Le foncteur des points d'un schéma
Application à la construction des grassmanniennes

Amaury Thuillier

1. Le foncteur des points d'un schéma

(1.1) Pour les notions de base sur les catégories et les foncteurs, voir [**1**].

On rappelle que, si C est une catégorie, C^{op} désigne la catégorie *opposée*, obtenue à partir de C en inversant le sens des flèches. En d'autres termes : C^{op} a les mêmes objets que C et, pour tous objets X, Y de C, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}^{\mathrm{op}}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ des flèches de X vers Y dans C^{op} est l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$ des flèches de Y vers X dans C.

Étant donnée une catégorie **C**, tout objet X de C détermine un foncteur h_{X} de la catégorie C^{op} dans la catégorie des ensembles défini de la manière suivante :
- pour tout objet S de C, $\mathrm{h}_{\mathrm{X}}(\mathrm{S})$ est l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(\mathrm{S}, \mathrm{X})$ de toutes les flèches de S vers X dans la catégorie C ;
- pour toute flèche $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ dans C, $\mathrm{h}_{\mathrm{X}}(f)$ est l'application de $\mathrm{h}_{\mathrm{X}}(\mathrm{S})$ dans $\mathrm{h}_{\mathrm{X}}(\mathrm{S}')$ définie par $u \mapsto u \circ f$.

La correspondance $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{h}_{\mathrm{X}}$ est un foncteur de la catégorie C dans la catégorie $\mathbf{Ens}^{\mathrm{C}^{\mathrm{op}}}$ des foncteurs $\mathrm{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ens}$: si $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est une flèche dans C, alors la collection des applications

$$\mathrm{h}_f(\mathrm{S}) : \mathrm{h}_{\mathrm{X}}(\mathrm{S}) \to \mathrm{h}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{S}), \quad u \mapsto f \circ u$$

est une transformation naturelle entre les foncteurs h_{X} et h_{Y}.

Le résultat suivant, bien qu'élémentaire, est fondamental car il garantit que l'on ne perd aucune information en remplaçant les objets X de C (resp. les flèches f de C) par les foncteurs h_{X} (resp. par les transformations naturelles h_f). Ceci permet en particulier de traiter les objets de C (resp. les flèches de C) comme des « familles structurées » d'*ensembles* (resp. d'applications entre ensembles) indexées par C.

Théorème 1 (*Lemme de Yoneda*) — *Soit* $\mathrm{F} : \mathrm{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ens}$ *un foncteur. Pour tout objet* X *de* C*, l'application*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}^{\mathrm{C}^{\mathrm{op}}}}(\mathrm{h}_{\mathrm{X}}, \mathrm{F}) \to \mathrm{F}(\mathrm{X}), \quad \varphi \mapsto \varphi(\mathrm{X})(\mathrm{id}_{\mathrm{X}})$$

est une bijection.

En particulier, pour tous objets X, Y *de* C*, l'application*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}^{\mathrm{C}^{\mathrm{op}}}}(\mathrm{h}_{\mathrm{X}}, \mathrm{h}_{\mathrm{Y}}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}), \quad \varphi \mapsto \varphi(\mathrm{X})(\mathrm{id}_{\mathrm{X}})$$

est une bijection.

Démonstration. Omise, voir [**1**]. □

Remarque 2. Bien entendu, on peut tout aussi bien associer à un objet X de C (resp. à une flèche $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ dans C) le foncteur $h^{\mathrm{X}} : \mathrm{C} \to \mathbf{Ens}$, $\mathrm{S} \mapsto \mathrm{h}^{\mathrm{X}}(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\mathrm{X}, \mathrm{S})$ (resp. la transformation naturelle $h^f : \mathrm{h}^{\mathrm{Y}} \to \mathrm{h}^{\mathrm{X}}$ telle que, pour tout objet S de C, $h^f(\mathrm{S}) : \mathrm{h}^{\mathrm{Y}}(\mathrm{S}) \to \mathrm{h}^{\mathrm{X}}(\mathrm{S})$ soit l'application $u \mapsto u \circ f$. Formulé pour un foncteur $\mathrm{F} : \mathrm{C} \to \mathbf{Ens}$, le lemme de Yoneda est également valable puisque cela revient à partir de la catégorie C^{op} en lieu et place de la catégorie C.

(1.2) On désigne par **Sch** la catégorie des schémas. Rappelons qu'un schéma est par définition un espace localement annelé admettant un recouvrement ouvert par des espaces localement annelés de la forme $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ (A = anneau (commutatif)) et un morphisme de schémas est un morphisme d'espaces localement annelés.

Définition 3 — *Étant donné un schéma* X*, le* foncteur des points *de* X *n'est autre que le foncteur*

$$\mathrm{h}_{\mathrm{X}} : \mathbf{Sch}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ens}.$$

On écrit souvent $\mathrm{X}(\S)$ *en lieu et place de* $\mathrm{h}_{\mathrm{X}}(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\mathrm{S}, \mathrm{X})$ *et on parle de l'ensemble des* S-points *de* X *ou encore des* points de X à valeurs dans S.

Cette terminologie est justifiée par l'observation suivante : supposons que X soit le spectre d'une $\mathbb{Z}$-algèbre $\mathrm{A} = \mathbb{Z}[(\mathrm{T}_i)_{i \in \mathrm{I}}]/((\mathrm{F}_j)_{j \in \mathrm{J}})$ (ici, I et J sont des ensembles quelconques). Pour tout anneau B, l'ensemble $\mathrm{h}_{\mathrm{X}}(\mathrm{Spec}(\mathrm{B})) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\mathrm{Spec}(\mathrm{B}), \mathrm{Spec}(\mathrm{A}))$ s'identifie canoniquement à l'ensemble des homomorphismes d'anneaux de A dans B via l'application qui associe à un morphisme $f : \mathrm{Spec}(\mathrm{B}) \to \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ l'homomrphisme induit $f^\natural : \mathrm{A} = \Gamma(\mathrm{Spec}(\mathrm{A}), \mathscr{O}_\mathrm{A}) \to \Gamma(\mathrm{Spec}(\mathrm{B}), \mathscr{O}_\mathrm{B}) = \mathrm{B}$ entre les anneaux de sections globales des faisceaux structuraux. Puisqu'un homomorphisme d'anneaux $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est la même chose qu'une famille $(b_i)_{i\in\mathrm{I}}$ d'éléments de B telle que $\mathrm{F}_j((b_i)_{i\in\mathrm{I}}) = 0$ pour tout $j \in \mathrm{J}$, $\mathrm{h}_\mathrm{X}(\mathrm{Spec}(\mathrm{B}))$ s'identifie donc canoniquement à l'ensemble des *solutions* dans l'anneau B du systèmes d'équations polynômiales $(\mathrm{F}_j((\mathrm{T}_i)_{i\in\mathrm{I}}))_{j\in\mathrm{J}}$. En outre, tout homomorphisme d'anneaux $\varphi : \mathrm{B} \to \mathrm{C}$ définit un morphisme de schémas ${}^a\varphi : \mathrm{Spec}(\mathrm{C}) \to \mathrm{Spec}(\mathrm{B})$ et on vérifie immédiatement que l'application $\mathrm{h}_\mathrm{X}({}^a\varphi) : \mathrm{h}_\mathrm{X}(\mathrm{Spec}(\mathrm{B})) \to \mathrm{h}_\mathrm{X}(\mathrm{Spec}(\mathrm{C}))$ envoie une solution $(b_i)_{i\in\mathrm{I}}$ dans B sur la solution $(\varphi(b_i))_{i\in\mathrm{I}}$ du système dans C.

Moralité (avec un grain de sel) : passer d'un schéma X *au foncteur* h_X *revient essentiellement à voir* X *comme un système d'équations polynômiales implicite que l'on étudie à travers ses solutions dans tous les anneaux possibles.*

(1.3) On ne perd rien si l'on restreint le foncteur des points d'un schéma à la sous-catégorie pleine de **Sch** constituée des schémas *affines*. On désigne par **Ann** la catégorie des anneaux (toujours commutatifs et unitaires).

Proposition 4 — *Soit* X *un schéma. Le foncteur* $\mathrm{h}_\mathrm{X} : \mathrm{Sch}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ens}$ *est parfaitement déterminé par le foncteur*

$$\mathbf{Ann} \to \mathbf{Ens}, \quad \mathrm{A} \mapsto \mathrm{h}_\mathrm{X}(\mathrm{Spec}(\mathrm{A})) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\mathrm{Spec}(\mathrm{A}), \mathrm{X}).$$

Démonstration. Par définition, un schéma S est un espace localement annelé recouvert par des ouverts U isomorphes à des schémas affines. La donnée d'un morphisme de schémas $\mathrm{S} \to \mathrm{X}$ est équivalente à la donnée, pour chaque ouvert affine U de S, d'un morphisme $f_\mathrm{U} : \mathrm{U} \to \mathrm{X}$, de telle sorte que, pour toute inclusion $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ entre ouvert affines de S, f_V et la restriction de f_U à V coïncident. Ainsi, si l'on désigne par $\mathscr{U}$ l'ensemble des ouverts affines de S,

$$\mathrm{h}_\mathrm{X}(\mathrm{S}) = \left\{ (f_\mathrm{U})_{\mathrm{U}\in\mathscr{U}} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{pour tous } \mathrm{U}, \mathrm{V} \in \mathscr{U} \text{ avec } \mathrm{V} \subset \mathrm{U}, \\ \text{l'application canonique } \mathrm{h}_\mathrm{X}(\mathrm{U}) \to \mathrm{h}_\mathrm{X}(\mathrm{V}) \text{ envoie } f_\mathrm{U} \text{ sur } f_\mathrm{V} \end{array} \right\}.$$

En outre, pour tout morphisme de schémas $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, il existe des recouvrements $\mathscr{U}$ et $\mathscr{U}$ de S' et S respectivement par des ouverts affines tels que, pour tout $\mathrm{U}' \in \mathscr{U}$, $f(\mathrm{U}')$ soit contenu dans l'un des ouverts U de $\mathscr{U}$. Ces deux observations montrent que le foncteur $\mathrm{h}_\mathrm{X} : \mathbf{Sch}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ens}$ est complètement déterminé par sa restriction à la sous-catégorie pleine des schémas affines. □

Si cela ne prête pas à confusion, nous continuerons de désigner par h_X le foncteur

$$\mathbf{Ann} \to \mathbf{Ens}, \quad \mathrm{A} \mapsto \mathrm{h}_\mathrm{X}(\mathrm{Spec}(\mathrm{A}))$$

et l'on écrit souvent $\mathrm{X}(\mathrm{A})$ en lieu et place de $h_\mathrm{X}(A) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\mathrm{Spec}(\mathrm{A}), \mathrm{X})$.

2. Produits dans la catégorie des schémas

On peut illustrer la pertinence du foncteur des points d'un schéma par la construction des *produits fibrés de schémas*.

(2.1) Soient $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ et $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ deux morphismes de schémas. Passant aux foncteurs des points, on obtient deux transformations naturelles $h_f : h_\mathrm{X} \to \mathrm{h}_\mathrm{Z}$, $h_g : h_\mathrm{Y} \to \mathrm{h}_\mathrm{Z}$ et on peut définir leur *produit* comme étant le foncteur

$$\mathrm{h}_\mathrm{X} \times_{\mathrm{h}_\mathrm{Z}} \mathrm{h}_\mathrm{Y} : \mathbf{Sch}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ens}$$

envoyant un schéma S (resp. un morphisme de schémas $u : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$) sur le produit fibré

$$\mathrm{h}_\mathrm{X}(\mathrm{S}) \times_{\mathrm{h}_\mathrm{Z}(\mathrm{S})} \times \mathrm{h}_\mathrm{Y}(\mathrm{S}) = \{(v, v') \in \mathrm{h}_\mathrm{X}(\mathrm{S}) \times \mathrm{h}_\mathrm{Y}(\mathrm{S}) \mid \mathrm{h}_f(v) = h_g(v') \text{ dans } \mathrm{h}_\mathrm{Z}(\mathrm{S})\}$$

(resp. sur l'application

$$\mathrm{h}_\mathrm{X}(\mathrm{S}) \times_{\mathrm{h}_\mathrm{Z}(\mathrm{S})} \times \mathrm{h}_\mathrm{Y}(\mathrm{S}) \to \mathrm{h}_\mathrm{X}(\mathrm{S}') \times_{\mathrm{h}_\mathrm{Z}(\mathrm{S}')} \times \mathrm{h}_\mathrm{Y}(\mathrm{S}'), \quad (v, v') \mapsto (\mathrm{h}_\mathrm{X}(v), \mathrm{h}_\mathrm{Y}(v')).)$$

Théorème 5. — *Il existe un schéma noté* $\mathrm{X} \times_\mathrm{Z} \mathrm{Y}$, *unique à un isomorphisme unique près, tel que*

$$\mathrm{h}_\mathrm{X} \times_{\mathrm{h}_\mathrm{Z}} \mathrm{h}_\mathrm{Y} = \mathrm{h}_{\mathrm{X}\times_\mathrm{Z}\mathrm{Y}}.$$

Démonstration. Omise, voir [**EGA**], Chapitre I, §3, Théorème (3.2.1).

