Université Lyon 1
L3 Mathématiques

Corrigé du Partiel de Géométrie - Avril 2006

Exercice

1) a) $h(m) = I + \rho\overrightarrow{Im} \Rightarrow h(m) \in (I\, m)$ i.e. $I \in (m\, h(m))$.

b) $L_{h\circ h'} = L_h \circ L_{h'} = \rho\rho' Id_E$. Puisque $\rho\rho' \neq 1$, $h \circ h'$ est une homothétie.

On a $I' \neq I''$. En effet si $I' = I''$ on aurait $I' = h \circ h'(I') = h(I')$ et donc $I = I'$.

Par a) $I'' \in (I'\,(h \circ h')(I')) = (I'\, h(I')) = (I\, I')$ (puisque $I \in (I'\, h(I'))$).

2) a) On a

$$(\overrightarrow{h(c)h(m)} \mid \overrightarrow{h(c)h(m)}) = \rho^2(\overrightarrow{cm} \mid \overrightarrow{cm})$$

Dès lors $m \in C \Rightarrow h(m)$ appartient au cercle C' de centre $h(c)$ et de rayon $\mid \rho \mid R$ i.e. $h(C) \subset C'$.

De même $h^{-1}(C') \subset C$ ce qui implique $C' \subset h(C)$. D'où l'égalité

$$h(C) = C'$$

b) Supposons $h(C) = C'$. Par 2 a) on doit avoir $c' = h(c)$ et $\rho^2 = (\frac{R'}{R})^2$. Il y a deux possibilités: $h^{\pm}(c) = c'$ et $\rho^{\pm} = \pm\frac{R'}{R}$.

c) Voir la construction sur la figure annexe. Voici la justification: $h^{\pm}(D)$ est une droite parallèle à D passant par c'. Si $m \in D \cap C$ alors $h^{\pm}(m) \in h^{\pm}(D) \cap C' = \{m_+, m_-\}$. Puisque $c \neq I^{\pm}$ on a $I^{\pm} \in (c\, h(c)) = (c\, c')$ et puisque $m \neq I^{\pm}$ on a aussi $I^{\pm} \in (m\, h^{\pm}(m)) = (m\, m_{\pm})$. Les droites (cc') et $(mm_{\pm})$ se coupent donc en $I^{\pm}$.

3) a) voir figure annexe et 2 c)

b) $h_2^+ \circ h_1^- \circ h_3^-$ est une homothétie ou une translation. On a

$$L_{h_2^+ \circ h_1^- \circ h_3^-} = \frac{R_1}{R_3} \cdot \frac{-R_3}{R_2} \cdot \frac{-R_2}{R_1} Id_E = Id_E.$$

C'est donc une translation. Mais $(h_2^+ \circ h_1^- \circ h_3^-)(c_1) = c_1$. Le vecteur de translation est donc nul et

$$h_2^+ \circ h_1^- \circ h_3^- = Id_{\mathcal{E}}$$

c) On sait que si h est une homothétie de centre I et de rapport ρ, h^{-1} est l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{\rho}$. Par 3) b) on a

$$h_2^+ = {h_3^-}^{-1} \circ {h_1^-}^{-1}.$$

Par 1) b) il vient $I_2^+ \in (I_3^-\, I_1^-)$.

d) Argument identique en utilisant $h_2^+ \circ h_1^+ \circ h_3^+$.

Problème

Partie A

1) C'est une question de cours. Je répète donc l'argument: Par définition

$$s = \begin{pmatrix} x_0 & \dots & x_m \\ a_0 & \dots & a_m \end{pmatrix} = q + \sum_{0 \le i \le m} a_i \overrightarrow{q x_i}$$

quel que soit $q \in \mathcal{E}$. En particulier en choisissant $q = x_0$, on a

$$s = x_0 + \sum_{1 \le i \le m} a_i \overrightarrow{x_0 x_i}$$

D'où

$$\begin{aligned} f(s) &= f(x_0) + \sum_{1 \le i \le m} a_i L_f(\overrightarrow{x_0 x_i}) \\ &= f(x_0) + \sum_{1 \le i \le m} a_i \overrightarrow{f(x_0) f(x_i)} \\ &= \begin{pmatrix} f(x_0) & \dots & f(x_m) \\ a_0 & \dots & a_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i.e.

$$f[x_0, \dots, x_m] = [f(x_0), \dots, f(x_m)].$$

2) a) Il s'agit d'utiliser la relation de Chasles et la bilinéarité du produit scalaire: Pour $0 < i < j \le n$,

$$\begin{aligned} l^2 &= (\overrightarrow{z_i z_j} \mid \overrightarrow{z_i z_j}) \\ &= (\overrightarrow{z_i z_0} + \overrightarrow{z_0 z_j} \mid \overrightarrow{z_i z_0} + \overrightarrow{z_0 z_j}) \\ &= (\overrightarrow{z_0 z_i} \mid \overrightarrow{z_0 z_i}) + (\overrightarrow{z_0 z_j} \mid \overrightarrow{z_0 z_j}) + 2(\overrightarrow{z_i z_0} \mid \overrightarrow{z_0 z_j}) \\ &= l^2 + l^2 - 2(\overrightarrow{z_0 z_j} \mid \overrightarrow{z_0 z_j}) \end{aligned}$$

Dès lors

$$(\overrightarrow{z_0 z_i} \mid \overrightarrow{z_0 z_j}) = \frac{l^2}{2}.$$

b) Supposons

$$\sum_i \gamma_i \overrightarrow{z_0 z_i} = \vec{0}$$

On a donc pour chaque $1 \le j \le n$

$$\sum_i \gamma_i (\overrightarrow{z_0 z_i} \mid \overrightarrow{z_0 z_j}) = 0$$

C'est un système de n équations linéaires pour $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Explicitement

$$\begin{aligned}
&l^2\gamma_1 + \frac{l^2}{2}\gamma_2 + \cdots + \frac{l^2}{2}\gamma_n = 0\\
&\frac{l^2}{2}\gamma_1 + l^2\gamma_2 + \frac{l^2}{2}\gamma_3 + \cdots = 0\\
&\text{etc.}\\
&\frac{l^2}{2}\gamma_1 + \cdots + \frac{l^2}{2}\gamma_{n-1} + l^2\gamma_n = 0
\end{aligned}$$

dont l'unique solution (obtenue par soustraction de paires d'équations) est $\gamma_i = 0, \forall 1 \leq i \leq n$.

