Espaces et applications affines

Convention : étant donné un espace affine X *de direction vectorielle* $\mathrm{V} = \overrightarrow{\mathrm{X}}$*, les* vecteurs *seront notés en gras :* $\mathbf{v} \in \mathrm{V}$*. Si* $p,\ q$ *sont deux points de* X*, on notera* **pq** *l'unique vecteur de* V *tel que* $q = p + \mathbf{pq}$.

Exercice 2. —

Chaque droite D de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine et non contenue dans le plan P_0 coupe le plan P_1 en un unique point $\pi(\mathrm{D})$ et l'application $\pi : \mathbf{P}^* \to \mathrm{P}_1$ ainsi définie est manifestement une bijection. Le plan P_1 est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ de direction P_0 ; la bijection π permet d'en déduire une structure d'espace affine sur $\mathbf{P}^*$, que l'on peut décrire ainsi : si $\mathbf{v} \in \mathrm{P}_0$ et si $\mathrm{D} \in \mathbf{P}^*$ est la droite passant par O et le point $\mathrm{M} \in \mathrm{P}_1$, $\mathrm{D} + \mathbf{v}$ est la droite passant par O et le point $\mathrm{M} + \mathbf{v}$.

Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ et soit P^- le point $(0,0,-1)$. L'application associant à tout point Q de $\mathrm{S} - \{\mathrm{P}_-\}$ l'unique point intersection $p(\mathrm{Q})$ de la droite $(\mathrm{P}^-\mathrm{Q})$ avec $\mathrm{S} - \{\mathrm{P}^-\}$ réalise une bijection de $\mathrm{S} - \{\mathrm{P}^-\}$ sur P_1. L'ensemble $\mathbf{P}^*$ s'identifie donc naturellement au complémentaire d'un point sur la sphère S.

Exercice 3. —

a) Supposons que f admette un point fixe $o \in \mathrm{X}$. Quel que soit le point $p \in \mathrm{X}$, $f(p) = f(o) + \mathrm{L}_f(\mathbf{op}) = o + \mathrm{L}_f(\mathbf{op})$ et $f(p) = p$ si et seulement si $\mathrm{L}_f(\mathbf{op}) = \mathbf{op}$. L'application

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{L}_f - \mathrm{id}_\mathrm{V}) \to \mathrm{X}_f, \quad \mathbf{v} \mapsto o + \mathbf{v}$$

est donc une bijection et X_f est ainsi un sous-espace affine de X, de direction $\mathrm{Ker}(\mathrm{L}_f - \mathrm{id}_\mathrm{V})$.

b) Soit D une droite affine et soit $f : \mathrm{D} \to \mathrm{D}$ une application affine. Si f admet au moins deux points fixes, il découle de la question précédente que le lieu D_f des points fixes de f est un sous-espace affine de D de dimension supérieure ou égale à un ; comme D est de dimension un, $\mathrm{D}_f = \mathrm{D}$ et f est donc l'identité.

c)

Les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}'$ n'étant pas colinéaires, ils constituent une base de l'espace vectoriel $\mathrm{V} = \overrightarrow{\mathrm{P}}$ et il existe une unique application linéaire de V dans V telle que $\mathrm{L}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ et $\mathrm{L}(\mathbf{u}') = 0$. L'application $f : \mathrm{P} \to \mathrm{P}$ étant définie par la formule

$$f(\mathrm{M}) = \mathrm{O} + \mathrm{L}(\mathbf{OM})$$

pour tout point M de X, il s'agit bien d'une application affine dont L est l'application linéaire associée.

