Université Claude Bernard - Lyon 1
Géométrie élémentaire (L3)
Année 2007/2008

Fiche 5

Exercice 1 (*Sous-groupes finis du groupe orthogonal du plan euclidien.*) — Soit E un plan euclidien et $O(E)$ le groupe orthogonal.

On rappelle que l'application :

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow O^+(E),\ \overline{\vartheta} \mapsto R_{\overline{\vartheta}} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme.

1) Montrer que tout sous-groupe fini $G \subset O^+(E)$ est un groupe cyclique

$$\mathcal{C}_n := \{R_{\overline{2\pi k/n}},\ 0 \leq k \leq n \in \mathbf{N}\}$$

Indication : considérer le plus petit réel $\vartheta \in]0, 2\pi[$ tel que $R_{\overline{\vartheta}} \in G$ et le plus petit entier naturel n tel que $2\pi \leq n\vartheta$.)

2) On suppose à présent que le sous-groupe fini $G \subset O(E)$ contient une symétrie s et on pose $H := G \cap O^+(E)$.

2.1. Montrer que $G = H \cup H \circ s$.

2.2. Montrer que l'application $H \times \{\mathrm{id}_E, s\} \to G,\ (h, \sigma) \mapsto h \circ \sigma$ est une bijection et décrire la structure de groupe obtenue sur $H \times \{\mathrm{id}_E, s\}$.$G$ est le produit semi-direct de H et $\mathcal{S} = \{1_E, s\}$.

3) Application : déterminer le sous-groupe de $O(E)$ laissant globalement invariant l'ensemble des sommets d'un $n-$gone régulier du plan E.

Exercice 2 — Soit E un espace affine euclidien de dimension 3 et soit $G \subset GA(E)$ le groupe des *déplacements* de E de dimension 3. On rappelle que G est constitué des transformations suivantes

- les rotations ;
- les translations ;
- les produits d'une rotation d'axe D et d'une translation de vecteur non nul $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{D}$

On se propose ici de déterminer le sous- groupe des commutateurs $[G, G] \subset G$.

1) Montrer que toute symétrie orthogonale par rapport à une droite D appartient à G.

2) 2.1. Vérifier que le produit de deux symétries orthogonales par rapport à deux droites parallèles D et D' est une translation puis montrer que toute translation τ peut s'écrire sous la forme $\sigma' \circ \sigma$ où σ' et σ sont des symétries orthogonales par rapport à des droites.

2.2. Montrer que toute translation τ peut s'écrire τ_0^2 où τ_0 est une translation.

2.3. Déduire des deux questions précédentes que toute translation τ est un commutateur de G.

3) a) Soient D et D' deux droites distinctes de E passant par un point O. Soit σ la symétrie orthogonale par rapport à la droite D, σ' la symétrie orthogonale par rapport à D'.

3.1. Montrer que $\sigma' \circ \sigma$ est une rotation d'axe orthogonal au plan défini par D et D'.

3.2. Soit $\rho \neq Id$ une rotation appartenant à G. En écrivant ρ sous la forme ρ_0^2 où ρ_0 est une rotation, montrer que ρ est un commutateur de G.

4) Démontrer que G est égal à son sous-groupe des commutateurs : $[G, G] = G$.

Exercice 3 — On considère k hyperplans $H_1, \cdots, H_k$ d'un espace euclidien E. On note $\sigma_1, \cdots, \sigma_k$ les réflexions correspondantes et $\{x_1, \cdots, x_k\}$ des vecteurs unitaires tels que $H_i^{\perp} =< x_i >\ \ (i \in \{1, \cdots, k\})$.

Soit G le sous-groupe de $O(E)$ dont les éléments sont les compositions d'un nombre fini de σ_i, $i \in \{1, \cdots, k\}$, c'est-à-dire le sous-groupe de $O(E)$ *engendré* par les réflexions σ_i.

1) Déterminer l'ensemble

$$E^G = \{x \in E, \mid \forall g \in G,\ g(x) = x\}$$

des points fixes communs à tous les éléments de G.

En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur les x_i pour que $E^G = \{0\}$.

(*Indication : Utiliser* $(V \cap V')^\perp = V^\perp + V'^\perp$.)

2) Étant donné $x \in E - \{0\}$, on désigne par $\sigma_{<x>^\perp}$ la réflexion d'hyperplan $< x >^\perp$. On considère le sous-ensemble

$$\Delta = \{x \in E \mid \|x\| = 1, \exists i \in \{1, \cdots, k\}, \exists g \in G \mid \sigma_{<x>^\perp} = g^{-1} \circ \sigma_i \circ g\}.$$

Montrer que Δ est globalement invariant sous l'action de G i.e. que $g(\Delta) \subset \Delta,\ \forall g \in G$.

