COMPLÉMENT À LA FICHE 3

I. Les symétries affines du cube

Soit C un cube dans $\mathbb{R}^3$ et soit S_C l'ensemble de ses sommets. L'objet de cet exercice est la démonstration du fait suivant : une bijection affine f de $\mathbb{R}^3$ préserve C — c'est-à-dire $f(C) = C$ — si et seulement si elle transforme chaque sommet de C en un sommet de C — c'est-à-dire $f(S_C) = S_C$.

Dans tout ce qui suit, f désigne une bijection affine de $\mathbb{R}^3$.

1. Démontrer que, si $f(S_C) = S_C$, alors $f(C) = C$.

2. Nous allons maintenant établir l'implication réciproque : si $f(C) = C$, alors $f(S_C) = S_C$. Pour cela, on commence par mettre en évidence une caractérisation des sommets du cube C.

2.1. En décomposant le cube en une réunion de cinq tétraèdres, démontrer le fait suivant : quel que soit le point p de C, il existe une base affine $\{p_0, \ldots, p_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ formée de sommets de C telle que p appartienne à $\mathrm{EnvConv}(p_0, \ldots, p_3)$.

2.2. Soit φ une application affine de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ ayant les propriétés suivantes :
- $\varphi_{|C} \geq 0$ (φ est positive sur C) ;
- $C \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x) = 0\} = \{p\}$ (il existe un unique point p de C tel que $\varphi(p) = 0$).

Quelle est la traduction géométrique de ces conditions ?

En utilisant la question 2.1, démontrer que le point p est nécessairement un sommet de C. (*Indication : utiliser les coordonnées barycentriques de p dans une base affine de $\mathbb{R}^3$ formée de sommets $p_0,\ p_1,\ p_2,\ p_3$ de C et porter son attention sur les nombres réels $\varphi(p),\ \varphi(p_0), \ldots, \varphi(p_3)$.*)

2.3. Établir finalement la caractérisation suivante des sommets de C : un point p de C est un sommet si et seulement s'il existe une application affine $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que
- C soit contenu dans le demi-espace $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x) \geq 0\}$;
- C ne rencontre le plan $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x) = 0\}$ qu'au point p.

Faire un dessin.

3. Démontrer maintenant que, si $f(C) = C$, alors $f(S_C) = S_C$.

4. En s'inspirant de ce qui précède, démontrer le résultat plus précis suivant : toute bijection affine de $\mathbb{R}^3$ préservant le cube C transforme un sommet (resp. une arête ; resp. une face) de C en un sommet (resp. une arête ; resp. une face) de C.

II. Le théorème de Hahn-Banach

Soit X un espace affine réel de dimension finie. L'objet de cet exercice est de démontrer le *théorème de Hahn-Banach* :

étant donnés une partie convexe fermée [1] $C \subset X$ *et un point p de* X *n'appartenant pas à* C*, il existe un hyperplan* Π *de* X *contenant p et ne rencontrant pas* C

puis d'en déduire quelques conséquences.

Pour simplifier, on fera l'hypothèse additionnelle que C est *borné* (c'est-à-dire *compact*). Le cas général d'un convexe fermé C quelconque peut se déduire facilement de ce cas particulier en écrivant C comme la réunion d'une suite de convexes fermés et bornés.

1. Soit C une partie convexe et fermée de $\mathbb{R}^2$ ne contenant pas l'origine o. On va démontrer qu'il existe une droite contenant o et ne rencontrant pas C. L'idée essentielle est d'étudier l'ensemble des demi-droites (fermées) issues de o et rencontrant C.

1.1. Justifier que, pour toute droite D passant par o, l'une au moins des deux demi-droites (fermées) issues de o dans D ne rencontre pas C.

---

[1] Ayant choisi une norme $||.||$ sur l'espace vectoriel $V = \overrightarrow{X}$, on définit une distance d sur X en posant $d(p,q) = ||\overrightarrow{pq}||$ et on dit qu'une partie C de X est fermée si, pour toute suite (x_n) de points de C convergeant dans X, $\lim_n x_n \in C$. Cette notion ne dépend du choix de la norme sur V en vertu de l'équivalence des normes sur un espace vectoriel réel de dimension finie.

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des demi-droites (fermées) issues de o et soit $\mathscr{C}$ le sous-ensemble de $\mathscr{E}$ constitué des demi-droites rencontrant C. Soit L la droite d'équation $x_1 = 0$ et soient $\mathrm{L}^+ = \{x_1 = 0,\ x_2 \geq 0\}$, $\mathrm{L}^- = \{x_1 = 0,\ x_2 \leq 0\}$ les deux demi-droites correspondantes ; on a

$$\mathscr{E} - \{\mathrm{L}^-, \mathrm{L}^+\} = \mathscr{E}_\mathrm{L}^- \cup \mathscr{E}_\mathrm{L}^+,$$

où $\mathscr{E}_\mathrm{L}^-$ est l'ensemble des demi-droites issues de o rencontrant le demi-plan ouvert $\{x_1 < 0\}$ et $\mathscr{E}_\mathrm{L}^+$ est l'ensemble des demi-droites issues de o rencontrant le demi-plan ouvert $\{x_1 > 0\}$. En utilisant les bijections

$$\{x_1 = -1\} \to \mathscr{E}_\mathrm{L}^-,\ p \mapsto [op) \quad \text{et} \quad \{x_1 = 1\} \to \mathscr{E}_\mathrm{L}^+,\ p \mapsto [op),$$

on munit chacun de ces deux ensembles d'une structure d'espace affine réel de dimension un. (Faire un dessin.)