Le noyau de l'application linéaire L est la droite vectorielle $\mathbb{R}\mathbf{u}'$; comme $f(\mathrm{O}) = \mathrm{O}$, il découle de la question a) que l'ensemble des points fixes de p est le sous-espace affine $\mathrm{O} + \mathbb{R}\mathbf{u}'$, c'est-à-dire la droite affine passant par

O et de vecteur directeur $\mathbf{u}'$. On constate sur cet exemple qu'une application affine de P dans P peut avoir deux points fixes sans pour autant être l'identité ; comme P est de dimension *deux*, le critère devient : une application affine de P dans P est l'identité si et seulement si elle admet trois points fixes *non alignés* (c'est-à-dire non contenus dans un sous-espace affine strict).

d)

On vérifie immédiatement que $h(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$ et $h(\mathrm{B}) = \mathrm{A}$, de sorte que $f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$ et $f(\mathrm{B}) = \mathrm{B}$. Comme f est une application affine, f transforme la droite (AB) en la droite $(f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})) = (\mathrm{AB})$; la restriction de f à la droite (AB) est par conséquent une application affine de (AB) dans (AB) et, cette dernière fixant les deux points distincts A et B, c'est l'identité de (AB).

Soit h' la projection sur la droite (AB) parallèlement à la droite (AC). On vérifie immédiatement que $h(\mathrm{C}) = \mathrm{B}$ et $f(\mathrm{C}) = \mathrm{A}$, de sorte que $f(\mathrm{A}) = h'(\mathrm{A})$, $f(\mathrm{B}) = h'(\mathrm{B})$ et $f(\mathrm{C}) = h'(\mathrm{C})$. On en conclut tout de suite à l'égalité $f = h'$ puisque les points non alignés A, B et C constituent une base affine du plan P.

Exercice 4. — Soit X un espace affine réel de direction V et soit $\sigma : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ une application affine.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathrm{X}}$;

(ii) σ admet un point fixe et $\mathrm{L}_\sigma^2 = \mathrm{L}_\sigma \circ \mathrm{L}_\sigma = \mathrm{id}_{\mathrm{V}}$.

L'implication $(ii) \Longrightarrow (i)$ est immédiate : étant donné un point $o \in \mathrm{X}$ tel que $\sigma(o) = o$,

$$\begin{array}{rcl} \sigma^2(p) & = & \sigma^2(o) + \mathrm{L}_{\sigma^2}(\mathbf{op}) \\ & = & o + \mathrm{L}_\sigma^2(\mathbf{op}) \\ & = & o + \mathbf{op} = p \end{array}$$

pour tout point p de X et donc $\sigma^2 = \mathrm{id}_{\mathrm{X}}$.

Réciproquement, si $\sigma^2 = \mathrm{id}_{\mathrm{X}}$, alors $\mathrm{L}_\sigma \circ \mathrm{L}_\sigma = \mathrm{L}_{\sigma\circ\sigma} = \mathrm{id}_{\mathrm{V}}$ et il reste à vérifier que σ admet un point fixe. Étant donné un point m de X, σ transforme le segment $[m\sigma(m)]$ en lui-même puisque $\sigma([m\sigma(m)]) = [\sigma(m)\sigma^2(m)] = [\sigma(m)m] = [m\sigma(m)]$; σ fixe alors nécessairement le milieu $m' = m + \frac{1}{2}\mathbf{m}\sigma(\mathbf{m})$ de ce segment car

$$\begin{array}{rcl} \sigma(m') & = & \sigma(m) + \dfrac{1}{2}\sigma(\mathbf{m})\sigma^{\mathbf{2}}(\mathbf{m}) \\ & = & \sigma(m) + \dfrac{1}{2}\sigma(\mathbf{m})\mathbf{m} \\ & = & m + \mathbf{m}\sigma(\mathbf{m}) - \dfrac{1}{2}\mathbf{m}\sigma(\mathbf{m}) = m + \dfrac{1}{2}\mathbf{m}\sigma(\mathbf{m}) = m'. \end{array}$$

L'équivalence des deux conditions qui précèdent ramène la classification des symétries affines σ de X à la classification des symétries vectorielles L_σ de V esquissée dans l'exercice 6 de la première feuille d'exercices : l'espace vectoriel V est la somme directe de deux sous-espaces L_σ-stables $\mathrm{V}_+ = \mathrm{Ker}(\mathrm{L}_\sigma - \mathrm{id}_{\mathrm{V}})$ et $\mathrm{V}_- = \mathrm{Ker}(\mathrm{L}_\sigma + \mathrm{id}_{\mathrm{V}})$ [(1)]. Vu la première question de l'exercice 3, l'ensemble X_σ des points fixes de σ est un sous-espace affine de direction V_+, l'application linéaire L_σ associe à un vecteur $\mathbf{v} = \mathbf{v}_+ + \mathbf{v}_-$, $\mathbf{v}_+ \in \mathrm{V}_+$, $\mathbf{v}_- \in \mathrm{V}-$, le vecteur $\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-$ et σ est la symétrie par rapport au sous-espace affine X_σ parallèlement à V_- : quel que soit le point p de X, $\sigma(p)$ est le symétrique de p par rapport au point p_+, projeté de p sur X_σ parallèlement à V_- ; de manière équivalente, $\sigma(p)$ est l'unique point de X satisfaisant aux deux conditions suivantes :