L'unicité à isomorphisme unique près est une conséquence formelle du lemme de Yoneda (Théorème 1). Le point de départ de la démonstration de l'existence du schéma T est la proposition 7 ci-dessous, qui traite le cas des trois schémas affines. On considère ensuite le cas de trois schémas X, Y et Z avec Z affine, et on vérifie que, si $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ sont des recouvrements de X et de Y respectivement par des ouverts affines, alors les schémas affines $\mathrm{U} \times_\mathrm{Z} \mathrm{V}$ se recollent en un schéma $\mathrm{X} \times_\mathrm{Z} \mathrm{Y}$ ayant les propriétés souhaitées. Enfin, si Z est quelconque, on le recouvre par des schémas affines W et on vérifie que les schémas $f^{-1}(\mathrm{W}) \times_{\mathrm{W}} g^{-1}(\mathrm{W})$ se recollent en un schéma $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Z}} \mathrm{Y}$ ayant les propriétés souhaitées. □

Définition 6. — *Le schéma* $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Z}} \mathrm{Y}$ *du théorème précédent, bien défini à isomorphisme unique près, est le* produit fibré *des schémas* X.

Par définition, un morphisme d'un schéma S dans le produit fibré $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Z}} \mathrm{Y}$ est la donnée de deux morphismes $v : \mathrm{S} \to \mathrm{X}$, $v' : \mathrm{S} \to \mathrm{Y}$ tels que $f \circ v = g \circ v'$.

Proposition 7. — *Si* $\mathrm{X} = \mathrm{Spec(A)}$, $\mathrm{Y} = \mathrm{Spec(B)}$ *et* $\mathrm{Z} = \mathrm{Spec(C)}$ *sont des schémas affines, le schéma* $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Z}} \mathrm{Y}$ *est affine, d'anneau* $\mathrm{A} \otimes_{\mathrm{C}} \mathrm{B}$.

Démonstration. Le foncteur $\mathrm{h_X} \times_{\mathrm{h_Z}} \mathrm{h_Y} : \mathbf{Ann} \to \mathbf{Ens}$ envoie un anneau R sur l'ensemble

$$\begin{aligned}
\mathrm{h_X(R)} \times_{\mathrm{h_Z(R)}} \mathrm{h_Y(R)} &= \{(v,v') \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\mathrm{Spec(R)},\mathrm{Spec(A)}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\mathrm{Spec(R)},\mathrm{Spec(B)}) \mid f \circ v = g \circ v'\} \\
&= \{(\varphi,\varphi') \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(\mathrm{A},\mathrm{R}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(\mathrm{B},\mathrm{R}) \mid \varphi \circ f^\natural = \varphi' \circ g^\natural \text{ dans } \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(\mathrm{C},\mathrm{R})\} \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(\mathrm{A} \otimes_{\mathrm{C}} \mathrm{B},\mathrm{R}) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\mathrm{Spec(R)},\mathrm{Spec}(\mathrm{A} \otimes_{\mathrm{C}} \mathrm{B})) \\
&= \mathrm{h}_{\mathrm{Spec}(\mathrm{A}\otimes_{\mathrm{C}}\mathrm{B})}(\mathrm{R})
\end{aligned}$$

donc $\mathrm{h_X} \times_{\mathrm{h_Z}} \mathrm{h_Y} = \mathrm{h}_{\mathrm{Spec}(\mathrm{A}\otimes_{\mathrm{C}}\mathrm{B})}$. □

3. Espaces linéaires relatifs

(3.1) Soit A un anneau. Étant donnés des ensembles finis I, J et un nombre entier naturel r, une matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{M_{I,J}(A)}$ est dite *de rang* r s'il existe des matrices inversibles $\mathrm{P} \in \mathrm{GL_I(A)}$ et $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL_J(A)}$ tels que

$$\mathrm{M} = \mathrm{P} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix} \mathrm{Q}.$$

Remarquons que, pour tout homomorphisme d'anneaux $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$, l'homomorphisme induit de $\mathrm{M_{I,J}(A)}$ dans $\mathrm{M_{I,J}(B)}$ transforme une matrice de rang r en une matrice de rang r.

Remarque 8. Si $\mathrm{M} \in \mathrm{M_{I,J}(A)}$ est une matrice de rang r, alors le A-module quotient $\mathrm{A^J/ker(M)}$ est libre de rang r : une matrice $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL_J(A)}$ comme ci-dessus fournit en effet un isomorphisme entre $\mathrm{A^J/ker(M)}$ et A^r.

(3.2) Soit S un schéma et soient n, r deux nombres entiers naturels. On pose $\mathbb{A}^n_{\mathrm{S}} = \mathbb{A}^n \times \mathrm{S}$; c'est l'*espace affine relatif* de dimension n au-dessus de S.

Definition 9 — *Un* sous-espace linéaire de codimension r *de* $\mathbb{A}^n_S$ *est un sous-schéma fermé X de* $\mathbb{A}^n_S$ *satisfaisant à la condition suivante : il existe un recouvrement de S par des ouverts affines* $U = \mathrm{Spec}(A)$ *tels que l'idéal de* $\mathrm{A}[\xi_1,\ldots,\xi_n]$ *définissant le sous-schéma fermé* $X \cap \mathbb{A}^n \times U$ *de* $\mathbb{A}^n \times U = \mathrm{Spec}(A[\xi_1,\ldots,\xi_n])$ *soit engendré par une famille finie de formes linéaires* $\left(\sum_{1\le j\le n} a_{i,j}\xi_j\right)_{i\in I}$*, la matrice* $(a_{i,j}) \in M_{I,\{1,\ldots,n\}}(A)$ *étant de rang r.*

Remarque 10. Dans la définition précédente, il est toujours loisible d'imposer $\mathrm{I} = \{1,\ldots,r\}$. En effet, étant donnés un anneau A et une matrice $\mathrm{M} = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_{\mathrm{I},\{1,\ldots,n\}}(\mathrm{A})$ de rang r écrite sous la forme $\mathrm{M} = \mathrm{P} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix} \mathrm{Q}$ avec $\mathrm{P} \in \mathrm{GL_I(A)}$ et $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{A})$,

$$\left\{ \underline{x} \in \mathrm{C}^n \,\middle|\, \sum_{1\le j\le n} a_{i,j}x_j = 0 \ \text{ pour } \ i \in \mathrm{I} \right\} = \left\{ \underline{x} \in \mathrm{C}^n \,\middle|\, (\mathrm{Q}\underline{x})_i = 0 \ \text{ pour } \ 1 \le i \le r \right\}$$

pour toute A-algèbre C, de sorte que les familles de formes linéaires $\left(\sum_{1\le j\le n} a_{i,j}\xi_j\right)_{i\in\mathrm{I}}$ et $\left((\mathrm{Q}\underline{\xi})_i\right)_{1\le i\le r}$ définissent le même sous-schéma fermé de $\mathrm{Spec}(\mathrm{A}[\xi_1,\ldots,\xi_n])$.

Si S est un schéma et si $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathrm{S}$ est un sous-espace linéaire de codimension r de $\mathbb{A}^n \times \mathrm{S}$, la projection canonique $\mathbb{A}^n \times \mathrm{S} \to \mathrm{S}$ induit un morphisme de schémas $p : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$.

Lemme 11 — *Soit* $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *un morphisme de schémas. Si* $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathbb{A}^n \times \mathrm{S}$ *est un sous-espace linéaire de codimension r au-dessus de* S*, alors* $f^*\mathrm{X} = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}' \hookrightarrow \mathbb{A}^n \times \mathrm{S}'$ *est un sous-espace linéaire de codimension r au-dessus de* S'.

Démonstration. Considérons un recouvrement de S par des ouverts affines $\mathrm{U} = \mathrm{Spec(A)}$ de S tels que $\mathrm{X} \cap \mathbb{A}^n \times \mathrm{U} = p^{-1}(\mathrm{U})$ soit le sous-schéma fermé de $\mathrm{Spec}(\mathrm{A}[\xi_1,\ldots,\xi_n])$ défini par r formes linéaires indépendantes $\sum_{1\le j\le n} a_{ij}\xi_j$, $1 \le i \le r$. Pour tout ouvert affine $\mathrm{U}' = \mathrm{Spec(B)}$ de S' contenu dans $f^{-1}(\mathrm{U})$, le morphisme $f : \mathrm{Spec(B)} \to \mathrm{Spec(A)}$ provient d'un homomorphisme d'anneaux $f^\natural : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ et $f^*\mathrm{X} \cap (\mathbb{A}^n \times \mathrm{U}')$ est le sous-schéma fermé de $\mathrm{Spec}(\mathrm{B}[\xi_1, \ldots, \xi_n])$ défini par les formes linéaires $\sum_{1 \le j \le n} f^\natural(a_{i,j})\xi_j$, $1 \le i \le r$. Comme la matrice $(a_{i,j} \in \mathrm{M}_{r,n}(\mathrm{A})$ est de rang r, il en est de même de la matrice $(f^\natural(a_{i,j})) \in \mathrm{M}_{r,n}(\mathrm{B})$. Lorsque U parcourt un recouvement ouvert de S, les ouverts affines de S′ contenus dans $f^{-1}(\mathrm{U})$ recouvrent S′ et nous avons finalement démontré que le sous-schéma fermé $f^*\mathrm{X}$ de $\mathbb{A}^n \times \mathrm{S}'$ est bien un sous-espace linéaire de codimension r au-dessus de S′. □

(3.3) Essayons de motiver la notion d'espace linéaire relatif que l'on vient d'introduire.

1. Si k est un corps et si $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathbb{A}^n_k = \mathbb{A}^n \times \mathrm{Spec}(k)$ est un sous-espace linéaire de codimension r au-dessus de $\mathrm{Spec}(k)$, alors l'ensemble $\mathrm{X}(k)$ des k-points de X (cf. partie 1) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{A}^n(k) = k^n$ de codimension r. En effet, comme $\mathrm{Spec}(k)$ est réduit à un point, X est de la forme $\mathrm{V}(\sum_{1 \le j \le n} a_{ij}\xi_j\ ;\ 1 \le i \le r)$ avec $(a_{ij}) \in \mathrm{M}_{rn}(\mathrm{A})$ une matrice de rang r et

$$\mathrm{X}(k) = \left\{ \underline{x} \in k^n \;\middle|\; \sum_{1 \le j \le n} a_{ij}x_j = 0\ ;\ 1 \le i \le r \right\}$$

est le noyau de cette dernière. Réciproquement, si l'on part d'un sous-espace vectoriel F de k^n de codimension r, on définit un sous-espace linéaire X de $\mathbb{A}^n_k$ tel que $\mathrm{X}(k) = \mathrm{F}$ en posant $\mathrm{X} = \mathrm{V}(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$, où $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in k[\xi_1, \ldots, \xi_r]$ sont des formes linéaires engendrant l'annulateur de F.

La correspondance $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}(k)$ établit une bijection entre l'ensemble des sous-espaces linéaires de codimension r de $\mathbb{A}^n_k$ et l'ensemble des sous-espace vectoriels de codimension r de k^n. Passer d'un sous-espace vectoriel F de k^n au sous-espace linéaire X de $\mathbb{A}^n_k$ tel que $\mathrm{X}(k) = \mathrm{F}$ revient fondamentalement à remplacer F par son annulateur, qui fournit les *équations* définissant F.

2. Si k est un corps *algébriquement clos*, on peut renforcer ce qui précède : un sous-espace linéaire de codimension r de $\mathbb{A}^n_k$ n'est pas autre chose qu'un sous-schéma fermé réduit X de $\mathbb{A}^n_k$ dont l'ensemble $\mathrm{X}(k)$ des k-points est un sous-espace vectoriel de codimension r de $\mathbb{A}^n(k) = k^n$. Considérons en effet un sous-schéma fermé réduit X de $\mathbb{A}^n_k$ tel que $\mathrm{X}(k)$ soit un sous-espace vectoriel de codimension r de k^n et choisissons r formes linéaires $\varphi_1 = \sum_{1 \le j \le n} a_{1j}\xi_j,\ \ldots,\ \varphi_r = \sum_{1 \le j \le n} a_{rj}\xi_j$ engendrant l'annulateur de $\mathrm{X}(k)$. Comme X est réduit, il découle du *Nullstellensatz* de Hilbert que l'idéal $\mathfrak{I}$ de X est constitué des polynômes $\mathrm{F} \in k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ tels que $\mathrm{F}(\underline{x}) = 0$ pour tout $\underline{x} \in \mathrm{X}(k)$. Un changement de variables linéaire convenable permet de supposer $\varphi_1 = \xi_1, \ldots, \varphi_r = \xi_r$, auquel cas $\mathfrak{I}$ est l'idéal des polynômes $\mathrm{F} \in k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ tels que $\mathrm{F}(0, \ldots, 0, x_{r+1}, \ldots, x_n) = 0$ pour tous $x_{r+1}, \ldots, x_n \in k$; on a donc $\mathfrak{I} = (\xi_1, \ldots, \xi_r) = (\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ puisque le corps k est infini, et X est bien un sous-espace linéaire de codimension r de $\mathbb{A}^n_k$.

