diagramme naturel

$$\begin{array}{ccccc}
 X''^{(0)}_{q+1} & \xrightarrow{\text{pr}_1} & X'^{(0)}_{q+1} & \longrightarrow & X^{(0)}_{q+1} \\
 & \xrightarrow{\text{pr}_2} & & & \\
 \end{array}$$

est exact.

#### 4.2. Généralisation d'un théorème de D. Stepanov

(4.2.1) Nous démontrons finalement les deux théorèmes énoncés dans l'introduction.

**Proposition 4.7.** *Soient  $X$  un schéma localement algébrique sur un corps parfait  $k$ ,  $D$  un diviseur à croisements normaux sur  $X$  et  $\mathfrak{X}$  le complété formel de  $X$  le long du fermé  $\text{Supp}(D)$ . En se restreignant au besoin à un voisinage de  $\text{Supp}(D)$ , on peut supposer que le schéma  $X$  est régulier; l'immersion ouverte  $X - \text{Supp}(D) \hookrightarrow X$  est alors un plongement toroïdal et le polyèdre conique époinché  $\mathfrak{S}_0(X)^* = \mathfrak{S}(X) \cap \mathfrak{X}_\eta$ , construit au cours de la Sect. 3.3 du chapitre précédent, est canoniquement homéomorphe à l'espace topologique  $|\Delta(D)| \times ]0, +\infty[$ .*

**Démonstration.** Le schéma  $X$  étant excellent et régulier en chaque point du support de  $D$ , il existe un voisinage ouvert régulier de  $\text{Supp}(D)$  dans  $X$ . Cela permet de supposer que  $X$  est un schéma régulier.

Soit  $\delta : X' \rightarrow X$  un morphisme étale et surjectif tel que  $D' = \delta^{-1}(D)$  soit un diviseur à croisements normaux simples.

Étant donné un point fermé  $x$  dans  $X'$  et un système régulier de paramètres  $(z_1, \dots, z_d)$  dans  $\mathcal{O}_{X',x}$  tel que  $D'_x = \text{div}(z_1^{N_1} \dots z_d^{N_d})$ ,  $N_1, \dots, N_d \in \mathbb{N}$ , il existe un voisinage ouvert connexe  $U$  de  $x$  dans  $X'$  tel que  $z_1, \dots, z_d \in \mathcal{O}_{X'}(U)$  et  $D|_U = \text{div}(z_1^{N_1} \dots z_d^{N_d})$ . Désignons par  $I$  l'ensemble des indices  $i \in \{1, \dots, n\}$  tels que  $N_i > 0$  et par  $J$  son complémentaire. Le morphisme  $\gamma : U \rightarrow \mathbb{A}_k^d = \text{Spec}(k[T_1, \dots, T_d])$  défini par

$$\gamma^*T_i = \begin{cases} z_i & \text{si } i \in I \\ z_i + 1 & \text{si } i \in J \end{cases}$$

( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) est étale au point  $x$  ([9], Chap. IV, Corollaire 17.15.4). Quitte à restreindre  $U$ , on peut supposer que  $\gamma$  est étale en tout point et que les sections  $z_i + 1$ ,  $i \in J$ , sont inversibles sur  $U$ . Sous ces conditions, l'ouvert  $U \cap (X' - \text{Supp}(D'))$  est l'image réciproque par  $\gamma$  de l'ouvert  $\{T_1 \neq 0, \dots, T_n \neq 0\} \subset \mathbb{A}_k^d$ , lequel est l'orbite ouverte de l'espace affine  $\mathbb{A}_k^d$  vu comme variété torique via l'action canonique de  $\mathbb{G}m_k^d$ .

Si maintenant  $y$  est un point quelconque dans  $X'$ , considérons un point fermé  $x$  dans la strate contenant  $y$  et sur lequel ce dernier se spécialise. Tout ouvert  $U$  de  $X'$  contenant  $x$  et tout morphisme étale  $\gamma : U \rightarrow \mathbb{A}_k^d$  défini comme ci-dessus constituent une carte étale sur  $X'$  au voisinage de  $y$ . L'immersion  $X' - \text{Supp}(D') \hookrightarrow X'$  est donc un plongement toroïdal simple et la décomposition

$$X' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X'_n$$

de la Définition 4.4, dans laquelle  $X'_0 = X' - \text{Supp}(D')$ , est la stratification canonique de  $X'$ . Cela établit que l'immersion ouverte  $X' - \text{Supp}(D') \hookrightarrow X'$  est un plongement toroïdal simple et que la stratification précédente est la stratification canonique de  $X'$ . L'immersion ouverte  $X - \text{Supp}(D) \hookrightarrow X$  est par conséquent un plongement toroïdal.