– $p + \frac{1}{2}\mathbf{p}\sigma(\mathbf{p}) \in \mathrm{X}_\sigma$;
– $\mathbf{p}\sigma(\mathbf{p}) \in \mathrm{V}_-$.

[(1)] L'existence de cette décomposition découle trivialement de la diagonalisabilité de tout endomorphisme v de V tel que $v^2 = \mathrm{id}_{\mathrm{V}}$

Classification des symétries en dimension 2. Supposons que X soit de dimension 2 et soit σ une symétrie de X.

– Si X_σ est de dimension 0, X_σ est réduit à un point o et σ est la symétrie de centre o :

$$\sigma(p) = o - \mathbf{op}.$$

– Si X_σ est de dimension 1, $D = X_\sigma$ est une droite et σ est la symétrie d'axe D parallèlement à la droite vectorielle $\mathrm{Ker}(L_\sigma + \mathrm{id}_V)$.
– Si X_σ est de dimension 2, $\sigma = \mathrm{id}_X$.

Classification des symétries en dimension 3. Supposons que X soit de dimension 3 et soit σ une symétrie de X.

– Si X_σ est de dimension 0, X_σ est réduit à un point o et σ est la symétrie de centre o :

$$\sigma(p) = o - \mathbf{op}.$$

– Si X_σ est de dimension 1, X_σ est une droite et σ est la symétrie d'axe X_σ parallèlement au plan vectoriel $\mathrm{Ker}(L_\sigma + \mathrm{id}_V)$.
– Si X_σ est de dimension 2, X_σ est un plan et σ est la symétrie par rapport à X_σ parallèlement à la droite vectorielle $\mathrm{Ker}(L_\sigma + \mathrm{id}_V)$.
– Si X_σ est de dimension 3, $\sigma = \mathrm{id}_X$.

Exercice 5 — Soit X un espace affine réel et soient $p_1, \ldots, p_n$ n points distincts de X. Il s'agit de savoir si l'on peut construire un polygone $(m_1, \ldots, m_n)$ tel que les points $p_1, \ldots, p_n$ soient les milieux de ses côtés.

Commençons par une observation prolongeant l'exercice précédent. *Une application affine* $\sigma : X \to X$ *est une symétrie centrale si et seulement si* $L_\sigma = -\mathrm{id}_V$.

Si σ est une symétrie centrale, $\dim X_\sigma = 0$, la direction $\mathrm{Ker}(L_\sigma - \mathrm{id}_V)$ de X_σ est le sous-espace nul de V et donc $V = \mathrm{Ker}(L_\sigma + \mathrm{id}_V)$, i.e. $L_\sigma = -\mathrm{id}_V$. Réciproquement, il s'agit de justifier que toute application affine σ telle que $L_\sigma = -\mathrm{id}_V$ admet un point fixe. Quel que soit en effet le point o de X, le milieu $o' = o + \frac{1}{2}\mathbf{o}\sigma(\mathbf{o})$ du segment $[o\sigma(o)]$ est un point fixe de σ car

$$\sigma(o') = \sigma(o) + \frac{1}{2}L_\sigma(\mathbf{o}\sigma(\mathbf{o})) = \sigma(o) - \frac{1}{2}\mathbf{o}\sigma(\mathbf{o}) = \sigma(o) - \mathbf{o}\sigma(\mathbf{o}) + \frac{1}{2}\mathbf{o}\sigma(\mathbf{o}) = \sigma(o) + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{oo} + \frac{1}{2}\mathbf{o}\sigma(\mathbf{o}) = o + \frac{1}{2}\mathbf{o}\sigma(\mathbf{o}).$$

Conséquence immédiate : comme $L_{f\circ g} = L_f \circ L_g$ pour toutes applications affines $f,\ g : X \to X$, la composée d'un nombre *impaire* de symétries centrales est encore une symétrie centrale.