Notons qu'il ne suffit *pas* de supposer que le corps k soit infini pour que tout sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^n_k$ dont l'ensemble des k-points est un sous-espace vectoriel de k^n soit un sous-espace linéaire de $\mathbb{A}^n_k$. Par exemple, l'ensemble des points réels du sous-schéma fermé $\mathrm{X} = \mathrm{V}(\xi_1(\xi_2^2 + 1))$ de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ est le sous-espace vectoriel $\{0\} \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ mais X n'est pas un sous-espace linéaire de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ puisque $\mathbb{X}(\mathbb{C}) = \{0\} \times \mathbb{C} \cup \mathbb{C} \times \{\pm i\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^2$.

3. Quel que soit le corps k, on peut caractériser comme suit les sous-espaces linéaires parmi tous les sous-schémas fermés de $\mathbb{A}^n_k$.

Proposition 12 — *Soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Les conditions suivantes sont équivalentes pour tout sous-schéma fermé* X *de* $\mathbb{A}^n$ *:*

(i) X *est un sous-espace linéaire de codimension r ;*

(ii) X *est* géométriquement réduit*, i.e. le schéma* $\mathrm{X} \otimes_k \overline{k}$ *est réduit, et* $\mathrm{X}(\overline{k})$ *est un sous-espace vectoriel de codimension r de* $\mathbb{A}^n(\overline{k}) = \overline{k}^n$*.*

Démonstration. Vu la discussion du point 2, l'assertion (ii) équivaut à dire que $\mathrm{X} \otimes_k \overline{k}$ est un sous-espace linéaire de codimension r de $\mathbb{A}^n_{\overline{k}}$ et l'implication (i) ⇒ (ii) découle immédiatement du lemme 11.

Soit $\mathfrak{I}$ l'idéal de $k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ définissant X. Établir l'implication (ii) ⇒ (i) revient à prouver le fait suivant : si l'idéal $\mathfrak{I} \otimes_k \overline{k}$ de $\overline{k}[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ est engendré par r formes linéaires indépendantes, il en est de même pour l'idéal $\mathfrak{I}$.

Convenons de désigner par $f^{(d)}$ la partie homogène de degré d d'un polynôme $f \in k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$. L'ensemble $\mathrm{F} = \{f^{(1)},\ f \in \mathfrak{I}\}$ est un sous-k-espace vectoriel de $\bigoplus_{i=1}^n k\xi_i$ et l'on vérifie immédiatement que $\mathrm{F} \otimes_k \overline{k}$ est le sous-$\overline{k}$-espace vectoriel de $\bigoplus_{i=1}^n \overline{k}\xi_i$ constitué des formes linéaires $f^{(1)},\ f \in \mathfrak{I} \otimes_k \overline{k}$. Par hypothèse, l'idéal $\mathfrak{I} \otimes_k \overline{k}$ est engendré par r formes linéaires indépendantes $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in \overline{k}[\xi_1, \ldots, \xi_n]$. On voit aisément que ces formes linéaires constituent une base de $\mathrm{F} \otimes_k \overline{k}$, d'où il découle que $\mathrm{F} \otimes_k \overline{k}$ est contenu dans $\mathfrak{I} \otimes_k \overline{k}$ puis, en considérant une base de F, que l'idéal $\mathfrak{I} \otimes_k \overline{k}$ est engendré par r formes linéaires indépendantes $\psi_1, \ldots, \psi_r \in k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$.

Nous sommes maintenant en mesure de conclure. Désignant par Y le sous-schéma fermé $V(\psi_1, \ldots, \psi_r)$ de $\mathbb{A}^n_k$, $X(\overline{k}) = Y(\overline{k})$ et donc X et Y ont les mêmes points fermés en vertu du *Nullstellensatz* de Hilbert. Puisque les points fermés de $\mathbb{A}^n_k$ constituent un sous-ensemble partout dense, X et Y ont le même ensemble sous-jacent. Enfin, ces deux schémas étant réduits, $X = Y$ en tant que sous-schémas fermés de $\mathbb{A}^n_k$ et X est donc bien un sous-espace linéaire de codimension r. □

4. Soit S un schéma et soit

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{A}^n \times S \arrow[dl, "\mathrm{pr}_2"] \\ S & \end{tikzcd}$$

un sous-espace linéaire de codimension r (le morphisme p est la restriction à X de la seconde projection pr_2). Pour tout point z de S, la fibre $p^{-1}(z)$ de p au-dessus de z est le sous-schéma fermé $X \times_S \mathrm{Spec}(\kappa(z))$ de $\mathbb{A}^n_{\kappa(z)}$; c'est un sous-espace linéaire de codimension r de $\mathbb{A}^n_{\kappa(z)}$ en vertu du lemme 11. L'assertion réciproque est fausse : un sous-schéma fermé X de $\mathbb{A}^n_S$ tel que, pour tout point $z \in X$, $p^{-1}(z)$ soit un sous-espace linéaire de $\mathbb{A}^n_{\kappa(z)}$ de codimension r, n'est en général *pas* un sous-espace linéaire de codimension r.

Voici un contre-exemple : étant donné un corps k, $S = \mathrm{Spec}(A)$ est le spectre de l'anneau $A = k[\varepsilon] = k[t]/(t^2)$ des nombres duaux et X est le sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^2_A$ défini par l'idéal $(\xi_1, \varepsilon\xi_2)$. Le schéma S est réduit à un point z, correspondant à l'unique idéal maximal εA de A ; l'homomorphisme canonique $A \to \kappa(z) = k$ envoie ε sur 0 et donc $p^{-1}(z) = V(\xi_1)$ est un sous-espace linéaire de codimension un de $\mathbb{A}^2_{\kappa(z)}$. Observons toutefois que X n'est pas un sous-espace linéaire de $\mathbb{A}^2_A$: si tel était le cas, $X(A)$ serait en effet le noyau d'une matrice de rang $r \geq 0$ et le A-module $A^2/X(A)$ serait alors libre de rang r (cf. remarque 10) ; or $X(A) = A(1,0) \oplus A(0,\varepsilon)$ et $A^2/X(A) \simeq A/A\varepsilon \simeq k$ n'est pas un A-module libre.

5. Si l'on veut caractériser les sous-espaces linéaires au-dessus d'un schéma S parmi tous les sous-schémas fermés de $\mathbb{A}^n \times S$, il ne suffit pas d'imposer que la fibre au-dessus de chaque point z de S soit un sous-espace linéaire au-dessus du corps résiduel $\kappa(z)$; il faut en plus imposer que le morphisme $p : X \to S$ induit par la seconde projection soit *plat*.

Rappel du cours de Stéphane : étant donné un anneau A, un A-module M est dit *plat* si le foncteur $M \otimes_A \cdot$ de la catégorie des A-modules dans elle-même est *exact*, i.e. transforme une suite exacte en une suite exacte. Un morphisme de schémas $f : X \to Y$ est plat si, pour tout point $x \in X$, l'homomorphisme d'anneaux $f^\natural_x : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ fait de $\mathcal{O}_{X,x}$ un $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$-module plat.

Proposition 13 — *Soit* S *un schéma et soit* X *un sous-schéma fermé de* $\mathbb{A}^n \times S$. *On désigne par* $p : X \to S$ *le morphisme induit par la seconde projection et on suppose que ce morphisme est localement de présentation finie, i.e. que* X *est localement défini par un idéal de type fini.*

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) X *est un sous-espace linéaire de codimension r ;*

(ii) *le morphisme p est* plat *et, pour tout point* $z \in S$, *la fibre* $p^{-1}(z)$ *est un sous-espace linéaire de codimension r de* $\mathbb{A}^n_{\kappa(z)}$ *;*

(iii) *le morphisme p est* plat *à fibres* géométriquement réduites *et, pour tout corps algébriquement clos k et tout morphisme* $f : \mathrm{Spec}(k) \to X$,

$$(f^*X)(k) = \{u \in X(k) \mid p(u) = f\}$$

est un sous-espace vectoriel de codimension r de $f^*(\mathbb{A}^n \times S)(k) = \mathbb{A}^n_k(k) = k^n$.

Démonstration. Les assertions (ii) et (iii) sont équivalentes d'après la proposition 12.

L'implication $(i) \Longrightarrow (ii)$ est facile. Si X est un sous-espace linéaire de $\mathbb{A}^n \times S$, alors la fibre de p au-dessus d'un point z de S est un sous-espace linéaire de $\mathbb{A}^n_{\kappa(z)}$ (lemme 11). Le morphisme p est plat : on peut recouvrir S par des ouverts affines $U = \mathrm{Spec}(A)$ tels que $X \cap \mathbb{A}^n \times U$ s'écrive sous la forme $V(M\underline{\xi})$ avec $M \in M_{rn}(A)$ de rang r ; si $Q \in GL_n(A)$ est une matrice telle que $MQ = \big(I_r|(*)\big)$, Q^{-1}, Q^{-1} détermine un automorphisme φ de $\mathbb{A}^n_A$ tel que le morphisme $\mathbb{A}^n_A \to \mathbb{A}^{n-r}_A$, composé de φ par la projection $\mathbb{A}^n_A \to \mathbb{A}^{n-r}_A$ définie en oubliant les r premières coordonnées, induise un isomorphisme de $X \cap \mathbb{A}^n_A$ sur $\mathbb{A}^{n-r}_A$ compatible avec les projections vers $\mathrm{Spec}(A)$; le morphisme canonique $\mathbb{A}^{n-r}_A \to \mathrm{Spec}(A)$ est plat car l'anneau $A[\xi_1, \ldots, \xi_{n-r}]$ est un A-module libre, donc plat ; il en découle que le morphisme $p : X \to S$ est plat au-dessus d'ouverts recouvrant S et, puisque la platitude est de nature locale, p est plat.

On admet l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i), qui ne sera pas utilisée dans ce qui suit. □

4. LE FONCTEUR DES POINTS DE LA DROITE PROJECTIVE

Rappelons que $\mathbb{P}^1$ est par définition le schéma obtenu en recollant deux copies $\mathrm{U}_t = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[t])$ et $\mathrm{U}_s = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[s])$ du plan affine $\mathbb{A}^2$ le long des ouverts $\mathrm{U}'_t = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[t,t^{-1}])$ et $\mathrm{U}'_s = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[s,s^{-1}])$, via l'identitification induite par l'isomorphisme $\mathbb{Z}[t,t^{-1}] \tilde{\to} \mathbb{Z}[s,s^{-1}]$ envoyant t sur s^{-1}.

Nous sommes désormais en mesure de décrire le foncteur des points du schéma $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$: quel que soit le schéma S, $\mathrm{h}_{\mathbb{P}^1}(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\mathrm{S}, \mathbb{P}^1)$ s'identifie canoniquement à l'ensemble des *droites* (= sous-espaces linéaires de codimension un) de $\mathbb{A}^2 \times \mathrm{S}$.

(4.1) Nous commençons par définir la *droite universelle* L^u dans $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$.

Le schéma $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ est recouvert par les deux ouverts affines $\mathbb{A}^2 \times \mathrm{U}_t = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[t,\xi_1,\xi_2])$ et $\mathbb{A}^2 \times \mathrm{U}_s = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[s,\xi_1,\xi_2])$, identifiés le long des ouverts $\mathbb{A}^2 \times \mathrm{U}'_t = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[t,t^{-1},\xi_1,\xi_2])$ et $\mathbb{A}^2 \times \mathrm{U}'_s = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[s,s^{-1},\xi_1,\xi_2])$ via l'isomorphisme χ de $\mathbb{Z}[t,t^{-1},\xi_1,\xi_2]$ sur $\mathbb{Z}[s,s^{-1},\xi_1,\xi_2]$ envoyant t sur s^{-1} et ξ_i sur ξ_i ($1 \leq i \leq 2$).

Vu l'identité $\chi(t\xi_1 + \xi_2) = s^{-1}\xi_1 + \xi_2 = s^{-1}(\xi_1 + s\xi_2)$, l'isomorphisme de recollement entre $\mathbb{A}^2 \times \mathrm{U}'_t$ et $\mathbb{A}^2 \times \mathrm{U}'_s$ identifie les sous-schémas fermés $\mathrm{V}(t\xi_1 + \xi_2)$ et $\mathrm{V}(\xi_1 + s\xi_2)$. Ceci permet de donner un sens à la définition suivante.

Définition 14. — *La* droite universelle *au-dessus de $\mathbb{P}^1$ est l'unique sous-schéma fermé L^u de $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ tel que*

$$\mathrm{L}^u \cap \mathbb{A}^2 \times \mathrm{U}_t = \mathrm{V}(t\xi_1 + \xi_2) \quad \textit{et} \quad \mathrm{L}^u \cap \mathbb{A}^2 \cap \mathbb{A}^2 \times \mathrm{U}_s = \mathrm{V}(\xi_1 + s\xi_2).$$

Observons que le sous-schéma fermé L^u de $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ est bien une droite au-dessus de $\mathbb{P}^1$ au sens de la définition car les matrices

$$(t \;\; 1) \in \mathrm{M}_{12}(\mathbb{Z}[t]) \quad \text{et} \quad (1 \;\; s) \in \mathrm{M}_{12}(\mathbb{Z}[s])$$

sont toutes deux de rang un.