Soit de nouveau  $x$  un point fermé de  $X'_q$ ,  $q \geq 1$ . Utilisant les notations introduites au début de cette démonstration, l'ensemble  $I$  est de cardinal  $q + 1$  et la trace sur  $U$  de la strate contenant  $x$  est le sous-espace localement fermé  $\{z_i = 0, i \in I; z_j \neq 0, j \in J\}$ , de sorte que  $\gamma(x)$  est un point fermé du sous-espace fermé  $\{T_i = 0, i \in I\}$  de l'ouvert invariant  $\{T_j \neq 0, j \in J\} \subset \mathbb{A}_k^d$ . En vertu de la Proposition 3.7, l'application

$$h = (-\log |z_1|, \dots, -\log |z_d|) : \rho_{X'}^{-1}(X'_0) \cap U^{\square} \rightarrow \mathbb{R}^d$$

réalise un isomorphisme du cône  $\mathfrak{S}_0(U)$  sur le cône simplicial

$$\{(t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d \mid t_j = 0, j \in J \text{ et } t_i \geq 0, i \in I\}$$

ne dépendant pas du choix des paramètres  $z_i$ . L'application  $h^{-1}$  induit donc un homéomorphisme du  $q$ -simplexe standard

$$|\Delta(D; x)| = \left\{ (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^d \mid \sum_{1 \leq i \leq d} t_i = 1, t_j = 0, j \in J \right\}$$

sur le sous-espace fermé

$$\mathfrak{S}_0(U) \cap \{|D^{\text{réd}}| = 1\}$$

du cône  $\mathfrak{S}_0(U) \subset \mathfrak{S}_0(X')$ .

Il découle directement de la définition du polyèdre conique  $\mathfrak{S}_0(X')$  que les différentes applications  $i_x : |\Delta(D'; x)| \rightarrow \mathfrak{S}_0(X') \cap \{|D^{\text{réd}}| = 1\}$  se recollent en un homéomorphisme canonique  $i$  de la réalisation géométrique  $|\Delta(D')|$  du complexe d'incidence de  $D'$  sur le sous-espace fermé  $\mathfrak{S}_0(X') \cap \{|D^{\text{réd}}| = 1\}$  du polyèdre conique épointé  $\mathfrak{S}_0(X')^*$ , et ceci de telle sorte que l'application  $j' : |\Delta(D')| \rightarrow \mathfrak{S}_0(X')^*/\mathbb{R}_{>0}$ , composée de  $i$  par la projection canonique, soit un homéomorphisme. Nous obtenons ainsi un homéomorphisme canonique  $(j'^{-1}, |D^{\text{réd}}|)$  de  $\mathfrak{S}_0(X')^* = \mathfrak{S}(X') \cap \mathfrak{X}'_\eta$  sur  $|\Delta(D')| \times ]0, +\infty[$ .

Enfin, le foncteur de réalisation géométrique commutant aux limites inductives, l'homéomorphisme canonique  $j' : |\Delta(D')| \rightarrow \mathfrak{S}_0(X')/\mathbb{R}_{>0}$  descend en un homéomorphisme  $j : |\Delta(D)| \rightarrow \mathfrak{S}_0(X)/\mathbb{R}_{>0}$  en vertu des Propositions 3.29 et 4.6, et l'application  $(j^{-1}, |D^{\text{réd}}|)$  est un homéomorphisme de  $\mathfrak{S}_0(X)^* = \mathfrak{S}(X) \cap \mathfrak{X}_\eta$  sur  $|\Delta(D)| \times ]0, +\infty[$ .

Avec les hypothèses et les notations de la proposition précédente, on note  $\mathfrak{S}(X)$  la trace de  $\mathfrak{X}_\eta \subset X^\square$  sur le sous-espace fermé  $\mathfrak{S}(X)$  de  $X^\square$ . L'endomorphisme  $\mathbf{p}_X$  de  $X^\square$  stabilise le sous-espace ouvert  $\mathfrak{X}_\eta$  et induit donc un endomorphisme de ce dernier, noté  $\mathbf{p}_X$ , qui réalise une rétraction de  $\mathfrak{X}_\eta$  sur  $\mathfrak{S}(X)$ . Tant  $\mathfrak{S}(X)$  que  $\mathbf{p}_X$  ne dépendent que du schéma formel  $X$ , et non du choix d'un voisinage régulier  $\text{Supp}(D)$  dans  $X$ .