La composée d'un nombre *pair* de symétries centrales est une application affine d'application linéaire associée id_V, c'est-à-dire une translation.

Venons-en au problème qui nous intéresse. Soit σ_i la symétrie de centre p_i $(1 \le i \le n)$. Étant donné un point π_1 dans X, on définit des points $\pi_2, \ldots, \pi_n$ comme suit : pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\pi_{i+1} = \sigma_i(\pi_i)$. Par construction, p_i est le milieu du segment $[\pi_i\pi_{i+1}]$ $(1 \le i \le n-1)$ et les deux assertions suivantes sont équivalentes :

– il existe des points $m_1, \ldots,\ m_n$ tels que p_i soit le milieu de $[m_i m_{i+1}]$ $(1 \le i \le n-1)$ et p_n soit le milieu du segment $[m_n m_1]$;
– il existe un point $\pi_1 \in X$ tel que $\sigma_n \circ \ldots \circ \sigma_1(\pi_1) = \pi_1$.

En effet, la seconde condition est équivalente au fait que p_n soit le milieu du segment $[\pi_n\pi_1]$.

Lorsque n est impair, l'application affine $\sigma_n \circ \ldots \circ \sigma_1$ est une symétrie centrale en vertu de la discussion ci-dessus ; elle admet donc un unique point fixe m_1 et les points $m_1,\ \sigma_1(m_1), \ldots, \sigma_{n-1} \circ \ldots \circ \sigma_1(m_1)$ constituent l'unique solution au problème envisagé.

Lorsque n est pair, l'application affine $\sigma_n \circ \ldots \circ \sigma_1$ est une translation et elle admet un point fixe si et seulement si c'est l'identité, c'est-à-dire si et seulement si $\sigma_n = \sigma_{n-1} \circ \ldots \circ \sigma_1$ (car $\sigma_n^2 = \mathrm{id}_{\mathrm{X}}$). Il en découle que le problème considéré admet une solution si et seulement si $\sigma_n = \sigma_{n-1} \circ \ldots \circ \sigma_1$, auquel cas il existe en réalité une infinité de solutions : quel que soit en effet le point m de X, les points $m,\ \sigma_1(m), \ldots, \sigma_{n-1} \circ \ldots \circ \sigma_1(m)$ définissent un polygone dont les p_i sont les milieux des côtés.

Il convient d'observer que la condition $\sigma_n = \sigma_{n-1} \circ \ldots \circ \sigma_1$ équivaut à la condition $\sigma_{n-1} \circ \ldots \circ \sigma_1(p_n) = p_n$. En effet, comme n est pair, $\sigma_{n-1} \circ \ldots \circ \sigma_1$ est une symétrie centrale et il s'agit de σ_n si et seulement si le point p_n est fixe. Nous en déduisons une méthode permettant d'obtenir une configuration $\{p_1, \ldots, p_n\}$ pour laquelle le problème étudié ait une solution : il suffit de fixer les points $p_1,\ \ldots,\ p_{n-1}$ et de prendre pour p_n le centre de la symétrie centrale $\sigma_{n-1} \circ \ldots \circ \sigma_1$.

Illustrations.

Cas $n = 3$. Quels que soient les points distincts $p_1,\ p_2,\ p_3$, il existe un unique triangle $(m_1,\ m_2,\ m_3)$ dont $p_1,\ p_2,\ p_3$ soient les milieux des côtés. Pour le construire, il suffit de déterminer le centre m_1 de la symétrie centrale $\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ — qui n'est autre que le milieu du segment $[p_1 \sigma_3 \circ \sigma_2(p_1)]$ — et de poser $m_2 = \sigma_1(m_1)$, $m_3 = \sigma_2(m_1)$.