(4.2) Quels que soient le schéma S et le morphisme $f : \mathrm{S} \to \mathbb{P}^1$, le sous-schéma fermé $f^*\mathrm{L}^u$ de

$$f^*(\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1) = (\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1) \times_{\mathbb{P}^1} \times \mathrm{S} = \mathbb{A}^2 \times \mathrm{S}$$

est une droite de $\mathbb{A}^2_{\mathrm{S}}$.

Théorème 14 — *Pour tout schéma* S*, l'application*

$$\mathrm{h}_{\mathbb{P}^1}(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(\mathrm{S}, \mathbb{P}^1) \to \{\textit{droites de } \mathbb{A}^2 \times \mathrm{S}\},$$
$$f \mapsto f^*\mathrm{L}^u$$

est bijective.

Le point-clef permettant de démontrer ce théorème est le fait suivant.

Lemme 16 — *Soit* A *un anneau. Deux matrices de rang un* $(a_1 \;\; a_2)$, $(a'_1 \;\; a'_2) \in \mathrm{M}_{12}(\mathrm{A})$ *définissent le même sous-schéma fermé de* $\mathbb{A}^2_{\mathrm{A}} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}[\xi_1,\xi_2])$ *si et seulement si* $a_1a'_2 = a'_1a_2$.

En outre, si a_1 (resp. a_2) est inversible, alors a'_1 (resp. a'_2) est inversible.

Démonstration. Les sous-schémas fermés $\mathrm{X} = \mathrm{V}(a_1\xi_1 + a_2\xi_2)$ et $\mathrm{X}' = \mathrm{V}(a'_1\xi_1 + a'_2\xi_2)$ de $\mathbb{A}^2_{\mathrm{A}}$ sont les mêmes si et seulement si les sous-ensembles $\mathrm{X}(\mathrm{B})$ et $\mathrm{X}'(\mathrm{B})$ de $\mathbb{A}^2_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \mathrm{B}^2$ coïncident pour toute A-algèbre B, donc si et seulement si

$$\{(x_1,x_2) \in \mathrm{B}^2 \mid a_1x_1 + a_2x_2 = 0\} = \{(x_1,x_2) \in \mathrm{B}^2 \mid a'_1x_1 + a'_2x_2 = 0\}$$

pour toute A-algèbre B.

La condition $a_1a'_2 = a'_1a_2$ est clairement nécessaire : il suffit d'observer que le couple $(a_2, -a_1) \in \mathrm{A}^2$ appartient à $\mathrm{X}(\mathrm{A})$ tandis qu'il appartient à $\mathrm{X}'(\mathrm{A})$ si et seulement si $a_1a'_2 = a'_1a_2$.

Supposons réciproquement que l'on ait $a_1a'_2 = a'_1a_2$ et considérons une A-algèbre B ainsi qu'un couple $(x_1,x_2) \in \mathrm{B}^2$ appartenant à $\mathrm{X}(\mathrm{B})$. La matrice $(a'_1 \;\; a'_2)$ étant de rang un, il existe un couple $(u_1,u_2) \in \mathrm{A}^2$ tel que $a'_1u_1 + a'_2u_2 = 1$ (c'est équivalent) et les deux ouverts principaux $\mathrm{D}(a'_1)$, $\mathrm{D}(a'_2)$ constituent donc un recouvement ouvert de $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ et de $\mathrm{Spec}(\mathrm{B})$ (on omet d'écrire l'homomorphisme structural $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ faisant de l'anneau B une A-algèbre). On justifie de manière similaire que les ouverts principaux $\mathrm{D}(a_1)$ et $\mathrm{D}(a_2)$ recouvrent $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{Spec}(\mathrm{B})$.

L'élément $a'_1x_1 + a'_2x_2$ de B est d'image nulle dans chacun des anneaux $\mathrm{B}[a_1{}^{-1}]$ et $\mathrm{B}[a_2{}^{-1}]$: en effet,

$$\begin{aligned} a_1(a'_1x_1 + a'_2x_2) &= a'_1(a_1x_1 + a_2x_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $a_1a_2' = a_1'a_2$ et $(x_1,x_2) \in \mathrm{X}(\mathrm{B})$; pour les mêmes raisons,

$$\begin{aligned} a_2(a_1'x_1 + a_2'x_2) &= a_2'(a_1x_1 + a_2x_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

. Un élément de B étant nul si et seulement si ses images dans $\mathrm{B}[{a_1}^{-1}]$ et dans $\mathrm{B}[{a_2}^{-1}]$ le sont, nous en concluons à la nullité de $a_1'x_1 + a_2'x_2 = 0$ dans B.

Nous avons ainsi établi l'inclusion $\mathrm{X}'(\mathrm{B}) \subset \mathrm{X}(\mathrm{B})$. L'inclusion réciproque s'obtient de la même manière, donc $\mathrm{X}(\mathrm{B}) = \mathrm{X}'(\mathrm{B})$ pour toute A-algèbre B et finalement $\mathrm{X} = \mathrm{X}'$.

Démontrons maintenant la seconde assertion. Si a_1 est inversible, $a_2' = a_1^{-1}a_1'a_2$ et donc, en posant $a = a_1^{-1}a_2$,

$$\mathrm{X}(\mathrm{B}) = \{(x_1,x_2) \in \mathrm{B}^2 \mid x_1 + ax_2 = 0\}, \quad \mathrm{X}'(\mathrm{B}) = \{(x_1,x_2) \in \mathrm{B}^2 \mid a_1'(x_1 + ax_2) = 0\}$$

pour toute A-algèbre B. Comme $(1,0) \notin \mathrm{X}(\mathrm{B})$, l'identité $\mathrm{X}(\mathrm{B}) = \mathrm{X}'(\mathrm{B})$ implique $a_1' \neq 0$ dans B pour toute A-algèbre B ; en particulier, $a_1' \neq 0$ dans $\kappa(\mathfrak{p})$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A. L'élément a_1' n'est par conséquent contenu dans aucun idéal premier de A, ce qui signifie qu'il est inversible. $\square$

Démonstration du théorème 17. Nous allons procéder en trois étape.

Première étape – Soit $f : \mathrm{S} \to \mathbb{P}^1$ un morphisme de schémas et soit $\mathrm{L} = f^*\mathrm{L}^u$. Les ouverts $f^{-1}(\mathrm{U}_t)$ et $f^{-1}(\mathrm{U}_s)$ recouvrant S, tout point z de S appartient à l'un ou l'autre. Si $z \in f^{-1}(\mathrm{U}_t)$, le morphisme $\mathrm{Spec}(\kappa(z)) \to \mathrm{U}_t$ provient d'un homomorphisme $f^\natural : \mathbb{Z}[t] \to \kappa(z)$ et $\mathrm{L}_z = \mathrm{V}(f^\natural(t)\xi_1 + \xi_2)$. Si $z \in f^{-1}(\mathrm{U}_s)$, le morphisme naturel provient d'un homomorphisme $f^\natural : \mathbb{Z}[s] \to \kappa(z)$ et $\mathrm{L}_z = \mathrm{V}(\xi_1 + f^\natural(s)\xi_2)$; en outre, z appartient alors à l'intersection $f^{-1}(\mathrm{U}_t) \cap f^{-1}(\mathrm{U}_s) = f^{-1}(\mathrm{U}_t \cap \mathrm{U}_s)$ si et seulement si l'homomorphisme $f^\natural : \mathbb{Z}[s] \to \kappa(z)$ se factorise par $\mathbb{Z}[s,s^{-1}]$, donc si et seulement si $f^\natural(s)$ est un élément inversible de $\kappa(s)$, auquel cas $\mathrm{L}_z = \mathrm{V}(f^\natural(s)^{-1}\xi_1 + \xi_2)$. Vu la seconde assertion du lemme précédent, cette discussion prouve que l'ouvert $f^{-1}(\mathrm{U}_t)$ de S est constitué des points z tels que L_z admette une équation de la forme $a\xi_1 + \xi_2$ avec $a \in \kappa(z)$.

Enfin, étant donnés un point $z \in f^{-1}(\mathrm{U}_t)$ et un ouvert affine $\mathrm{U} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ de S contenant z et tel que $\mathrm{L} \cap \mathbb{A}^2 \times \mathrm{U} = \mathrm{V}(a_1\xi_1 + a_2\xi_2)$ avec $(a_1 \;\; a_2) \in \mathrm{M}_{12}(\mathrm{A})$ de rang un, l'image $a_2(z)$ de a_2 dans le corps résiduel $\kappa(z)$ est inversible en vertu de l'identité $\mathrm{V}(f^\natural(t)\xi_1 + \xi_2) = \mathrm{V}(a_1(z)\xi_1 + a_2(z)\xi_2)$ et de la seconde assertion du lemme précédente. Le point z appartient par suite à l'ouvert $\mathrm{D}(a_2) = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}[a_2^{-1}])$ de U et, vu la caractérisation de l'ouvert $f^{-1}(\mathrm{U}_t)$, $\mathrm{D}(a_2) \subset f^{-1}(\mathrm{U}_t)$. Nous avons ainsi établi l'identité

$$f^{-1}(\mathrm{U}_t) = \left\{ z \in \mathrm{S} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{z possède un voisinage affine Spec(A) tel que} \\ \mathrm{L} \cap \mathbb{A}^2_{\mathrm{A}} = \mathrm{V}(a_1\xi_1 + a_2\xi_2) \;\text{ avec } a_2 \in \mathrm{A}^\times \end{array} \right\}.$$

On établit de même une caractérisation analogue de $f^{-1}(\mathrm{U}_s)$.

Deuxième étape – Soient $f, g : \mathrm{S} \to \mathbb{P}^1$ deux morphismes tels que $f^*\mathrm{L}^u = g^*\mathrm{L}^u$. D'après la première étape, $f^{-1}(\mathrm{U}_t) = g^{-1}(\mathrm{U}_t)$ et $f^{-1}(\mathrm{U}_s) = g^{-1}(\mathrm{U}_s)$. Pour tout ouvert affine $\mathrm{U} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ contenu dans $f^{-1}(\mathrm{U}_t) = g^{-1}(\mathrm{U}_t)$, les morphismes $f, g : \mathrm{U} \to \mathrm{U}_t$ correspondent à des homomorphismes $f^\natural, g^\natural : \mathbb{Z}[t] \to \mathrm{A}$ et

$$\mathrm{V}(f^\natural(t)\xi_1 + \xi_2) = f^*\mathrm{L}^u \cap \mathbb{A}^2_{\mathrm{A}} = g^*\mathrm{L}^u \cap \mathbb{A}^2_{\mathrm{A}} = \mathrm{V}(g^\natural(t)\xi_1 + \xi_2).$$

En vertu du lemme précédent, il en découle $f^\natural(t) = g^\natural(t)$ et donc $f_{|\mathrm{U}} = g_{|\mathrm{U}}$.

Ceci établit l'injectivité de l'application $\mathrm{h}_{\mathbb{P}^1}(\mathrm{S}) \to \{\text{droites dans } \mathbb{A}^2 \times \mathrm{S}\}$, $f \mapsto f^*\mathrm{L}^u$.

Troisième étape – Soit finalement

$$\begin{tikzcd} \mathrm{L} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathbb{A}^2 \times \mathrm{S} \arrow[dl, "\mathrm{pr}_2"] \\ \mathrm{S} & \end{tikzcd}$$

une droite au-dessus de S. Il existe par hypothèse un recouvrement $\mathscr{U}$ de S par des ouverts affines $\mathrm{U} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ tels que $\mathrm{L} \cap \mathbb{A}^2 \times \mathrm{U}$ soit le sous-schéma fermé $\mathrm{V}(a_1\xi_1 + a_2\xi_2)$ de $\mathrm{Spec}(\mathrm{A}[\xi_1,\xi_2])$ défini par une matrice de rang un $(a_1 \;\; a_2) \in \mathrm{M}_{12}(\mathrm{A})$. Les ouverts principaux $\mathrm{D}(a_1)$ et $\mathrm{D}(a_2)$ recouvrant $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, un raffinement convenable de notre recouvement initial nous permet de supposer à chaque fois que l'un des deux éléments a_1, a_2 est inversible dans A.