**Théorème 4.8.** *Soit  $X$  un schéma localement algébrique sur un corps parfait  $k$  et soit  $Y$  un sous-schéma fermé de  $X$ . Étant donnés deux morphismes  $f_1 : X_1 \rightarrow X$ ,  $f_2 : X_2 \rightarrow X$  tels que les conditions suivantes soient vérifiées pour tout  $i \in \{1, 2\}$  :*

- *le morphisme  $f_i$  est propre et il réalise un isomorphisme de  $X_i - f_i^{-1}(Y)$  sur  $X - Y$ ;*
- *le sous-schéma fermé  $f_i^{-1}(Y)$  de  $X_i$  est un diviseur à croisements normaux;*

*les espaces topologiques  $|\Delta(f_1^{-1}(Y))|$  et  $|\Delta(f_2^{-1}(Y))|$  sont homotopes.*

**Démonstration.** Désignons respectivement par  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{X}_1$  et  $\mathfrak{X}_2$  les complétés formels de  $X$ ,  $X_1$  et  $X_2$  le long de  $Y$ ,  $f_1^{-1}(Y)$  et  $f_2^{-1}(Y)$ . Les morphismes  $\widehat{f}_1 : \mathfrak{X}_1 \rightarrow \mathfrak{X}$  et  $\widehat{f}_2 : \mathfrak{X}_2 \rightarrow \mathfrak{X}$  induisent des isomorphismes sur les fibres génériques (Proposition 1.11) ; d'après le Théorème 3.26 et la Proposition 4.7, les applications continues

$$\mathbf{p}_{\mathfrak{X}_2} \circ \widehat{f}_{2,\eta}^{-1} \circ \widehat{f}_{1,\eta} : \mathfrak{S}(\mathfrak{X}_1) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathfrak{X}_2)$$

et

$$\mathbf{p}_{\mathfrak{X}_1} \circ \widehat{f}_{1,\eta}^{-1} \circ \widehat{f}_{2,\eta} : \mathfrak{S}(\mathfrak{X}_2) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathfrak{X}_1)$$

sont alors des équivalences d'homotopie réciproques et, vu la proposition précédente, les espaces topologiques  $|\Delta(f_1^{-1}(Y))|$  et  $|\Delta(f_2^{-1}(Y))|$  sont canoniquement homotopes.



**Corollaire 4.9.** *Soit  $X$  un schéma localement algébrique sur un corps  $k$  de caractéristique nulle et soit  $Y$  un sous-schéma fermé de  $X$  tel que l'ouvert  $X - Y$  soit dense et régulier. Désignant par  $\mathfrak{X}$  le complété formel de  $X$  le long de  $Y$ , l'espace topologique sous-jacent à la fibre générique  $\mathfrak{X}_\eta$  de  $\mathfrak{X}$  a le type d'homotopie d'un CW-complexe.*

**Démonstration.** Appliquant les deux théorèmes principaux établis par Hironaka dans [10], il existe un Idéal sur  $X$  de support contenu dans  $Y$  et dont l'éclatement  $f : X' \rightarrow X$  est tel que  $f^{-1}(Y)$  soit un diviseur à croisements normaux simples. Le morphisme  $f$  étant propre et induisant un isomorphisme de  $X' - f^{-1}(Y)$  sur  $X - Y$ , il donne lieu à un isomorphisme de  $\mathfrak{X}'_\eta$  sur  $\mathfrak{X}_\eta$ ; la conclusion en découle puisque l'espace topologique sous-jacent à  $\mathfrak{X}'_\eta$  a le type d'homotopie d'un CW-complexe.

(4.2.2) De même que le Théorème 4.8 peut se déduire du théorème de factorisation faible des applications birationnelles lorsque ce dernier est établi (c'est-à-dire si le corps  $k$  est de caractéristique nulle, [13]), il découle de ce même théorème que, pour tout schéma localement algébrique et lisse  $X$  sur un corps de caractéristique nulle, le type d'homotopie du CW-complexe associé à une compactification lisse  $X \hookrightarrow \bar{X}$  dont le bord est un diviseur à croisements normaux est indépendant de la compactification considérée. On déduit aisément des résultats du chapitre 3 une généralisation de cette assertion.