Cas $n = 4$. Quatre points distincts $p_1,\ p_2,\ p_3$ et p_4 sont les milieux des côtés d'un quadrilatère si et seulement si p_4 est le centre de la symétrie $\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$. Posons $p_1' = \sigma_2(p_1)$ et $p_1'' = \sigma_3(p_1')$; le centre de $\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ est le milieu du segment $[p_1 p_1'']$. Puisque p_3 est, par construction, le milieu du segment $[p_1' p_1'']$, les droites $(p_1 p_2)$ et $(p_3 p_1'')$ sont parallèles en vertu du théorème de Thalès. En utilisant le fait que p_2 est le milieu du segment $[p_1 p_1']$, il découle également du théorème de Thalès que les droites $(p_2 p_3)$ et $(p_1 p_1'')$ sont parallèles et nous en concluons que p_4 est le centre de la symétrie $\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ si et seulement si le quadrilatère (p_1, p_2, p_3, p_4) est un parallélogramme.

Exercice 6. — Soit X un espace affine réel de dimension finie et soit V sa direction.

1. Une application affine $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ transforme toute droite en une droite parallèle si et seulement si l'application linéaire associée L_f est une *homothétie* de rapport non nul.

– Supposons $f(\mathrm{D}) \parallel \mathrm{D}$ pour toute droite D de X. Fixons un point o dans X et une base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ de V. Comme $f(o+\mathbb{R}\mathbf{v}) = f(o)+\mathbb{R}\mathrm{L}_f(\mathbf{v})$ pour tout vecteur non nul $\mathbf{v} \in \mathrm{V}$, il existe des nombres réels non nuls $\rho_1, \ldots, \rho_n$ et ρ tels que

$$\mathrm{L}_f(\mathbf{e}_1) = \rho_1\mathbf{e}_1, \ \ldots, \ \mathrm{L}_f(\mathbf{e}_n) = \rho_n\mathbf{e}_n, \ \mathrm{L}_f(\mathbf{e}_1+\ldots+\mathbf{e}_n) = \rho(\mathbf{e}_1+\ldots+\mathbf{e}_n) \ ;$$

on a alors

$$\rho_1\mathbf{e}_1+\ldots+\rho_n\mathbf{e}_n = \rho(\mathbf{e}_1+\ldots+\mathbf{e}_n),$$

donc $\rho_1 = \ldots = \rho_n = \rho$ et finalement $\mathrm{L}_f = \rho\mathrm{id}_\mathrm{V}$.

– Supposons réciproquement que $\mathrm{L}_f = \rho\mathrm{id}_\mathrm{V}$ soit une homothétie de rapport $\rho \neq 0$. Toute droite D de X est de la forme $\mathrm{D} = o+\mathbb{R}\mathbf{v}$ avec $o \in \mathrm{X}$, $\mathbf{v} \in \mathrm{V}$ et $f(\mathrm{D}) = f(o)+\mathbb{R}\mathrm{L}_f(\mathbf{v}) = f(o)+\mathbb{R}\rho\mathbf{v} = f(o)+\mathbb{R}\mathbf{v}$ est une droite parallèle à D.

Remarque : l'argument utilisé dans la première partie de la démonstration ci-dessus prouve qu'une bijection affine $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ *transforme toute droite en une droite parallèle si et seulement s'il existe une base affine* $\{p_0, \ldots, p_n\}$ *de* X *telle que* $f(p_ip_j) \parallel (p_ip_j)$ *pour tous* $i \neq j$.

2. L'ensemble $\mathscr{H}$ des bijections affines f de X telles que L_f soit une homothétie de rapport non nul est un sous-groupe du groupe affine GA(X) car $\mathrm{L}_{f\circ g} = \mathrm{L}_f \circ \mathrm{L}_g$ et $\mathrm{L}_f^{-1} = \mathrm{L}_{f^{-1}}$ pour tous $f, g \in \mathrm{GA(X)}$. Noter que $\mathscr{H}$ contient les translations, qui sont les bijections affines f telles que $\mathrm{L}_f = \mathrm{id}_\mathrm{V}$.

3. Supposons que X soit de dimension 1 ; comme tout automorphisme d'un espace vectoriel de dimension 1 est une homothétie, $\mathscr{H} = \mathrm{GA(X)}$.