Considérons un ouvert $\mathrm{U} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ dans $\mathscr{U}$ et choisissons une matrice de rang un $(a_1 \;\; a_2) \in \mathrm{M}_{12}(\mathrm{A})$ définissant $\mathrm{L} \cap \mathbb{A}^2 \times \mathrm{U}$ avec $a_1 \in \mathrm{A}^\times$ ou $a_2 \in \mathbb{A}^\times$. Si $a_1 \in \mathrm{A}^\times$, on définit un morphisme $f_1 : \mathrm{U} \to \mathrm{U}_s \subset \mathbb{P}^1$ en considérant l'unique homomorphisme d'anneaux $f_1^\natural : \mathbb{Z}[s] \to \mathrm{A}$ envoyant s sur $a_1^{-1}a_2$; on a alors

$$f_1^*\mathrm{L}^u = f_1^*\mathrm{V}(\xi_1 + s\xi_2) = \mathrm{V}(\xi_1 + a_1^{-1}a_2\xi_2) = \mathrm{V}(a_1\xi_1 + a_2\xi_2) = \mathrm{L} \cap \mathbb{A}^2 \times \mathrm{U}.$$

Si $a_2 \in \mathrm{A}^\times$, on définit un morphisme $f_2 : \mathrm{U} \to \mathrm{U}_t \subset \mathbb{P}^1$ en considérant l'unique homomorphisme d'anneaux $f_2^\natural : \mathbb{Z}[t] \to \mathrm{A}$ envoyant t sur $a_1 a_2^{-1}$; on a

$$f_2^* \mathrm{L}^u = f^* \mathrm{V}(t\xi_1 + \xi_2) = \mathrm{V}(a_2^{-1} a_1 \xi_1 + \xi_2) = \mathrm{V}(a_1\xi_1 + a_2\xi_2) = \mathrm{L} \cap \mathbb{A}^2 \times \mathrm{U}.$$

Si a_1 et a_2 sont tous deux inversibles dans $\mathrm{A}^\times$, les deux morphismes $f_1,\ f_2 : \mathrm{U} \to \mathbb{P}^1$ coïncident vu les conditions de recollement de U_t et U_s dans $\mathbb{P}^1$. Nous avons ainsi défini un morphisme $f : \mathrm{U} \to \mathbb{P}^1$ tel que $\mathrm{L} = f^*\mathrm{L}^u$.

D'après le résultat de l'étape précédente, ce morphisme ne dépend que de la droite $\mathrm{L} \hookrightarrow \mathbb{A}^2 \times \mathrm{U}$ et non du choix de la matrice $(a_1 \ \ a_2)$ la définissant. Le même argument garantit que les morphismes définis sur deux ouverts $\mathrm{U}, \mathrm{V} \in \mathscr{U}$ coïncident sur chaque ouvert affine de $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$, donc sur $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$; ces morphismes se recollent par conséquent en un morphisme $f : \mathrm{S} \to \mathbb{P}^1$. Enfin, $f^*\mathrm{L}^u = \mathrm{L}$ car cette identité est vraie au-dessus de chaque ouvert $\mathrm{U} \in \mathscr{U}$ par définition même du morphisme f. □

5. Les grassmanniennes

Ayant décrit le foncteur des points du schéma $\mathbb{P}^1$ en établissant que le couple $(\mathbb{P}^1, \mathrm{L}^u)$ représente le foncteur

$$\mathbf{Sch} \to \mathbf{Ens}, \quad \mathrm{S} \mapsto \{\text{droites dans } \mathbb{A}^2 \times \mathrm{S}\},$$

nous allons maintenant prendre le point de vue opposé et démontrer le théorème suivant.

Théorème 17 — *Pour tous entiers naturels n, r avec $1 \leq r \leq n$, le foncteur*

$$\mathrm{G}_{n,r} : \mathbf{Sch} \to \mathbf{Ens}, \quad \mathrm{S} \mapsto \{\textit{sous-espaces linéaires de codimension } r \textit{ de } \mathbb{A}^n \times \mathrm{S}\}$$

est représenté par un couple $(\mathrm{Grass}_{n,r}, \mathrm{L}^u_{n,r})$ *formé d'un schéma* $\mathrm{Grass}_{n,r}$ *et d'un sous-espace linéaire* $\mathrm{L}_{n,r}$ *de codimension r de* $\mathbb{A}^n \times \mathrm{Grass}_{n,r}$.

Le couple $(\mathrm{Grass}_{n,r}, \mathrm{L}_{n,r})$ *est unique à isomorphisme unique près et le schéma* $\mathrm{Grass}_{n,r}$ *est la* grassmannienne des sous-espaces linéaires de codimension r de $\mathbb{A}^n$.

(5.1) La démonstration du théorème repose fondamentalement sur les mêmes arguments que ceux utilisés dans la section précédente pour décrire le foncteur des points de $\mathbb{P}^1$. En voici le canevas.

1. Nous allons commencer par mettre en évidence certains sous-foncteurs du foncteur $\mathrm{G}_{n,r} : \mathbf{Sch} \to \mathbf{Ens}$ et vérifier qu'ils sont représentables par des espaces affines ; ce seront des généralisations des ouverts U_t et U_s de $\mathbb{P}^1$.
2. Nous observerons alors que ces sous-foncteurs fournissent naturellement une condition de recollement pour les espaces affines les représentant.
3. Nous vérifierons enfin que le schéma obtenu par recollement de ces espaces affines (naturellement équipé d'un espace linéaire relatif) représente le foncteur $\mathrm{G}_{n,r}$.

Les principaux énoncés techniques sont rassemblés dans le lemme ci-dessous.

Définition 18 — *Soit* A *un anneau. Pour toute une matrice* $\mathrm{M} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{r,n}(\mathrm{A})$ *et toute partie* I *de* $\{1, \ldots, n\}$ *à r éléments, on désigne par* M_I *la matrice carrée de taille r déduite de* M *en retirant les colonnes dont l'indice n'appartient pas à* I *et on pose* $\delta_\mathrm{I}(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{M}_\mathrm{I})$.

Lemme 19 — *Soit* A *un anneau et soit* $\mathrm{M} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{rn}(\mathrm{A})$ *une matrice de rang r. Le schéma* $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ *est recouvert par les ouverts principaux* $\mathrm{D}(\delta_\mathrm{I})$, I *parcourant l'ensemble des parties à r éléments de* $\{1, \ldots, n\}$.

Démonstration. [...] □

Lemme 20 — *Soit* A *un anneau et soient* $\mathrm{M} = (a_{ij}),\ \mathrm{M}' = (a'_{ij}) \in \mathrm{M}_{r,n}(\mathrm{A})$ *deux matrices de rang r. On pose*

$$\mathrm{L} = \mathrm{V}\left(\sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij}\xi_j \ ; \ 1 \leq i \leq r\right) \quad \textit{et} \quad \mathrm{L}' = \mathrm{V}\left(\sum_{1 \leq j \leq n} a'_{ij}\xi_j \ ; \ 1 \leq i \leq r\right).$$

(i) *Le schéma* $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ *est recouvert par les ouverts principaux* $\mathrm{D}(\delta_\mathrm{I})$, I *parcourant l'ensemble des parties à r éléments de* $\{1, \ldots, n\}$.

(ii) *Si* $\mathrm{L} = \mathrm{L}'$, *alors*

$$\delta_\mathrm{I}(\mathrm{M}) \in \mathrm{A}^\times \iff \delta_\mathrm{I}(\mathrm{M}') \in \mathrm{A}^\times$$

pour toute partie à r éléments I *de* $\{1, \ldots, n\}$.

(iii) *Soit* I *une partie à r éléments de* $\{1, \ldots, n\}$. *Si* $\delta_\mathrm{I}(\mathrm{M})$ *et* $\delta_\mathrm{I}(\mathrm{M}')$ *sont inversibles dans* A, *alors* $\mathrm{L} = \mathrm{L}'$ *si et seulement si* $\mathrm{M}_\mathrm{I}^{-1}\mathrm{M} = \mathrm{M}_\mathrm{I}'^{-1}\mathrm{M}'$.

Démonstration. (i) Considérons un point z de $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ et convenons de noter $a \mapsto a(z)$ l'homomorphisme canonique $\mathrm{A} \to \kappa(z)$. La fibre L_z de L au-dessus du point z est le sous-espace linéaire de $\mathbb{A}^n_{\kappa(z)}$ défini par la matrice $\mathrm{M}(z) = (a_{ij}(z))$ de $\mathrm{M}_{rn}(\kappa(z))$, image de M par l'homomorphisme canonique $\mathrm{M}_{rn}(\mathrm{A}) \to \mathrm{M}_{rn}(\kappa(z))$. Comme $\mathrm{M}(z)$ est par hypothèse de rang r, il existe une partie I de $\{1,\ldots,n\}$ à r éléments telle que le mineur $\delta_I(\mathrm{M})(z) = \delta_{\mathrm{I}}(\mathrm{M}(z))$ soit un élément inversible de $\kappa(z)$ et le point z appartient donc à l'ouvert principal $\mathrm{D}(\delta_{\mathrm{I}}(\mathrm{M}))$.

(ii) Supposons que les sous-schémas fermés L et L′ de $\mathbb{A}^n_{\mathrm{A}}$ coïncident et que $\delta_{\mathrm{I}}(\mathrm{M})$ soit inversible dans A. Pour toute A-algèbre B, les matrices M′ et $\mathrm{M}_{\mathrm{I}}^{-1}\mathrm{M}$ ont le même noyau dans B^n ; en particulier, pour tout vecteur $\underline{x} \in \mathrm{B}^n$ tel que $\mathrm{M}'\underline{x} = 0$, $\underline{x} = 0$ si $x_i = 0$ pour tout $i \in \{1,\ldots,n\} - \mathrm{I}$. Appliquant ceci au cas où B est le corps résdiduel d'un point de $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, nous en déduisons que la matrice M'_{I} est d'image inversible dans $\mathrm{M}_{rn}(\kappa(z))$ pour tout pour tout $z \in \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$; on a donc $\delta_{\mathrm{I}}(\mathrm{M})(z) \neq 0$ pour tout z, d'où $\delta_{\mathrm{I}}(\mathrm{M}) \in \mathrm{A}^\times$, et la matrice M_I est ainsi inversible dans $\mathrm{M}_{rn}(\mathrm{A})$.

(iii) Supposons qu'il existe une partie I de $\{1,\ldots,n\}$ à r éléments telle que $\delta_{\mathrm{I}}(\mathrm{M})$ et $\delta_{\mathrm{I}}(\mathrm{M}')$ soient inversibles dans A. Pour simplifier les notations, $\mathrm{I} = \{1,\ldots,r\}$ dans ce qui suit.

Si $\mathrm{L} = \mathrm{L}'$, les matrices $\mathrm{N} = \mathrm{M}_{\mathrm{I}}^{-1}\mathrm{M}$ et $\mathrm{N}' = \mathrm{M}_{\mathrm{I}}'^{-1}\mathrm{M}$ ont le même noyau dans A^n. Pour tout indice $j \in \{1,\ldots,n\} - \mathrm{I}$ et tout r-uplet $\underline{x} \in \mathrm{A}^r$,

$$\mathrm{N}\left(\sum_{1\le i\le r} x_i e_i - e_j\right) = \sum_{1\le \ell \le r} x_\ell - \sum_{1\le i\le r} n_{i,j} e_j,$$

où $(e_1,\ldots,e_r)$ désigne la base canonique de A^n. On dispose d'identités analogues pour la matrice N′ et on en conclut à l'égalité colonne par colonne des matrices N et N′.

Réciproquement, si $\mathrm{M}_{\mathrm{I}}^{-1}\mathrm{M} = \mathrm{M}_{\mathrm{I}}'^{-1}\mathrm{M}'$, alors $\mathrm{L} = \mathrm{L}'$ car

$$\mathrm{L} = \mathrm{V}(\mathrm{M}\underline{\xi}) = \mathrm{V}\left(\mathrm{M}_{\mathrm{I}}^{-1}\mathrm{M}\underline{\xi}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{L}' = \mathrm{V}(\mathrm{M}'\underline{\xi}) = \mathrm{V}\left(\mathrm{M}_{\mathrm{I}}'^{-1}\mathrm{M}'\underline{\xi}\right).$$

□

(5.2) Passons maintenant à la démonstration du théorème 17.

Notations — Nous allons considérer l'espace affine de dimension rn $\mathbb{V}$ muni des coordonnées t_{ij}, $1 \le i \le r$, $1 \le j \le n$: $\mathbb{V} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\xi_{ij}\ ;\ 1 \le i \le r,\ 1 \le j \le n])$. Pour toute partie I de $\{1,\ldots,n\}$ à r éléments, nous désignerons par $\mathbb{V}_{\mathrm{I}}$ le sous-schéma dermé de $\mathbb{V}$ défini par les r^2 équations

$$t_{ij} = \delta_{ij}, \quad 1 \le i \le r, \quad j \in \mathrm{I}\ ;$$

il est canoniquement isomorphe à l'espace affine $r(n-r)$-dimensionel $\mathrm{Spec}([\mathbb{Z}[t_{ij}\ ;\ 1 \le i \le r\ ,\ j \in \{1,\ldots,n\} - \mathrm{I}])$.

Définition 21 — *Étant donnée une partie* I *de* $\{1,\ldots,n\}$ *à* r *éléments, on désigne par* $\mathrm{G}^{\mathrm{I}}_{r,n}$ *le sous-foncteur de* $\mathrm{G}_{r,n}$ *défini comme suit : pour tout schéma* S, $\mathrm{G}^{\mathrm{I}}_{r,n}(\mathrm{S})$ *est l'ensemble des sous-espaces linéaires* $\mathrm{L} \hookrightarrow \mathbb{A}^n \times \mathrm{S}$ *de codimension* r *tels que, pour tout point* z *de* S, *le sous-espace linéaire* L_z *de* $\mathbb{A}^n_{\kappa(z)}$ *soit défini par une matrice* $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_{rn}(\kappa(z))$ *avec* $\delta_{\mathrm{I}}(\mathrm{M}) \neq 0$.

De manière équivalente, $\mathrm{G}^{\mathrm{I}}_{r,n}(\mathrm{S})$ est l'ensemble des sous-espaces linéaires $\mathrm{L} \hookrightarrow \mathbb{A}^n \times \mathrm{S}$ de codimension r qui, localement au-dessus de S, sont définis par des matrices $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_{rn}(\mathrm{A})$ telles que $\delta_{\mathrm{I}}(\mathrm{M}) \in \mathrm{A}^\times$.