3) Montrer que si Δ est fini et si $E^G = \{0\}$ alors G est fini. (*Indication : Soit* $\mathcal{S}_\Delta$ *le groupe de permutation de* Δ. *Montrer que l'application :* $G \longrightarrow \mathcal{S}_\Delta : g \mapsto g_{|\Delta}$ *est injective.*)

4) Soit $E = \mathbf{R}^n$, $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ la base canonique et $\{H_i = \mathbf{R}e_i^\perp,\ 1 \leq i \leq n\}$. Montrer que G est abélien et déterminer son cardinal. Déterminer Δ.

Exercice 4 (*Inversion*) — Soit X un plan euclidien. Étant donnés un point o de X et un nombre réel a strictement positif, on appelle *inversion* de pôle o et de puissance a l'application

$$X - \{a\} \to X - \{a\}, \quad p \mapsto o + \frac{a}{\|\overrightarrow{op}\|^2}\overrightarrow{op}.$$

De manière équivalente, les points $o,\ p$ et $\iota(p)$ sont alignés et $(\overrightarrow{op}|\overrightarrow{o\iota(p)}) = a$.

1) Vérifier que ι est une bijection de $X - \{o\}$ dans lui-même telle que $\iota^2 = \mathrm{id}_{X-\{o\}}$ et déterminer l'ensemble de ses points fixes.

2) Les trois questions suivantes sont préparatoires en vue de la question 3.

2.1. Déterminer $h \circ \iota$ et $\iota \circ h$ pour toute homothétie h de centre o.

2.2. Soit $C \subset X$ un cercle de centre c et de rayon $R > 0$. Étant donnés un point $p \in X$ et une droite D qui passe par p et coupe C en deux points x, y (éventuellement confondus, auquel cas D est tangente à C), démontrer que l'on a

$$(\overrightarrow{px}|\overrightarrow{py}) = \|p - c\|^2 - R^2.$$

(*Indication : introduire le milieu* α *du segment* $[xy]$ *et utiliser le théorème de Pythagore.*) En particulier, ce nombre réel ne dépend pas de la droite D considérée mais seulement du point p ; c'est par définition la *puissance* de p par rapport à C.

2.3. Soient C un cercle, $p,\ p'$ deux points diamétralement opposés de C et Δ la tangente à C en p'. Toute droite D passant par p et non parallèle à Δ coupe C en un second point $x \neq p$. Notant x' le point d'intersection de D et Δ, démontrer que l'on a

$$(\overrightarrow{px}|\overrightarrow{px}') = \|pp'\|^2.$$

3) La propriété fondamentale des inversions est qu'elles transforment un cercle (resp. une droite) en un cercle ou une droite. En utilisant la question 2, établir plus précisément les quatre assertions suivantes :

(i) si D est une droite passant par o, $\iota(D - \{o\}) \cup \{o\} = D$;

(ii) si C est un cercle ne contenant pas o, $\iota(C)$ est un cercle ;

(iii) si D est une droite ne passant pas par o, $\iota(D) \cup \{o\}$ est un cercle ;

(iv) si C est un cercle contenant o, $\iota(C - \{o\})$ est une droite.

4) Soit $(o, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ un repère orthonormal. Déterminer les coordonnées du point $\iota(p)$ en fonction de celles du point p et retrouver les résultats de la question précédente.

5) Vérifier que les images par ι de deux cercles tangents (resp. d'un cercle et d'une droite tangents ; resp. de deux droites parallèles) sont deux cercles tangents, un cercle et une droite tangents ou deux droites parallèles. (*Indication : deux cercles sont tangents si et seulement si leur intersection est réduite à un point...*)

6) Soient C et C' deux cercles tels que $C \cap C' \neq \emptyset$. On désigne par c et c' leurs centres respectifs.

6.1. Désignant par p et p' les points d'intersection de C et C', vérifier que les angles orientés $[\overrightarrow{pc}, \overrightarrow{pc'}]$ et $[\overrightarrow{pc}, \overrightarrow{pc'}]$ sont opposés. Les cercles C et C' sont dits *orthogonaux* si ces angles sont droits.

6.2. Soit D une droite intersectant C en des points p, p'. Vérifier que D est orthogonale à la tangente à C à p si et seulement si D passe par le centre c de C.