Description explicite : si o est un point de X et $\mathbf{e}$ est un vecteur non nul de V, tout point p de X s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $p = o+\lambda\mathbf{e}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et

$$f(p) = f(o)+\rho\lambda\mathbf{e} = o+(\lambda_0+\rho\lambda)\mathbf{e}$$

pour toute bijection affine $f \in \mathscr{H}$ telle que $\mathrm{L}_f = \rho\mathrm{id}_\mathrm{V}$, $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$.

4. Soit $h \in \mathscr{H} - \{\mathrm{id}_\mathrm{X}\}$ et soit $\rho \in \mathbb{R}-\{0\}$ tel que $\mathrm{L}_h = \rho\mathrm{id}_\mathrm{V}$. Étant donné un point o dans X tel que $h(o) \neq o$, h admet un point fixe si et seulement s'il existe un vecteur $\mathbf{v} \in \mathrm{V}$ tel que $h(o+\mathbf{v}) = o+\mathbf{v}$, c'est-à-dire tel que

$$h(o)+\rho\mathbf{v} = o+\mathbf{v}.$$

Écrivant $h(o)$ sous la forme $o+\mathbf{oh(o)}$, cette dernière condition est équivalente à la suivante :

$$(1-\rho)\mathbf{v} = \mathbf{oh(o)}.$$

Comme $\mathbf{oh(o)} \neq \mathbf{0}$ par hypothèse, il existe un tel vecteur $\mathbf{v}$ si et seulement si $\rho \neq 1$, et ce vecteur est alors unique. Nous en concluons que h admet un point fixe si et seulement si $\rho \neq 1$; en outre, si $\rho \neq 1$, h possède un *unique* point fixe : c'est le point

$$o+\frac{1}{1-\rho}\mathbf{oh(o)},$$

o désignant un point quelconque de X.

Notons la conséquence suivante : un élément h de $\mathscr{H}$ est

– soit l'identité id_X,
– soit une translation de vecteur non-nul, si $\mathrm{L}_h = \mathrm{id}_\mathrm{V}$ et $h \neq \mathrm{id}_\mathrm{X}$,
– soit une homothétie de rapport $\neq 1$, si $\mathrm{L}_h = \rho\mathrm{id}_\mathrm{V}$ avec $\rho \neq 1$.

Ces trois cas peuvent se distinguer en termes de l'ensemble X_h des points fixes de h : $\mathrm{X}_h = \mathrm{X}$ dans le premier cas, $\mathrm{X}_h = \emptyset$ dans le deuxième et X_f est réduit à un point (le *centre* de h) dans le dernier cas.

5. Il est clair que les translations (resp. les homothéties de même centre) commutent entre elles et nous allons voir que ce sont les seuls cas. Vu la classification des éléments de $\mathscr{H}$ que l'on vient de décrire, il suffit de vérifier qu'une translation t de vecteur non-nul $\mathbf{v}$ et une homothétie h de centre o et de rapport $\rho \neq 1$ ne commutent pas. On a $t \circ h(o) = t(o) = o+\mathbf{v}$ tandis que $h \circ t(o) = h(o+\mathbf{v}) = h(o)+\mathrm{L}_h(\mathbf{v}) = o+\rho\mathbf{v}$; comme $\mathbf{v} \neq 0$ et $\rho \neq 1$, $\rho\mathbf{v} \neq \mathbf{v}$ et donc $t \circ h(o) \neq h \circ t(o)$.

6. Soient A, B et C trois points alignés distincts. Il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}-\{0,1\}$ tel que $\mathbf{AC} = \lambda\mathbf{AB}$ et l'homothétie h de centre A et de rapport λ est telle que $h(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$, $h(\mathrm{B}) = \mathrm{C}$. L'unicité de h est immédiate : si h' est un autre élément $\mathscr{H}$ tel que $h'(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$ et $h'(\mathrm{B}) = \mathrm{C}$, alors $h^{-1} \circ h'$ est un élément de $\mathscr{H}$ fixant A et B, ce qui implique $h^{-1} \circ h' = \mathrm{id}_\mathrm{X}$ et donc $h' = h$.