**Théorème 4.10.** *Soit  $X$  un schéma localement algébrique et régulier sur un corps parfait. Étant données deux compactifications régulières  $X \hookrightarrow X_1$  et  $X \hookrightarrow X_2$  de  $X$  dont les bords  $D_1$  et  $D_2$  sont des diviseurs à croisements normaux, les CW-complexes  $|\Delta(D_1)|$  et  $|\Delta(D_2)|$  sont canoniquement homotopes.*

**Démonstration.** Le CW-complexe  $|\Delta(D_i)|$  a le même type d'homotopie que l'espace topologique sous-jacent à l'espace  $k$ -analytique  $\mathfrak{X}_{i,\eta}$ , fibre générique du  $k$ -schéma formel  $\mathfrak{X}_i = (X_i)_{D_i}^\wedge$  (Corollaire 3.30).

Par définition,  $\mathfrak{X}_{i,\eta}$  est l'espace  $k$ -analytique induit par  $X_i^\square$  sur l'ouvert  $r_i^{-1}(D_i) - D_i^\square$ ,  $r_i$  désignant l'application de réduction de  $X_i^\square$  sur  $\mathfrak{X}$ . Le théorème découle ainsi des observations suivantes :  $X_i^\square - D_i^\square$  est l'ouvert  $X^{\text{an}}$  de  $X_i^{\text{an}} = X_i^\square$  — cette égalité découle de la propriété de  $X_i$  en vertu de la Proposition 1.10 — et  $X_i^\square - r_i^{-1}(D_i) = r_i^{-1}(X) = X^\square$ , de sorte que

$$\begin{aligned} r_i^{-1}(D_i) - D_i^\square &= (X_i^\square - X^\square) \cap X^{\text{an}} \\ &= X^{\text{an}} - X^\square. \end{aligned}$$

## Références

- [1] Berkovich, V.G.: Spectral Theory and Analytic Geometry over non-Archimedean fields, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, RI (1990)
- [2] Berkovich, V.G.: Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces. Publ. Math. l'IHES **78**, 5–161 (1993)
- [3] Berkovich, V.G.: Vanishing cycles for formal schemes. Invent. Math. **115**, 539–571 (1994)

- [4] Berkovich, V.G.: Vanishing cycles for formal schemes II. *Invent. Math.* **125**, 367–390 (1996)
- [5] Berkovich, V.G.: Smooth  $p$ -adic analytic spaces are locally contractible. *Invent. Math.* **125**, 1–84 (1999)
- [6] Berthelot, P.: Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres. Première partie (version provisoire 1991), Prépublication 96-03 de l'université de Rennes 1, disponible sur la Toile à l'adresse <http://perso.univ-rennes1.fr/pierre.berthelot/> (1996)
- [7] Bosch, S., Güntzer, U., Remmert, R.: *Non-Archimedean Analysis A Systematic Approach to Rigid Analytic Geometry Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, vol. 261. Springer, Newyork (1984)
- [8] Ducros, A.: Parties semi-algébriques d'une variété algébrique  $p$ -adique. *Manuscr. Math.* **111**, 513–528 (2003)
- [9] Grothendieck, A.: *Éléments de Géométrie algébrique*, Chap. I–IV, rédigés avec la collaboration de J. Dieudonné, Publications mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques (1960–1967)
- [10] Hironaka, H.: Resolution of singularities of algebraic varieties over a field of characteristic zero. *Ann. Math.* **63**, 109–326 (1964)
- [11] Kempf, G., Knudsen, F., Mumford, D., Saint-Donat, B.: *Toroidal Embeddings I*, Springer LNM 339 (1973)
- [12] Lütkebohmert, W.: Formal-algebraic and rigid-analytic geometry. *Math. Ann.* **286**, 341–371 (1990)
- [13] Stepanov, D.: A remark on the dual complex of a resolution of singularities, *Uspekhi Mat. Nauk.* 61: 185–186; traduction anglaise dans *Russian Math. Surveys* **6**, 181–183 (2006)
- [14] Temkin, M.: A new proof of the Gerrizen-Grauert theorem. *Math. Ann.* **333**, 261–269 (2005)