6.3. Démontrer que les images par l'inversion ι de deux droites orthogonales sont orthogonales.

6.4. Démontrer que les images par l'inversion ι de deux cercles orthogonaux (resp. d'un cercle et d'une droite orthogonaux) sont orthogonales. (*Indication : introduire les tangentes convenables puis utiliser les questions 5 et 6.3.*)

Exercice 5 (*Familles linéaires de cercles*) — Soit X un plan euclidien et soient $C,\ C' \subset X$ deux cercles, de centres respectifs c et c'.

1) Si $C \cap C' \neq \emptyset$, démontrer qu'il existe une inversion transformant C et C' en deux droites sécantes ou parallèles.

2) Si $C \cap C' = \emptyset$, nous allons démontrer qu'il existe une inversion transformant C et C' en deux cercles *concentriques.*

2.1. Étant donnés un cercle C'' de centre c'' et une droite D disjointe de C'', démontrer qu'il existe un cercle orthogonal à C'' et à D qui coupe la perpendiculaire à D passant par c'' en deux points distincts.

2.2. Déduire de la question précédente qu'il existe un cercle Γ orthogonal à C et C' qui coupe la droite (cc') en deux points distincts, notés x et y. (*Indication : par une inversion bien choisie, transformer C' et (cc') en deux droites orthogonales.*)

2.3. Démontrer qu'une inversion ι de centre x transforme C et C' en deux cercles concentriques de centre $\iota(y)$.

3) Soient C et C' deux cercles disjoints tels que C' soit intérieur à C. On s'intéresse aux suites de cercles (Γ_n) satisfaisant aux conditions suivantes :
- Γ_0 est tangent à C et C' ;
- pour tout $n \geq 0$, $\Gamma_{n+1} \neq \Gamma_n$ et Γ_{n+1} est tangent à C, C' et Γ_n.

Démontrer l'*alternative de Steiner* :
- ou bien *toutes* ces suites sont périodiques (c'est-à-dire qu'il existe $n \geq 2$ tel que $\Gamma_n = \Gamma_0$) ;
- ou bien *aucune* de ces suite n'est périodique.

Pour ce faire, on commencera par se ramener au cas où les cercles C et C' sont concentriques puis on prouvera directement le résultat dans cette situation.

4) Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des droites et des cercles du plan et soient C, C' deux éléments distincts de C ; d'après ce qui précède, une inversion ι permet de se ramener à l'une des trois situations suivantes :
- C et C' sont deux droites sécantes ;
- C et C' sont deux droites parallèles ;
- C et C' sont deux cercles concentriques.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des éléments Γ de $\mathcal{E}$ orthogonaux à C et C'.

4.1. Si C et C' sont deux cercles disjoints non concentriques, démontrer qu'il existe deux points distincts $x, y \in X$ tels que $\mathcal{F}$ soit l'ensembles des éléments Γ de $\mathcal{E}$ passant par x et y.

4.2. Si C et C' sont deux cercles tangents en un point p, démontrer que $\mathcal{F}$ est l'ensemble de éléments Γ de $\mathcal{E}$ passant par p et orthogonaux à la tangente de C en p.

4.3. Si C et C' sont deux cercles sécants et non tangents, démontrer que deux éléments quelconques de $\mathcal{F}$ sont disjoints.

4.4. Représenter graphiquement chacune des situations précédentes.

Exercice 6 (*L'espace des cercles et des droites du plan*) — On travaille dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne usuelle et on désigne par

– $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des parties de $\mathbb{R}^2$,

– $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble de tous les cercles et de toutes les droites.

On identifie $\mathbb{R}^2$ au sous-ensemble de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ formé des singletons et on note ∞ l'élément $\emptyset$ de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$.

1) Déterminer la nature de l'ensemble

$$\Gamma_{\mathbf{a}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a_0(x^2+y^2) + a_1 x + a_2 y + a_3 = 0\}$$

en fonction du quadruplet $\mathbf{a} = (a_0, \ldots, a_3) \in \mathbb{R}^4$.

On considère la forme quadratique q sur $\mathbb{R}^4$ définie par $q(\mathbf{a}) = a_1^2 + a_2^2 - 4a_0a_3$ et on pose

$$Q = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^4 \mid q(\mathbf{a}) = 0\}, \quad \Omega^+ = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^4 \mid q(\mathbf{a}) > 0\}, \quad \Omega^- = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^4 \mid q(\mathbf{a}) < 0\}.$$

On désigne enfin par $\overline{\mathcal{C}}$ l'ensemble de toutes les droites D de $\mathbb{R}^4$ passant par l'origine et telles que la restriction de q à D soit positive (ce qui revient à dire que D est contenue dans $\Omega^+ \cup Q$) et par $\mathcal{C}$ le sous-ensemble de $\overline{\mathcal{C}}$ formé des droites D telles que la restriction de q à D soit *strictement* positive en dehors de l'origine (ce qui revient à dire que D rencontre Ω^+).