3) C'est une question de cours. Je répète donc: Une application affine f est déterminée par l'image du point z_0 et par L_f.

Ici $f(z_0) = z'_0$. D'autre part $f(z_i) = z'_i$ implique

$$L_f(\overrightarrow{z_0 z_i}) = \overrightarrow{f(z_0)f(z_i)} = \overrightarrow{z'_0 z'_i}$$

ce qui détermine L_f puisque $(z_0, \dots, z_n)$ est une base affine.

Enfin, f est bijective ssi L_f est bijective ssi l'image d'une base vectorielle par L_f est une base vectorielle.

Partie B

1 a) Si $b_{j,2} = b_{j,3} = 0$ on a $y_j = x_1$!

b) On procède par l'absurde en supposant

$$\begin{aligned}
x &= \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}\\
&= y_1 + a_2\overrightarrow{y_1y_2} + a_3\overrightarrow{y_1y_3}\\
&= x_1 + b_{1,2}\overrightarrow{x_1x_2} + b_{1,3}\overrightarrow{x_1x_3} + a_2\overrightarrow{y_1y_2} + a_3\overrightarrow{y_1y_3}\\
&= x_1 + (b_{1,2}(1 - a_2 - a_3) + a_2b_{2,2} + a_3b_{3,2})\overrightarrow{x_1x_2}\\
&\qquad + (b_{1,3}(1 - a_2 - a_3) + a_2b_{2,3} + a_3b_{3,3})\overrightarrow{x_1x_3}
\end{aligned}$$

Remarquer que ce calcul dit simplement que le barycentre est associatif.

Puisque (x_1, x_2, x_3) est une base affine et $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ cette égalité équivaut à

$$\begin{aligned}
a_1b_{1,2} + a_2b_{2,2} + a_3b_{3,2} &= 0\\
a_1b_{1,3} + a_2b_{2,3} + a_3b_{3,3} &= 0
\end{aligned}$$

Dans chaque égalité chacun des 3 termes est positif dès lors les six termes doivent chacuns s'annuler. Puisque, pour chaque j l'un au moins des $b_{j,2}, b_{j,3}$ est non nul, on a $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ce qui est absurde.

2) On a $f[z_0, \ldots, z_n] = [f(z_0), \ldots, f(z_n)] = [z_0, \ldots, z_n]$. Si pour un certain indice i, $f(z_i) \notin \{z_0, \ldots, z_n\}$ l'un des sommets disons z_k ne figurerait pas dans la liste $\{f(z_0), \ldots, f(z_n)\}$ i.e.

$$\forall l, \quad f(z_l) \in [z_0, \ldots, z_n] \setminus \{z_k\}$$

Par 1) on aurait $z_k \notin [f(z_0), \ldots, f(z_n)] = [z_0, \ldots, z_n]$ ce qui est aburde.

3) Si f préserve l'enveloppe convexe, elle préserve l'ensemble des sommets par 2). Elle se restreint donc en une bijection des sommets $\{z_0, \ldots, z_n\}$. Si les restrictions de f et de f' sur l'ensemble des sommets sont égales alors $f(z_i) = f'(z_i)\, \forall i$ dès lors $f = f'$ puisque les sommets forment une base affine. L'application de restriction est donc injective. Elle est aussi surjective puisque toute permutation $z_i \mapsto z_{\sigma(i)}$ définit une unique bijection affine f via $f(z_i) = z_{\sigma(i)}$ qui préserve l'enveloppe convexe $[z_0, \ldots, z_n]$.
En conclusion L'application de restriction établit une bijection (en fait un isomorphisme de groupe) entre $G_{[P]}$ et S_{n+1}.

4) Il s'agit du triangle équilatéral. Le groupe $G_{[P]}$ a 6 éléments: l'identité, deux rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ et trois symétries par rapport à des droites.

Partie C

a) et b) Voici la figure et les 3 plans P_1, P_2, P_3 sur laquelle on peut voir que $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \{(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}})\}$ (le centre du cube).

Pour la démo, on peut par exemple écrire les équations cartésiennes des plans dans le repère canonique $(\vec{0}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$P_1 : x = z, \quad P_2 : y + z = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad P_3 : x = y$$

et l'intersection est donnée par $x = y = z = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

c) Définir f en posant $f(z_i) = z_i', 0 \leq i \leq 3$. Il suffit de montrer que $f(P_i) = P_i'$, $1 \leq i \leq 3$. Pour ce faire observer que $f(m_i) = m_i'$ puisque f conserve les barycentres. Il reste à vérifier que

$$L_f \overrightarrow{P_i} = \overrightarrow{P_i'}$$

où les flèches désignent les directions des espaces affines P_i et P_i'. Ceci résulte du fait que les produits scalaires entres les vecteurs $\overrightarrow{z_0 z_i}$ et les vecteurs $\overrightarrow{z_0' z_i'}$ sont les mêmes.