1.2. Démontrer que $\mathscr{E}_\mathrm{L}^- \cap \mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{E}_\mathrm{L}^+ \cap \mathscr{C}$) est une partie convexe de $\mathscr{E}_\mathrm{L}^-$ (resp. $\mathscr{E}_\mathrm{L}^+$).

À partir de maintenant, on raisonne par l'absurde : on suppose que toute droite passant par o rencontre C et on va aboutir à une contradiction. On rappelle que les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles (ouverts, fermés ou semi-ouverts), les demi-droites (ouvertes ou fermées) et $\mathbb{R}$.

1.3. En analysant les différentes possibilités pour l'ensemble $\mathscr{C} \cap \mathscr{E}_\mathrm{L}^-$, démontrer qu'il existe une suite de demi-droites $\mathrm{D}_n \in \mathscr{E}$ satisfaisant aux conditions suivantes :
– la suite (D_n) converge vers une demi-droite $\mathrm{D} \in \mathscr{E}$;
– toutes les demi-droites D_n sont contenues dans l'un des deux demi-plans ouverts $\mathbb{R}^2 - (-\mathrm{D} \cup \mathrm{D})$;
– pour tout n, D_{n+1} est contenue entre D_n et D ;
– la demi-droite $-\mathrm{D}$ rencontre C ;
(*Indication* : si $\mathscr{E}_\mathrm{L}^+ \cap \mathscr{C} = \emptyset$ ou $\mathscr{E}_\mathrm{L}^- \cap \mathscr{C} = \emptyset$, vérifier que l'on peut prendre pour D l'une des demi-droites L^-, L^+ ; sinon, considérer un point adéquat au bord de l'un des convexes $\mathscr{E}_\mathrm{L}^- \cap \mathscr{C}$, $\mathscr{E}_\mathrm{L}^+ \cap \mathscr{C}$.)

Nous allons maintenant obtenir la contradiction annoncée en construisant une suite de points de C convergeant vers x grâce à la question précédente. Pour tout entier n, on choisit un point y_n dans $\mathrm{D}_n \cap \mathrm{C}$.

1.4. Soit x un point dans $(-\mathrm{D}) \cap \mathrm{C}$. Justifier que la droite (xy_n) rencontre la demi-droite D_0 en un unique point x_n et démontrer que la suite (x_n) converge vers x. (*Indication : faire un dessin...*)

1.5. Conclure.

2. Soient X un espace affine réel de dimension finie, C une partie convexe de X et p un point de X n'appartenant pas à C. En raisonnant par récurrence sur d, on va démontrer qu'il existe un hyperplan P de X passant par p et ne rencontrant pas C (*théorème de Hahn-Banach*).

2.1. Prouver le théorème de Hahn-Banach lorsque $\dim(\mathrm{X}) \leq 2$.

Soit $d \geq 3$ et supposons que le théorème soit établi pour tout espace affine réel de dimension $\leq d-1$.

2.2. Démontrer qu'il existe une droite $\mathrm{D} \subset \mathrm{X}$ passant par p et ne rencontrant pas C (*Indication : raisonner dans un plan passant par p*) ; choisir alors un hyperplan Π ne contenant pas D et passant par p, puis considérer la projection π sur Π parallèlement à D (*Indication : observer que $\pi(\mathrm{C})$ est compact (c'est l'image d'un compact par une application continue) et appliquer le théorème dans Π*).

2.3. Déduire du théorème de Hahn-Banach que toute partie convexe fermée de X est l'intersection des demi-espaces la contenant.

3. Soient X un espace affine réel de dimension finie et soient $p_0,\ p_1, \ldots, p_n$ des points de X, dont on note C l'enveloppe convexe. Par définition, un point p de C est un *sommet*s'il existe un hyperplan $\mathrm{P} \subset \mathrm{X}$ tel que $\mathrm{P} \cap \mathrm{C} = \{p\}$; on désigne par $\mathrm{S_C}$ l'ensemble des sommets de C.

3.1. Soit p un sommet de C. Étant donné $i \in \{0, \ldots, n\}$, justifier qu'il existe un point s_i dans l'enveloppe convexe de $\{p_0, \ldots, p_n\} - \{p_i\}$ tel que $p \in [p_i s_i]$ puis que l'on a $p = p_i$ ou $p = s_i$. En raisonnant par récurrence sur n, en déduire que l'ensemble des sommets de C est contenu dans l'ensemble $\{p_0, \ldots, p_n\}$.

3.2. Démontrer que, si le point p_i n'est pas un sommet de C, alors p_i appartient à l'enveloppe convexe de $\{p_0, \ldots, p_n\} - \{p_i\}$. (*Indication : prouver l'assertion contraposée en utilisant le théorème de Hahn-Banach.*

3.3. Déduire de ce qui précède que C est l'enveloppe convexe de ses sommets et démontrer qu'une bijection affine $f \in \mathrm{GA(X)}$ préserve C si et seulement si $f(\mathrm{S_C}) = \mathrm{S_C}$.