Première étape : représentabilité des foncteurs $\mathrm{G}^{\mathrm{I}}_{r,n}$. — Fixons une partie I de $\{1,\ldots,n\}$ à r éléments. Le sous-schéma fermé $\mathrm{L}^u_{\mathrm{I}}$ de $\mathbb{A}^n \times \mathbb{V}_{\mathrm{I}}$ défini par les équations $\sum_{1\le j\le n} t_{ij}\xi_j$, $1 \le i \le r$ est manifestement un sous-espace linéaire de codimension r au-dessus de $\mathbb{V}_{\mathrm{I}}$ et $\mathrm{L}^u_{\mathrm{I}}$ est un élément de $\mathrm{G}^{\mathrm{I}}_{r,n}(\mathbb{V}_{\mathrm{I}})$ puisque $\delta_{\mathrm{I}}(t_{ij}) = 1$.

Quel que soit le schéma S, l'application

$$h_{\mathbb{V}_{\mathrm{I}}}(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\mathrm{S}, \mathbb{V}_{\mathrm{I}}) \to \mathrm{Gr}^{\mathrm{I}}_{r,n}(\mathrm{S}), \quad f \mapsto f^*\mathrm{L}^u_{\mathrm{I}}$$

est *bijective*.

- *Injectivité.* Puisque deux morphismes $f, g : \mathrm{S} \to \mathbb{V}_{\mathrm{I}}$ sont égaux si et seulement s'ils coïncident sur chaque ouvert affine de S, il est loisible de supposer que S est affine. Un morphisme $f : \mathrm{Spec}(\mathrm{A}) \to \mathbb{V}_{\mathrm{I}}$ est la même chose qu'un homomorphisme d'anneaux $f^\natural : \mathbb{Z}[t_{ij}\ ;\ 1 \le i \le r,\ j \in \{1,\ldots,n\} - \mathrm{I}] \to \mathrm{A}$ et $f^*\mathrm{L}^u_{\mathrm{I}}$ est le sous-espace linéaire de $\mathbb{A}^n_{\mathrm{A}}$ défini par la matrice $(f^\natural(t_{ij})) \in \mathrm{M}_{rn}(\mathrm{A})$; si deux morphismes $f, g : \mathrm{S} \to \mathbb{V}_{\mathrm{I}}$ sont tels que $f^*\mathrm{L}^u_{\mathrm{I}} = g^*\mathrm{L}^u_{\mathrm{I}}$, alors $(f^\natural(t_{ij})) = (g^\natural(t_{ij})$ dans $\mathrm{M}_{rn}(\mathrm{A})$ en vertu du point (iii) du lemme précédent et donc $f = g$.

- *Surjectivité.* Soit $\mathrm{L} \in \mathrm{G}^{\mathrm{I}}_{r,n}$. Le schéma S est recouvert par des ouverts affines $\mathrm{U} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ tels que $\mathrm{L} \cap \mathbb{A}^n \times \mathrm{U} = \mathrm{V}(\mathrm{M}\underline{\xi})$ avec $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_{rn}(\mathrm{A})$ et $\delta_{\mathrm{I}}(\mathrm{M}) \in \mathrm{A}^\times$. Dans ces conditions, $\mathrm{L} \cap \mathbb{A}^n \times \mathrm{U} = \mathrm{V}(\mathrm{M}_{\mathrm{I}}^{-1}\mathrm{M}\underline{\xi})$ et donc $\mathrm{L} \cap \mathbb{A}^n \times \mathrm{U} = f^*_{\mathrm{U}}\mathrm{L}^u_{\mathrm{I}}$, où $f_{\mathrm{U}} : \mathrm{U} \to \mathbb{V}_{\mathrm{I}}$ est le morphisme tel que $f^\natural : \mathbb{Z}[t_{ij}\ ;\ 1 \le i \le r,\ j \in \{1,\ldots,n\} - \mathrm{I}] \to \mathrm{A}$ soit l'homomorphisme défini

par
$$f^\natural(t_{ij}) = \left(\mathrm{M}_I^{-1}\mathrm{M}\right)_{ij}$$
pour tous i, j. Vu l'injectivité des applications $\mathrm{h}_{\mathbb{V}_\mathrm{I}}(\cdot) \to \mathrm{G}^\mathrm{I}_{r,n}(\cdot)$, les différents morphismes $f_\mathrm{U} : \mathrm{U} \to \mathbb{V}_\mathrm{I}$ que l'on vient de définir se recollent en un morphisme $f : \mathrm{S} \to \mathbb{V}_\mathrm{I}$ tel que $\mathrm{L} = f^*\mathrm{L}^u_\mathrm{I}$.

Nous venons d'établir que le foncteur $\mathrm{Gr}^\mathrm{I}_{r,n}$ est représenté par le schéma $\mathbb{V}_\mathrm{I}$ – isomorphe à l'espace affine standard $\mathbb{A}^{r(n-r)}$ – muni du sous-espace linéaire relatif $\mathrm{L}^u_\mathrm{I} \hookrightarrow \mathbb{A}^n \times \mathbb{V}_\mathrm{I}$.

Deuxième étape : condition de recollement des foncteurs $\mathrm{G}^\mathrm{I}_{r,n}$. Soient I et J deux parties de $\{1,\ldots,n\}$ à r éléments. Le produit fibré $\mathrm{G}^{\mathrm{I,J}}_{r,n} = \mathrm{G}^\mathrm{I}_{r,n} \times_{\mathrm{G}_{r,n}} \mathrm{G}^\mathrm{J}_{r,n}$ est par définition le foncteur
$$\mathbf{Sch} \to \mathbf{Ens},\ \ \mathrm{S} \mapsto \{(\mathrm{L},\mathrm{L}') \in \mathrm{G}^\mathrm{I}_{r,n}(\mathrm{S}) \times \mathrm{G}^\mathrm{J}_{r,n}(\mathrm{S}) \mid Lr = \mathrm{L}' \in \mathrm{G}_{r,n}(\mathrm{S})\} = \mathrm{G}^\mathrm{I}_{r,n}(\mathrm{S}) \cap \mathrm{G}^\mathrm{J}_{r,n}(\mathrm{S}).$$
Le sous-foncteur $\mathrm{G}^{\mathrm{I,J}}_{r,n}$ de $\mathrm{G}^\mathrm{I}_{r,n}$ est représenté par le sous-schéma ouvert $\mathbb{V}^\mathrm{J}_\mathrm{I} = \mathbb{V}_\mathrm{I} \cap \mathrm{D}(\delta_\mathrm{J}(t_{ij}))$ de $\mathbb{V}_\mathrm{I}$: en effet, un morphisme $f : \mathrm{S} \to \mathbb{V}_\mathrm{I}$ se factorise à travers l'immersion ouverte $\mathbb{V}^\mathrm{J}_\mathrm{I} \hookrightarrow \mathbb{V}_\mathrm{I}$ si et seulement si, localement sur S, $f^*\mathrm{L}^u_\mathrm{I}$ est défini par une matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_{r,n}(\mathrm{A})$ telle que $\delta_\mathrm{J}(\mathrm{M}) \in \mathrm{A}^\times$. De même, le sous-foncteur $\mathrm{G}^{\mathrm{I,J}}_{r,n}$ de $\mathrm{G}^\mathrm{J}_{r,n}$ est représenté par le sous-schéma ouvert $\mathbb{V}^\mathrm{I}_\mathrm{J} = \mathbb{V}_\mathrm{J} \cap \mathrm{D}(\delta_\mathrm{I})$ de $\mathbb{V}_\mathrm{J}$. Dans ces conditions, il existe un et un seul isomorphisme $\varphi_\mathrm{IJ} : \mathbb{V}^\mathrm{J}_\mathrm{I} \to \mathbb{V}^\mathrm{I}_\mathrm{J}$ tel que $\varphi^*_\mathrm{IJ}\mathrm{L}^u_\mathrm{J} = \mathrm{L}^u_\mathrm{I}$.

Quelles que soient $\mathrm{I},\mathrm{J},\mathrm{K}$ des parties de $\{1,\ldots,n\}$ à r éléments,
$$(\varphi_\mathrm{JK} \circ \varphi_\mathrm{IJ})^*\mathrm{L}^u_\mathrm{K} = \varphi^*_\mathrm{IJ}\left(\varphi^*_\mathrm{JK}\mathrm{L}^u_\mathrm{K}\right) = \varphi^*_\mathrm{IJ}\mathrm{L}^u_\mathrm{J} = \mathrm{L}^u_\mathrm{I} = \varphi^*_\mathrm{IK}\mathrm{L}^u_\mathrm{K}$$
et donc $\varphi_\mathrm{IK} = \varphi_\mathrm{JK} \circ \varphi_\mathrm{IJ}$.

Troisième étape : représentabilité du foncteur $\mathrm{G}_{r,n}$. Les conditions de recollement mises en évidence à l'étape précédente garantissent l'existence d'un schéma $\mathrm{Grass}_{r,n}$, d'un recouvement d'icelui par des ouverts U_I, ainsi que de morphismes $\varphi_\mathrm{I} : \mathbb{V}_\mathrm{I} \to \mathrm{Grass}_{r,n}$ ($\mathrm{I} \subset \{1,\ldots,n\}$ et $\mathrm{Card}(\mathrm{I}) = r$) qui satisfont aux deux conditions suivantes :

– pour toute partie I de $\{1,\ldots,n\}$ à r éléments, φ_I est un isomorphisme sur U_I ;
– pour toutes parties I,J de $\{1,\ldots,n\}$ à r éléments, $\varphi_\mathrm{IJ} = \varphi_\mathrm{J}\varphi_\mathrm{I}^{-1}$.

En outre, comme $\varphi^*_\mathrm{IJ}\mathrm{L}^u_\mathrm{J} = \mathrm{L}^u_\mathrm{I}$, il existe un unique sous-schéma fermé L^u de $\mathbb{A}^n \times \mathrm{Grass}_{r,n}$ tel que $\varphi^*_\mathrm{I}\mathrm{L}^u = \mathrm{L}^u_\mathrm{I}$ pour toute partie I de $\{1,\ldots,n\}$ à r éléments. Ce sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^n \times \mathrm{Grass}_{r,n}$ est manifestement un sous-espace linéaire de codimension r puisque tel est par construction le cas au-dessus de chacun des ouverts U_I de $\mathrm{Grass}_{r,n}$.

Quel que soit le schéma S, l'application
$$\mathrm{h}_{\mathrm{Grass}_{r,n}}(\mathrm{S}) \to \mathrm{G}_{r,n},\ \ f \mapsto f^*\mathrm{L}^u$$
est *bijective*.

- *Injectivité.* Étant donné un morphisme $f : \mathrm{S} \to \mathrm{Grass}_{r,n}$, les ouverts $f^{-1}(\mathrm{U}_\mathrm{I})$ forment un recouvrement de S. Un point de z de S appartient à $f^{-1}\mathrm{U}_\mathrm{I}$ si et seulement si l'image du morphisme $f_z : \mathrm{Spec}(\kappa(z)) \to \mathrm{Grass}_{r,n}$, obtenu en composant par f le morphisme canonique $\mathrm{Spec}(\kappa(z)) \to \mathrm{S}$, est contenue dans U_I, donc si et seulement si le sous-esapce linéaire $f_z^*\mathrm{L}^u$ de $\mathbb{A}^n_{\kappa(z)}$ appartient au sous-ensemble $\mathrm{G}^\mathrm{I}_{r,n}(\kappa(z))$ en vertu de la première étape. Comme $f_z^*\mathrm{L}^u$ n'est autre que la fibre du sous-espace linéaire $f^*\mathrm{L}^u \hookrightarrow \mathbb{A}^n \times \mathrm{S}$ au-dessus du point z de S, nous en déduisons que les ouverts $f^{-1}\mathrm{U}_\mathrm{I}$ de S ne dépendent du morphisme f que par l'intermédiaire du sous-espace linéaire $f^*\mathrm{L}^u \in \mathrm{G}_{r,n}(\mathrm{S})$. En particulier, si deux morphismes $f,\ g : \mathrm{S} \to \mathrm{Grass}_{r,n}$ sont tels que $f^*\mathrm{L}^u = g^*\mathrm{L}^u$, alors $f^{-1}\mathrm{U}_\mathrm{I} = g^{-1}\mathrm{U}_\mathrm{I}$ pour toute partie I de $\{1,\ldots,n\}$ à r éléments ; vu le résultat de la première étape, f et g ont la même restriction à chacun des ouverts $f^{-1}\mathrm{U}_\mathrm{I} = g^{-1}\mathrm{U}_\mathrm{I}$ et donc $f = g$.