2) Démontrer que l'application

$$\gamma : \mathbb{R}^4 \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \quad \mathbf{a} \mapsto \Gamma_{\mathbf{a}}$$

réalise une bijection (encore notée γ) entre l'ensemble $\overline{\mathcal{C}}$ et $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \cup \mathcal{E}$.

3) Soit D une droite dans $\overline{\mathcal{C}}$.

3.1. Vérifier que :

– $\gamma(D)$ appartient à $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ si et seulement si D est contenue dans la quadrique Q ;

– $\gamma(D)$ est une droite si et seulement si $D \in \mathcal{C}$ et $D \subset H_0$;

– $\gamma(D)$ est un cercle si et seulement si $D \in \mathcal{C}$ et $D \not\subseteq H_0$.

3.2. Supposons que D appartienne à $\mathcal{C}$ et soit $\mathbf{a}$ un point de D distinct de l'origine. Vérifier que $a_0 \neq 0$ et que le rayon du cercle $\gamma(D)$ est $\frac{1}{4a_0^2}q(\mathbf{a})$.

On désigne par R la forme polaire de la forme quadratique q :

$$R(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = a_1a_1' + a_2a_2' - 2(a_0a_3' + a_0'a_3).$$

Étant données deux droites $D,\ D' \in \mathcal{C}$, le nombre réel positif

$$\frac{|R(\mathbf{a}, \mathbf{a}')|}{\sqrt{q(\mathbf{a})q(\mathbf{a}')}}$$

ne dépend pas du choix de $\mathbf{a} \in D - \{\mathbf{0}\}$ et $\mathbf{a}' \in D' - \{\mathbf{0}\}$; on le note $[D, D']$.

4) Soit $p = (x_0, y_0)$ un point de $\mathbb{R}^2$.

4.1. Déterminer explicitement l'unique droite $D_p \in \overline{\mathcal{C}}$ telle que $p = \gamma(D_p)$.

4.2. Étant donnée une droite $D \in \mathcal{C}$, vérifier que p appartient au cercle ou à la droite $\gamma(D)$ si et seulement si les droites D et D_p sont orthogonales relativement à la forme bilinéaire R (i.e. $R(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = 0$ si $\mathbf{a} \in D$ et $\mathbf{a}' \in D_p$).

4.3. Soit $D_\infty \in \overline{\mathcal{C}}$ la droite telle que $\gamma(D_\infty) = \infty$. Vérifier que D_∞ est orthogonale à une droite $D \in \mathcal{C}$ si et seulement si D est contenue dans H_0.

4.4. Soient $D,\ D' \in \mathcal{C}$ deux droites contenues dans H_0. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

– les droites $\gamma(D)$ et $\gamma(D')$ sont parallèles ;

– $[D, D'] = 1$;

– D_∞ est l'unique de $\overline{\mathcal{C}}$ contenue dans Q qui soit simultanément orthogonale à D et D'.

Interprétation : si l'on adjoint le point ∞ au plan $\mathbb{R}^2$, toutes les droites de $\mathbb{R}^2$ passent par ce point et deux droites sont parallèles si et seulement si ∞ est leur seul point d'intersection.

5) Soient D, D' deux droites dans $\mathcal{C}$. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

– $[D, D'] \leq 1$;
– la restriction de la forme quadratique q au plan de $\mathbb{R}^4$ engendré par D et D' est positive ;
– le plan de $\mathbb{R}^4$ engendré par D et D' rencontre la quadrique Q selon au plus une droite.

(*Indication : choisir* $\mathbf{a} \in D - \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{a}' \in D' - \{\mathbf{0}\}$ *et étudier à quelle condition l'équation* $q(t\mathbf{a} + s\mathbf{a}') = 0$ *admet une solution* $(t, s) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$*...*)

6) Soient $D,\ D' \in \mathcal{C}$ deux droites contenues dans H_0.

6.1. Vérifier que $[D, D'] \leq 1$ et qu'il y a égalité si et seulement si les droites $\gamma(D)$ et $\gamma(D')$ sont parallèles.

6.2. Si les droites $\gamma(D)$ et $\gamma(D')$ sont concourantes, vérifier que leur angle est l'unique élément ϑ de $]0, \frac{\pi}{2}]$ tel que

$$\cos(\vartheta) = [D, D'].$$

7) Soient $D,\ D' \in \mathcal{C}$ deux droites non contenues dans H_0.