7. Pour cette question, nous nous plaçons dans le plan : $\dim(X) = 2$. Les points A, B, C d'une part et A′, B′, C′ d'autre part n'étant pas alignés, (A, B, C) et (A', B', C') sont deux bases affines de X et il existe une unique bijection affine $h : X \to X$ telle que $h(A) = A'$, $h(B) = B'$ et $h(C) = C'$. Comme $(A'B') \parallel (AB)$, $(A'C') \parallel (AC)$ et $(B'C') \parallel (BC)$ par hypothèse, h transforme toute droite de X en une droite parallèle (voir la remarque concluant la question 1) et donc h est soit une translation, soit une homothétie (le cas $h = \mathrm{id}_X$ est exclu par l'hypothèse que les triangles (ABC) et $(A'B'C')$ n'aient pas de sommet commun.)

Dans le premier cas, le centre de h appartient à chacune des droites (AA'), (BB') et (CC') ; elles sont donc concourantes.

Dans le second cas, si h est une translation de vecteur $\mathbf{v}$ (non-nul puisque $h \neq \mathrm{id}_X$), $\mathbb{R}\mathbf{v}$ est la direction commune des droites (AA'), (BB') et (CC') ; elles sont donc parallèles.

Exercice 7. — 1) Quel que soit le point m de $\mathscr{E}$, les points I, m, $h(m)$ sont alignés en vertu de l'identité

$$h(m) = \mathrm{I} + \rho\mathbf{Im}.$$

Si le produit $\rho\rho'$ des rapports des deux homothéties h et h' est distinct de 1, $h \circ h'$ est une homothétie puisque c'est un élément de $\mathscr{H}$ d'application linéaire associée $\rho\rho'\mathrm{id}_V$. Son centre I″ est caractérisé par la condition

$$\begin{aligned} \mathrm{I}'' &= h \circ h'(\mathrm{I}'') \\ &= h(\mathrm{I}' + \rho'\mathbf{I'I''}) \\ &= h(\mathrm{I}') + \rho\rho'\mathbf{I'I''} \\ &= \mathrm{I} + \rho\mathbf{II'} + \rho\rho'\mathbf{I'I''}; \end{aligned}$$

en écrivant I″ sous la forme $\mathrm{I}'' = \mathrm{I} + \mathbf{II''}$, cette condition est équivalente à l'égalité vectorielle

$$(1 - \rho\rho')\mathbf{II'} = \rho(1 - \rho')\mathbf{II'},$$

laquelle détermine complètement le point I″ puisque $\rho\rho' \neq 1$:

$$\mathrm{I}'' = \mathrm{I} + \frac{\rho(1 - \rho')}{1 - \rho\rho'}\mathbf{II'}.$$

Construction de I″ :

2) Quel que soit le point m appartenant au cercle $\mathscr{C}$ de centre c et de rayon R,

$$(\mathbf{h(c)h(m)} | \mathbf{h(c)h(m)}) = (\rho\mathbf{cm} | \rho\mathbf{cm}) = \rho^2(\mathbf{cm} | \mathbf{cm}) = \rho^2\mathrm{R}^2$$

et le point $h(m)$ appartient donc au cercle $\mathscr{C}'$ de centre $h(c)$ et de rayon $|\rho|\mathrm{R}$: $h(\mathscr{C}) \subset \mathscr{C}'$. Appliquant le même raisonnement à l'homothétie h^{-1}, il vient $h^{-1}(\mathscr{C}') \subset \mathscr{C}$ et donc $\mathscr{C}' = h(h^{-1}(\mathscr{C}')) \subset h(\mathscr{C})$, d'où $h(\mathscr{C}) = \mathscr{C}'$.

Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ deux cercles de centres c, c' et de rayons distincts R, R′. Une homothétie h de rapport ρ transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$ si et seulement si $h(c) = c'$ et $|\rho|\mathrm{R} = \mathrm{R}'$; comme $\mathrm{R} \neq \mathrm{R}'$, il existe exactement deux telles homothéties : h^+, de rapport $\frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}}$, et h^-, de rapport $-\frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}}$.

Il est aisé de construire les centres I^+ et I^- de ces homothéties une fois que l'on a observé que les points c et c' se trouvent du même côté de I^+ sur la droite reliant c, c', I^+ et I^- tandis qu'ils sont de part et d'autre du point I^-.