- *Surjectivité.* Soit $\mathrm{L} \in \mathrm{G}_{r,n}(\mathrm{S})$ un sous-espace linéaire de $\mathbb{A}^n \times \mathrm{S}$ de codimension r et soit $\mathrm{U} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ un ouvert affine de S tel que $\mathrm{L} \cap \mathbb{A}^n \times \mathrm{U}$ soit défini par une matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_{r,n}(\mathrm{A})$ de rang r. En vertu du point (i) du lemme , U est recouvert par les ouverts principaux $\mathrm{D}(\delta_\mathrm{I}(\mathrm{M}))$, $\mathrm{I} \subset \{1,\ldots,n\}$ avec $\mathrm{Card}(\mathrm{I}) = r$. Vu la première étape et la définition du schéma $\mathrm{Grass}_{r,n}$, il existe un unique morphisme $f_{\mathrm{U,I}} : \mathrm{D}(\delta_\mathrm{I}(\mathrm{M})) \to \mathrm{Grass}_{r,n}$ tel que $f^*_{\mathrm{U,I}}\mathrm{L}^u = \mathrm{L} \cap \mathbb{A}^n \times \mathrm{D}(\delta_\mathrm{I}(\mathrm{M}))$. Les morphismes $f_{\mathrm{U,I}} : \mathrm{D}(\delta_\mathrm{I}(\mathrm{M})) \to \mathrm{Grass}_{r,n}$ se recollent en un morphisme $f : \mathrm{S} \to \mathrm{Grass}_{r,n}$ tel que $\mathrm{L} = f^*\mathrm{L}^u$ en vertu de l'injectivité des applications canoniques $\mathrm{h}_{\mathrm{Grass}_{r,n}}(\cdot) \to \mathrm{G}_{r,n}(\cdot)$.

(5.3) Explicitons complètement la construction précédente dans le cas particulier $r = 1, n = \mathrm{N}+1$ avec $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$. On considère l'ensemble à n éléments $\{0,\ldots,\mathrm{N}\}$ en lieu et place de l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$, de sorte que $\mathbb{V}$ est l'espace affine $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[t_0\ldots,t_\mathrm{N}])$ et, pour tout élément i de $\{0,\ldots,\mathrm{N}\}$, $\mathbb{V}_i$ est le sous-schéma fermé défini par l'équation $t_i = 1$. Pour faciliter l'explicitation des conditions de recollement des schémas $\mathbb{V}_i$, il y a intérêt à mettre en évidence l'indice i sur les coordonnées ; nous écrirons donc $\mathbb{V}_i = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[t^i_0,\ldots,t^i_\mathrm{N}]/(t^i_i - 1))$. Le sous-espace linéaire L^u_i de $\mathbb{A}^{\mathrm{N}+1} \times \mathbb{V}_i$ est le sous-schéma fermé défini par l'équation $t^i_0\xi_i + \ldots + t^i_\mathrm{N}\xi_\mathrm{N} = 0$.

Quels que soient $i, j \in \{0, \ldots, \mathrm{N}\}$, $\mathbb{V}_i^j$ est l'ouvert principal $\mathrm{D}(t_i^j)$ de $\mathbb{V}_i$. L'isomorphisme $\varphi_{ij} : \mathbb{V}_i^j \to \mathbb{V}_j^i$ provient de l'identification des sous-espaces linéaires $\mathrm{L}_i^u = \mathrm{V}(t_0^i \xi_0 + \ldots + t_\mathrm{N}^i \xi_\mathrm{N})$ et $\varphi_{ij}^* \mathrm{L}_j^u = \mathrm{V}(\varphi_{ij}^\natural(t_0^j)\xi_0 + \ldots + \varphi_{ij}^\natural(t_\mathrm{N}^j)\xi_\mathrm{N})$ de $\mathbb{A}^{\mathrm{N}+1} \times \mathbb{V}_i^j$. Par construction, les matrices $(t_0^i \ \ldots \ t_\mathrm{N}^i)$ et $(\varphi_{ij}^\natural(t_0^j) \ \ldots \ \varphi_{ij}^\natural(t_\mathrm{N}^0))$ sont normalisées de telle sorte que $t_i^i = \varphi_{ij}^\natural(t_j^j) = 1$. L'égalité des sous-espaces linéaires équivaut par suite à l'identité matricielle

$$(\varphi_{ij}^\natural(t_0^j) \ \ldots \ \varphi_{ij}^\natural(t_\mathrm{N}^j)) = ((t_j^i)^{-1} t_0^i \ \ldots \ (t_j^i)^{-1} t_\mathrm{N}^i)$$

et donc φ_{ij} est l'isomorphisme défini par les conditions suivantes :

$$\varphi_{ij}^\natural(t_\alpha^j) = (t_j^i)^{-1} t_\alpha^i \quad \text{pour tout } \alpha \in \{0, \ldots, \mathrm{N}\}.$$

Définition 22 — *Quel que soit le nombre entier naturel* N, *le schéma* $\mathrm{Grass}_{1,\mathrm{N}+1}$ *est l'*espace projectif *de dimension* N, *usuellement noté* $\mathbb{P}^\mathrm{N}$.

Quels que soient le corps k, les *coordonnées homogènes* d'un point z de $\mathbb{P}^n(k)$ sont les matrices $(t_0 \ \ldots \ t_\mathrm{N}) \in \mathrm{M}_{1,\mathrm{N}+1}(k)$ de rang un (c'est-à-dire non identiquement nulles) définissant le sous-espace linéaire L_z de $\mathbb{A}_k^{\mathrm{N}+1}$.

Remarque 23. En vertu de la discussion du point (3.3), 1, l'ensemble $\mathbb{P}^\mathrm{N}(k)$ des points de l'espace projectif $\mathbb{P}^\mathrm{N}$ à valeurs dans un corps k s'identifient naturellement aux *hyperplans* vectoriel de $k^{\mathrm{N}+1}$.

6. Compléments

(6.1) Étant donné un schéma S, les *sections* de la seconde projection $\mathbb{A}^n \times \mathrm{S} \to \mathrm{S}$ correspondent biunivoquement aux morphismes de S dans $\mathbb{A}^n$, c'est-à-dire aux n-uplets d'éléments de $\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S})$. Si $\mathrm{L} \hookrightarrow \mathbb{A}^n \times \mathrm{S}$ est un sous-espace linéaire, on convient de désigner par $\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{S})$ l'ensemble des sections du morphisme $p : \mathrm{L} \to \mathrm{S}$ induit par la seconde projection $\mathbb{A}^n \times \mathrm{S} \to \mathrm{S}$; c'est naturellement un sous-ensemble de $\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S})^n$.

Remarque 24. La notation $\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{S})$ signale que l'on ne considère que les sections du morphisme $p : \mathrm{L} \to \mathrm{S}$, c'est-à-dire les morphismes $s : \mathrm{S} \to \mathrm{L}$ tels que $p \circ s = \mathrm{id}_\mathrm{S}$, et non tous les morphismes de S dans L.

Lemme 25 — *Soit* A *un anneau et soit* $\mathrm{L} \hookrightarrow \mathbb{A}_\mathrm{A}^n$ *un sous-espace linéaire de codimension* r.

1. L'ensemble $\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A})$ *est un sous-*A*-module de* A^n *et, pour tout* $f \in \mathrm{A}$, *l'application canonique* $\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A}) \to \mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A}[f^{-1}])$ *induit un isomorphisme de* $\mathrm{A}[f^{-1}]$*-modules entre* $\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A})[f^{-1}]$ *et* $\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A}[f^{-1}])$.

2. Les A*-modules* $\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A})$ *et* $\mathrm{A}^n/\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A})$ *sont localement libres de rangs respectifs* $n - r$ *et* r.

2. Étant donnés deux sous-espaces linéaires L, L′ *de* $\mathbb{A}_\mathrm{A}^n$, $\mathrm{L} = \mathrm{L}'$ *si et seulement si* $\mathrm{L}(\mathrm{A}) = \mathrm{L}(\mathrm{A}')$.

Démonstration. 1. Il s'agit tout d'abord de vérifier que, pour toutes sections $s, s' \in \mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A})$ et tout élément a de A, la section $s + as'$ de $\mathbb{A}_\mathrm{A}^n$ se factorise à travers l'immersion fermée $\mathrm{L} \hookrightarrow \mathbb{A}_\mathrm{A}^n$. Cette question est de nature locale sur Spec(A) : il suffit en effet de prouver que ceci est vrai au-dessus de chacun des ouverts d'un recouvrement de Spec(A). En se localisant sur Spec(A), nous pouvons supposer que L est défini par une matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_{r,n}(\mathrm{A})$ de rang r : $\mathrm{L} = \mathrm{V}(\mathrm{M}\underline{\xi})$, auquel cas

$$\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A}) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{A}^n \mid \mathrm{M}\underline{x} = 0\}$$

est manifestement un sous-A-module de A^n.

Soit $f \in \mathrm{A}$. L'homomorphisme de restriction $\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A}) \to \mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A}[f^{-1}])$ est A-linéaire et induit donc un $\mathrm{A}[f^{-1}]$-homomorphisme $\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A})[f^{-1}] \to \mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A}[f^{-1}])$. L'injectivité est immédiate : si deux sections $s, s' \in \mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A})$ coïncident au-dessus de l'ouvert $\mathrm{D}(f)$ de Spec(A), elles coïncident en tant que sections de $\mathbb{A}_\mathrm{A}^n$ au-dessus de $\mathrm{D}(f)$; s et s' correspondent ainsi à deux éléments de A^n ayant la même image dans $\mathrm{A}[f^{-1}]^n$, ce qui signifie qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f^m s = f^m s'$ et donc $s = s'$ dans $\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A})[f^{-1}]$). Pour établir la surjectivité, il faut vérifier que toute section $s \in \mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A}[f^{-1}])$ s'écrit sous la forme $f^{-m}\tilde{s}$ avec $\tilde{s} \in \mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A})$ et $m \in \mathbb{N}$ ou, ce qui revient au même, qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f^m s$ se prolonge en une section de L au-dessus de Spec(A). Comme Spec(A) est quasi-compact, il suffit de vérifier que l'on peut recouvrir Spec(A) par des ouverts U tels que la section $f^m s$ de L au-dessus de $\mathrm{U} \cap \mathrm{D}(f)$ se prolonge en une section de L au-dessus de U pour un certain entier $m \in \mathbb{N}$ dépendant de U. En vertu de cette observation, nous pouvons donc supposer que l'on a $\mathrm{L} = \mathrm{V}(\mathrm{M}\underline{\xi})$ avec $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_{rn}(\mathrm{A})$, auquel cas la section s correspond à un élément $\underline{x}$ de $\mathrm{A}[f^{-1}]^n$ tel que $\mathrm{M}\underline{x} = 0$. Il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $f^m \underline{x} \in \mathrm{A}^n$ et, comme $\mathrm{M}(f^m \underline{x}) = f^m \mathrm{M}\underline{x} = 0$ dans $\mathrm{A}[f^{-1}]$, il existe également un entier $m' \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{M}(f^{m+m'}\underline{x}) = f^{m+m'}\mathrm{M}\underline{x} = 0$ dans A, ce qui signifie précisément $f^{m+m'}s$ se prolonge en une section de L au-dessus de Spec(A).

2. Si $\mathrm{L} = \mathrm{V}(\mathrm{M}\underline{\xi})$ avec $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_{rn}(\mathrm{A})$ de rang r, alors $\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A})$ (resp. $\mathrm{A}^n/\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A})$) est le noyau (resp. l'image) de l'application linéaire $\mathrm{M} : \mathrm{A}^n \to \mathrm{A}^r$. Il existe par définition des matrices $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_r(\mathrm{A})$ et $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{A})$ telles que $\mathrm{PMQ} =$

$(\mathrm{I}_r|(0))$; on a donc $\mathrm{A}^n/\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^r$ et $\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A}) = \mathrm{Q}(\{0\}\times\mathrm{A}^{n-r})$, ce qui prouve que ces deux A-modules sont libres, de rangs respectifs r et $n-r$.

En général, on peut recouvrir Spec(A) par des ouverts principaux $\mathrm{D}(f)$ tels que $\mathrm{L}\cap\mathbb{A}^n\times\mathrm{D}(f)$ soit défini par une matrice de rang r dans $\mathrm{M}_{rn}(\mathrm{A}[f^{-1}])$. Comme $\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A}[f^{-1}]) = \mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A})[f^{-1}]$, les $\mathrm{A}[f^{-1}]$-modules localisés $\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A})[f^{-1}]$ et $\big(\mathrm{A}^n/\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A})\big)[f^{-1}] = \mathrm{A}[f^{-1}]^n/\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A})[f^{-1}]$ sont libres en vertu de ce que l'on vient de voir ; les A-modules $\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A})$ et $\mathrm{A}^n/\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A})$ sont donc localement libres, de rangs respectifs $n-r$ et r.

3. Soient L et L$'$ deux sous-espaces linéaires de $\mathbb{A}^n_\mathrm{A}$ de codimension r tels que $\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A}) = \mathrm{L}'_\sigma(\mathrm{A})$.

