Exercice — Soit p un nombre premier. On pose $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Cet exercice est consacré à l'étude des polynômes irréductibles dans $\mathbb{F}_p[\mathrm{X}]$.

I. Soit f un polynôme irréductible dans $\mathbb{F}_p[\mathrm{X}]$ et soit $d = \deg(f) \geq 1$ son degré.

1) Démontrer que l'anneau $\mathbb{F}_p[\mathrm{X}]/(f)$ est un corps ayant p^d éléments.

2) Démontrer que f divise le polynôme $\mathrm{X}^{p^d} - \mathrm{X}$ dans $\mathbb{F}_p[\mathrm{X}]$.

II. Fixons réciproquement un nombre entier $d \geq 1$ et considéront un polynôme irréductible $g \in \mathbb{F}_p[\mathrm{X}]$ divisant $\mathrm{X}^{p^d} - \mathrm{X}$. On pose $n = \deg(g)$ et $\mathrm{K} = \mathbb{F}_p[\mathrm{X}]/(g)$.

1) Démontrer que l'application $\mathrm{F} : \mathrm{K} \to \mathrm{K},\ \ a \mapsto a^p$ est un automorphisme du corps K.

2) Démontrer que l'on a $\mathrm{F}^d(a) = a$ pour tout $a \in \mathrm{K}$.

3) En déduire que l'on a $n \leq d$.

III. 1) Au vu des questions I, 2) et II, 3), comment peut-on déterminer tous les polynômes irréductibles de degré $d \geq 1$ fixé dans $\mathbb{F}_p[\mathrm{X}]$?

2) Déterminer tous les polynômes irréductibles de degré $d \leq 2$ dans $\mathbb{F}_3[\mathrm{X}]$.

3) Déduire de ce qui précède que le polynôme $\mathrm{X}^5 + 3\mathrm{X}^4 + 6\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$.