Licence 3-ième année **6 juin 2008**
2007–2008

Examen d'ATN

Durée 3 heures

LES DOCUMENTS NE SONT PAS AUTORISÉS

Problème 1 Étant donnés un groupe fini H et un groupe cyclique G montrer qu'il existe un homomorphisme surjectif $\phi : G \to H$ si et seulement si H est cyclique et si son ordre divise l'ordre du groupe G.

Problème 2 Trouver tous les diviseurs de zéro dans les anneaux suivants :

1. Dans l'anneau produit $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;
2. Dans l'anneau des toutes fonctions réelles sur le segment $[0, 1]$. (On définit l'addition et la multiplication dans cet anneau de la maniére suivante : si f et g sont deux fonctions réelles sur $[0, 1]$ alors $(f + g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + g(x)$ et $(f \cdot g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)g(x)$.)

Problème 3 1. Quels sont les éléments irréductibles de l'anneau $\mathbb{Z}[x]$?

2. Est-ce que l'idéal de $\mathbb{Z}[x]$ engendré par 2 et x est principal ?
3. Soit $f = x^n + a_1x^{n+1} + \cdots + a_n \in \mathbb{Z}[x]$. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{Q}$ est une racine de f alors $\alpha \in \mathbb{Z}$.
4. Les polynômes suivants sont-ils irréductibles dans $\mathbb{Q}[x]$:
   (a) $g = 5x^3 + 48x - 3$,
   (b) $h = x^3 - 11x^2 + 38x - 40$?
   Justifiez vos réponses.
5. Soit $I = \{f \in \mathbb{Q}[x, y] : f(0, 0) = 0\}$.
   (a) Montrer que I est un idéal maximal dans $\mathbb{Q}[x, y]$. (Indication : On peut considérer l'application $\mathbb{Q}[x, y] \to \mathbb{Q}, f(x, y) \mapsto f(0, 0)$.)
   (b) Montrer que l'idéal I n'est pas principal.
   (c) L'anneau $\mathbb{Q}[x, y]$ est-il
      (i) euclidien ?
      (ii) factoriel ?
      Justifiez vos réponses.

Problème 4 Soit

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

des permutations dans le groupe symétrique S_8.

1. Décomposer les permutations a et b en produits des cycles de supports disjoints.
2. Calculer ab, ba, a^2 et b^2.
3. On désigne par H le sous-groupe engendré par a et b. Montrer que l'application

$$\phi :< a > \times < b > \to H, (s,t) \mapsto s \cdot t,$$

est un morphisme surjectif de groupes. (Comme d'habitude $< x >$ désigne le sous-groupe engendré par x.)
4. Déterminer le noyau de ϕ.
5. En déduire l'ordre de H.

Problème 5 Soit p un nombre premier. On pose $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et on rappelle que, pour tout $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel V, $\mathrm{GL}(V)$ désigne le groupe des automorphismes $\mathbb{F}_p$-linéaires de V. La matrice d'un automorphisme $g \in \mathrm{GL}(V)$ dans une base b de V est notée $\mathrm{Mat}_b(g)$.

On considère dans tout cet exercice un groupe fini G d'ordre p^k, $k \in \mathbb{N}$.

1. Supposons que G opère sur un ensemble fini X dont le cardinal n'est pas divisible par p. Démontrer qu'il existe un élément $x \in X$ tel que $gx = x$ pour tout $g \in G$.
2. On suppose maintenant qu'il existe un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel V de dimension finie n tel que G soit un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$. On se propose de démontrer qu'il existe une base de V dans laquelle la matrice de chaque élément de G est triangulaire supérieure avec tous les coefficients diagonaux égaux à 1

   (a) Justifier que G opère sur $V \setminus \{0\}$ puis, en utilisant la question précédente, démontrer qu'il existe un vecteur non nul $v \in V$ tel que $gv = v$ pour tout $g \in G$.

   (b) Considérons une base $b = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de V avec $v_1 = v$. Soit V' le sous-espace vectoriel engendré par $v_2, \dots, v_n$. Alors $b' = \{v_2, \dots, v_n\}$ est une base de V'.

   Démontrer qu'il existe un homomorphisme de groupes $\rho : G \to \mathrm{GL}(V')$ tel que, pour tout élément g de G,

$$\mathrm{Mat}_b(g) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathrm{Mat}_{b'}(\rho(g)) & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

   (c) En raisonnant par récurrence sur la dimension n de V, démontrer qu'il existe une base de V dans laquelle la matrice de chaque élément de G est triangulaire supérieure avec tous les coefficients diagonaux égaux à 1.