Si L et L$'$ sont définis par des matrices $\mathrm{M},\mathrm{M}'\in\mathrm{M}_{rn}(\mathrm{A})$ de rang r, il existe en vertu du point précédent une matrice $\mathrm{Q}\in\mathrm{GL}_n(\mathrm{A})$ telle que $\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A}) = \mathrm{L}'_\sigma(\mathrm{A}) = \mathrm{Q}(\{0\}\times\mathrm{A}^{n-r})$, de sorte que les matrices MQ et M$'$Q aient le même noyau $\{0\}\times\mathrm{A}^{n-r}$. Dans ces conditions, $\mathrm{MQ} = \mathrm{P}\big(\mathrm{I}_r|(0)\big)$ et $\mathrm{M}'\mathrm{Q} = \mathrm{P}'\big(\mathrm{I}_r|(0)\big)$ avec $\mathrm{P},\mathrm{P}'\in\mathrm{GL}_r(\mathrm{A})$ convenables et donc $\mathrm{PM} = \mathrm{P}'\mathrm{M}'$. Les matrices M et PM (resp. M$'$ et P$'$M$'$) définissant les mêmes sous-espaces linéaires de $\mathbb{A}^n_\mathrm{A}$, $\mathrm{L} = \mathrm{L}'$.

En général, l'existence de telles matrices n'est garantie qu'après localisation sur Spec(A). Toutefois, vu l'assertion 2, l'égalité $\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A}) = \mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A}')$ implique $\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A}[f^{-1}]) = \mathrm{L}'_\sigma(\mathrm{A}[f^{-1}])$ pour tout élément f de A donc $\mathrm{L} = \mathrm{L}'$ au-dessus de chaque ouvert d'un recouvrement convenable de Spec(A) ; comme deux sous-schémas fermés de $\mathbb{A}^n_\mathrm{A} = \mathbb{A}^n\times\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ coïncident si et seulement s'ils coïncident localement sur Spec(A), nous pouvons en conclure à l'égalité $\mathrm{L} = \mathrm{L}'$. □

Pour tout anneau A, $\mathrm{Loc}_{r,n}$ désigne le foncteur

$$\mathbf{Sch}\to\mathbf{Ens},\quad \mathrm{A}\mapsto\left\{(\mathrm{Q},q)\;\middle|\;\begin{array}{l}\mathrm{Q}\text{ est un A-module localement libre de rang }r\\ \text{et }q:\mathrm{A}^n\to\mathrm{Q}\text{ est un A-épimorphisme}\end{array}\right\}\Big/\text{isom.},$$

où (Q,q) et (Q',q') sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme A-linéaire $\varphi:\mathrm{Q}'\to\mathrm{Q}$ tel que $q' = q\circ\varphi$.

Proposition 26 — *Le morphisme de foncteurs* $\lambda:\mathrm{G}_{r,n}\to\mathrm{Loc}_{r,n}$ *défini pour tout anneau* A *par*

$$\lambda(\mathrm{A}):\mathrm{G}_{r,n}(\mathrm{A})\to\mathrm{Loc}_{r,n}(\mathrm{A}),\quad \mathrm{L}\mapsto\mathrm{A}^n/\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A}),$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Il faut vérifier que, pour tout anneau A, l'application $\lambda(\mathrm{A})$ est bijective.

Si L et L$'$ sont deux sous-espaces linéaires de $\mathbb{A}^n_\mathrm{A}$ tels que les A-modules $\mathrm{A}^n/\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A})$ et $\mathrm{A}^n/\mathrm{L}'_\sigma(\mathrm{A})$ soient isomorphes en tant que quotients de A^n, alors $\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A}) = \mathrm{L}'_\sigma(\mathrm{A})$ et donc $\mathrm{L} = \mathrm{L}'$ d'après l'assertion 3 du lemme précédent. L'application $\lambda(\mathrm{A})$ est donc injective.

Soit Q un A-module libre de rang r et soit $q:\mathrm{A}^n\to\mathrm{Q}$ un A-épimorphisme. Ayant choisi un isomorphisme A-linéaire $\varphi:\mathrm{Q}\simeq\mathrm{A}^r$, on obtient donc une application A-linéaire surjective $\mathrm{M} = \varphi\circ q:\mathrm{A}^n\to\mathrm{A}^r$. La matrice M est de rang r : il existe en effet une matrice $\mathrm{P}\in\mathrm{GL}_r(\mathrm{A})$ telle que $\mathrm{PM} = \big(\mathrm{I}_r|(*)\big)$ puis le pivot de Gauss sur les colonnes de M fournit alors une matrice $\mathrm{Q}\in\mathrm{GL}_n(\mathrm{A})$ telle que $\mathrm{PMQ} = \big(\mathrm{I}_r|(0)\big)$. Enfin, le sous-espace linéaire $\mathrm{L} = \mathrm{V}(\mathrm{M}\underline{\xi})$ de $\mathbb{A}^n_\mathrm{A}$ est envoyé sur (Q,q) par l'application $\lambda(\mathrm{A})$ puisque $\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A}) = \ker(q)$.

Considérons finalement un A-module localement libre de rang r et un A-épimorphisme $q:\mathrm{A}^n\to\mathrm{Q}$. Pour tout $f\in\mathrm{A}$ tel que $\mathrm{Q}\otimes_\mathrm{A}\mathrm{A}[f^{-1}] = \mathrm{Q}[f^{-1}]$ soit un $\mathrm{A}[f^{-1}]$-module libre, il existe un unique sous-espace linéaire L_f de $\mathbb{A}^n\times\mathrm{D}(f)$ tel que $\mathrm{L}_{f,\sigma}(\mathrm{A}[f^{-1}]) = \ker(q)[f^{-1}]$. Fixons un recouvrement de Spec(A) par des ouverts principaux $\mathrm{D}(f)$, $f\in\mathscr{F}$, tels que $\mathrm{Q}[f^{-1}]$ soit un $\mathrm{A}[f^{-1}]$-module libre. Les sous-espaces linéaires $Ł_f$ de $\mathbb{A}^n\times\mathrm{D}(f)$ se recollent en un sous-espace linéaire L de $\mathbb{A}^n\times\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ tel que $\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A})[f^{-1}] = \mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A}[f^{-1}]) = \ker(q)[f^{-1}]$ pour tout $f\in\mathscr{F}$, donc tel que $\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A}) = \ker(q)$; finalement, $q:\mathrm{A}^n\to\mathrm{Q}$ induit un isomorphisme $\mathrm{A}^n/\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A})\tilde{\to}\mathrm{Q}$ et (Q,q) est donc l'image de L par $\lambda(\mathrm{A})$. Ceci achève la démonstration de la proposition. □

(6.2) Étant donné un schéma S, nous avons défini les sous-espaces linéaires de codimension r de $\mathbb{A}^n\times\mathrm{S}$ comme les sous-schémas fermés de $\mathbb{A}^n\times\mathrm{S}$ que l'on peut, *localement* sur S, définir par r formes linéaires indépendantes. Même lorsque $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ est un schéma affine, il n'est en général pas possible d'exiger qu'un sous-espace linéaire soit globalement défini par r formes linéaires indépendantes et il est nécessaire d'autoriser à se localiser sur Spec(A) ; c'est ce que nous allons voir maintenant.

Proposition 27 — *Soit* A *un anneau. Les deux conditions suivantes sont équivalentes pour tout sous-espace linéaire* L *de* $\mathbb{A}^n_\mathrm{A}$ *de codimension r :*

1. *il existe une matrice* $\mathrm{M}\in\mathrm{M}_{r,n}(\mathrm{A})$ *de rang r définissant* L, *i.e. telle que* $\mathrm{L} = \mathrm{V}(\mathrm{M}\underline{\xi})$ *;*
2. *le* A*-module* $\mathrm{A}^n/\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A})$ *est libre.*

Démonstration. Si le A-module $\mathrm{A}^n/\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A})$ est libre, $\mathrm{L} = \mathrm{V}(\mathrm{M}\underline{\xi})$ avec $\mathrm{M}\in\mathrm{M}_{rn}(\mathrm{A})$ la matrice de rang r associée au choix d'un isomorphisme A-linéaire $\mathrm{A}^n/\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A})\simeq\mathrm{A}^r$ (cf. la démonstration de la proposition précédente).

Réciproquement, si $\mathrm{L} = \mathrm{V}(\mathrm{M}\underline{\xi})$ avec $\mathrm{M}\in\mathrm{M}_{rn}(\mathrm{A})$ de rang r, alors l'application A-linéaire $\mathrm{M}:\mathrm{A}^n\to\mathrm{A}^r$ induit un isomorphisme A-linéaire $\mathrm{A}^n/\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A})\simeq\mathrm{A}^r$ et le A-module $\mathrm{A}^n/\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A})$ est donc libre. □

Il est maintenant aisé de donner un exemple d'anneau A et de sous-espace linéaire L de $\mathbb{A}^n_{\mathrm{A}}$ ne pouvant s'écrire sous la forme $\mathrm{V}(\mathrm{M}\underline{\xi})$ avec une matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_{r,n}(\mathrm{A})$ de rang r : il suffit d'exhiber un anneau A et un quotient localement libre mais non libre de rang r du A-module A^n.

Voici un exemple avec $n = 2$ et $r = 1$. On désigne par ϑ une racine carrée de -5 et on pose $\mathrm{A} = \mathbb{Z}[\vartheta]$; on rappelle que la norme d'un élément $a = u + \vartheta v$ de A est le nombre entier naturel $\mathrm{N}(a) = u^2 + 5v^2$. L'idéal $\mathfrak{a}$ de A engendré par 2 et $1+\vartheta$ n'est pas principal car il existerait sinon un élément $a + b\vartheta$ de A de norme $\mathrm{N}(\mathfrak{a}) = \mathrm{pgcd}(\mathrm{N}(2), \mathrm{N}(1+\vartheta)) = \mathrm{pgcd}(4,6) = 2$, ce qui n'est manifestement pas le cas. On a évidemment $\mathfrak{a}[2^{-1}] = \mathrm{A}[2^{-1}]$ et, en vertu de la relation $2.3 = (1+\vartheta)(1-\vartheta)$, $\mathfrak{a}[3^{-1}] = (1+\vartheta)\mathrm{A}[3^{-1}]$; comme les ouverts principaux $\mathrm{D}(2)$ et $\mathrm{D}(3)$ recouvrent $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, ceci montre que le A-module $\mathfrak{a}$ est localement libre de rang un. Par définition, $\mathfrak{a}$ est l'image de l'application A-linéaire $\mathrm{A}^2 \to \mathrm{A},\ (\xi_1, \xi_2) \mapsto 2\xi_1 + (1+\vartheta)\xi_2$. Le sous-schéma fermé $\mathrm{L}_\sigma = \mathrm{V}(2\xi_1 + (1+\vartheta)\xi_2, 3\xi_1 + (1-\vartheta)\xi_2)$ de $\mathbb{A}^2_{\mathrm{A}}$ est un sous-espace linéaire de codimension 1 tel que $\mathrm{A}^2/\mathrm{L}_\sigma(\mathrm{A}) \simeq \mathfrak{a}$; en vertu de la proposition précédente, il ne peut donc pas se définir par une seule équation linéaire.

Remarques 28. 1. Si A est un anneau *principal*, tout A-module localement libre de type fini est libre. Il en découle que l'ensemble $\mathrm{G}_{r,n}(\mathrm{A})$ des A-points du schéma $\mathrm{Grass}_{r,n}$ s'identifie naturellement aux quotients libres de rang r du A-module A^n modulo isomorphisme, c'est-à-dire au quotient de l'ensemble des matrices $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_{r,n}(\mathrm{A})$ de rang r par l'action naturelle du groupe $\mathrm{GL}_r(\mathrm{A})$. En particulier : une matrice de rang un $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_{1,\mathrm{N}+1}(\mathrm{A})$ est la même chose qu'un $(\mathrm{N}+1)$-uplet d'éléments de A engendrant A et l'application $\mathrm{A}^{\mathrm{N}+1} \to \mathrm{G}_{r,n}(\mathrm{A}),\ (a_0, \ldots, a_\mathrm{N}) \mapsto \mathrm{V}(a_0\xi_0 + \ldots + a_\mathrm{N}\xi_\mathrm{N})$ induit donc une bijection
$$\mathrm{E}_\mathrm{N}(\mathrm{A})/\mathrm{A}^\times \tilde{\to} \mathbb{P}^\mathrm{N}(\mathrm{A}),$$
où $\mathrm{E}_\mathrm{N}(\mathrm{A})$ désigne l'ensemble des $(\mathrm{N}+1)$-uplets d'éléments de A engendrant A.

Exemple : $\mathbb{P}^\mathrm{N}(\mathbb{Z})$ est le quotient de l'ensemble des $(\mathrm{N}+1)$-uplets d'entiers premier entre eux par l'action diagonale de $\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$.

2. Mentionnons également le fait suivant : quels que soient le corps k et l'entier naturel $n \geq 0$, tout module localement libre de type fini sur l'anneau de polynômes $k[t_1, \ldots, t_n]$ est libre (Théorème de Quillen-Suslin, 1976).

(6.2) Le morphisme de Plücker [...].

Bibliographie

[EGA] A. GROTHENDIECK, *Éléments de Géométrie algébrique*, Chapitres I-IV, rédigés avec la collaboration de J. DIEUDONNÉ, Publ. Math. Inst. Hautes Études Scientifiques, 1960-1967

[EGAb] A. GROTHENDIECK, J. DIEUDONNÉ, *Éléments de Géométrie Algébrique I*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band 166, Springer-Verlag (1971)

[1] S. MACLANE, *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics 5, Springer-Verlag (1971)