3)

L'application linéaire associée à la bijection affine $h = h_2^+ \circ h_1^- \circ h_3^-$ est $\frac{R_1}{R_3}\mathrm{id}_V \circ \left(-\frac{R_3}{R_2}\mathrm{id}_V\right) \circ \left(-\frac{R_2}{R_1}\mathrm{id}_V\right) = \mathrm{id}_V$; il s'agit donc d'une translation. Comme, en outre, h applique le cercle C_1 sur lui-même, le centre c_1 de C_1 est un point fixe de h et donc $h = \mathrm{id}_X$. On en déduit l'identité $h_1^- \circ h_3^- = (h_2^+)^{-1}$, qui montre que le membre de gauche est une homothétie de centre I_2^+ et il découle alors de la question 1) que le point I_2^+ est alignés avec les centres I_1^- et I_3^- des homothéties h_1^- et h_3^-.

Un raisonnement analogue à partir de la bijection affine $h_2^+ \circ h_1^+ \circ h_3^+$ permet d'établir que les points I_1^+, I_2^+ et I_3^+ sont alignés.

Exercice 8. —

Première étape. – Puisque J est le milieu des segments $[BD]$ et $[A\beta]$, B (resp. β) est l'image de D (resp. A) par l'homothétie de centre J et de rapport -1 et les droites $(B\beta)$, (AD) sont donc parallèles (c'est le théorème de Thalès...). De même, puisque K est le milieu des segments $[CF]$ et $[A\alpha]$, les droites (AF) et (αC) sont parallèles et,comme $(AD) = (AF)$, les droites $(B\beta)$, (αC) et (AD) sont donc parallèles.

On démontre de même que les droites (αF), (βD) et (AC) sont parallèles.

Deuxième étape. – Comme $h_2(\mathrm{C}) = \mathrm{D}$, $h_2(\alpha\mathrm{C})$ est la droite parallèle à $(\alpha\mathrm{C})$ passant par D, soit $(\mathrm{AD}) = (\mathrm{AF})$; comme $h_1(\mathrm{F}) = \mathrm{B}$, $h_1(\mathrm{AD})$ est la droite parallèle à (AC) passant par B, soit $(\beta\mathrm{B})$. Nous obtenons ainsi que l'homothétie $h_1 \circ h_2$ transforme la droite $(\alpha\mathrm{C})$ en la droite $(\beta\mathrm{B})$.

Par un raisonnement analogue, on vérifie que l'homothétie $h_2 \circ h_1$ transforme la droite $(\alpha\mathrm{F})$ en la droite $(\beta\mathrm{D})$.

Troisième et dernière étape. – Puisque h_1 et h_2 sont deux homothéties de même centre E, elles commutent : $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$. Posant $h' = h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$, nous avons prouvé : $h'(\alpha\mathrm{C}) = (\beta\mathrm{B})$ et $h'(\alpha\mathrm{F}) = (\beta\mathrm{D})$.

Observons que les points α, C et F ne sont pas alignés : le milieu K de $[\mathrm{CF}]$ appartiendrait sinon à (CF), puis $\mathrm{A} \in (\mathrm{CF})$ puisque K est également le milieu de $[\mathrm{A}\alpha]$, et il en découlerait que les quatre points A, C, D et F seraient alignés, en contradiction avec les hypothèses de l'énoncé. Le point α est par conséquent l'unique point d'intersection des droites $(\alpha\mathrm{C})$ et $(\alpha\mathrm{F})$, ce qui entraîne que $h'(\alpha)$ est l'unique point d'intersection des droites $(\beta\mathrm{B})$ et $(\beta\mathrm{D})$; on a donc $h'(\alpha) = \beta$. L'homothétie h' étant centrée au point E, cela établit que les points E, α et β sont alignés.

Nous pouvons maintenant conclure. Par hypothèse, $\mathrm{E} = h(\mathrm{I})$, $\beta = h(\mathrm{J})$ et $\alpha = h(\mathrm{K})$; les points E, α et β étant alignés, il en est de même des points I, J et K.