7.1. Démontrer que la distance entre les centres des cercles $\gamma(D)$ et $\gamma(D')$ est

$$\frac{1}{4a_0^2}q(\mathbf{a}) + \frac{1}{4{a_0'}^2}q(\mathbf{a}') - \frac{2}{a_0 a_0'}R(\mathbf{a}, \mathbf{a}'),$$

où $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}'$ sont des points de D et D' distincts de l'origine.

7.2. En déduire que $\gamma(D)$ et $\gamma(D')$ sont sécants si et seulement si

$$[D, D'] \leq 1,$$

auquel cas l'angle entre leurs tangentes en un point d'intersection est l'unique nombre réel $\vartheta \in [0, \pi/2]$ tel que

$$\cos(\vartheta) = [D, D'].$$

8) Soient $D,\ D' \in \mathcal{C}$ deux droites telles que $D \not\subseteq H_0$ et $D' \subset H_0$.

Démontrer que le cercle $\gamma(D)$ et la droite $\gamma(D')$ sont sécants si et seulement si

$$[D, D'] \leq 1,$$

auquel cas cette quantité est le cosinus de l'angle que forme $\gamma(D')$ avec la tangente à $\gamma(D)$ en un point d'intersection.

9) Soient $D,\ D'$ deux droites dans $\mathcal{C}$ et soit P le plan de $\mathbb{R}^4$ qu'elles engendrent. En faisant le bilan des questions précédentes, montrer que :
– $\gamma(D)$ et $\gamma(D')$ sont disjoints si et seulement si $[D, D] > 1$, ce qui équivaut à dire que la restriction de la forme quadratique q au plan P est de signature $(1, 1)$ ou encore que $P \cap Q$ contient deux droites distinctes ;
– $\gamma(D)$ et $\gamma(D')$ sont tangents dans $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $[D, D] = 1$, ce qui équivaut à dire que la restriction de q au plan P est de signature $(1, 0)$ ou encore que $P \cap Q$ est une droite ;
– $\gamma(D)$ et $\gamma(D')$ sont sécants et non tangents si et seulement si $[D, D'] < 1$, ce qui équivaut à dire que la restriction de la forme quadratique q au plan P est de signature $(2, 0)$ ou encore que $P \cap Q = \{\mathbf{0}\}$;
– $\gamma(D)$ et $\gamma(D')$ sont orthogonaux si et seulement si $[D, D'] = 0$, c'est-à-dire si et seulement si les droites D et D' sont orthogonales relativement à la forme bilinéaire R.

10) Soient $D,\ D' \in \mathcal{C}$ deux droites distinctes non contenues dans H_0 et soit P le plan de $\mathbb{R}^4$ qu'elles engendrent.

10.1. Vérifier que $P \cap H_0$ est une droite et que $P \cap Q$ est soit réduit à $\mathbf{0}$, soit une droite, soit la réunion de deux droites distinctes.

10.2. Vérifier que les cercles $\gamma(D)$ et $\gamma(D')$ sont concentriques si et seulement si $P \cap H_0 = D_\infty$, auquel cas $P \cap Q = \{D_\infty, D_c\}$ où D_c est la droite telle que $\gamma(D_c)$ soit le centre commun de $\gamma(D)$ et $\gamma(D')$.

10.3. Décrire les cercles ou droites $\gamma(D'')$, $D'' \in \mathcal{C}$ et $D'' \subset P$, en fonction de la position de P par rapport à H_0 et Q ; il y a quatre cas de figure possibles :
– $P \cap H_0 = D_\infty$;
– $P \cap H_0 \neq D_\infty$ et $P \cap Q = \{\mathbf{0}\}$;

– $P \cap H_0 \neq D_\infty$ et $P \cap Q$ est une droite ;
– $P \cap H_0 \neq D_\infty$ et $P \cap Q$ est la réunion de deux droites distinctes.
10.4. Reprendre la question 4 de l'exercice 5 du point de vue adopté dans cet exercice.

Exercice 7 (*Projection stéréographique*) — Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^3$, soit ξ le point $(0,0,1)$ et soit Π le plan d'équation $z = 0$. On pose également $o = (0,0,0)$.

La *projection stéréographique* de S sur Π de pôle ξ est l'application $\pi : S - \{\xi\} \to \Pi$ envoyant un point p sur l'unique point d'intersection de la droite (ξp) et du plan Π.

1) Faire un dessin.

2) Vérifier que π est une bijection et déterminer les coordonnées du point $\pi(p)$ (resp. du point $\pi^{-1}(q)$) en fonction des coordonnées du point $p \in S - \{\xi\}$ (resp. du point $q \in \Pi$).

3) Un *cercle* tracé sur la sphère S est par définition une partie de S de la forme $S \cap P$, où P est un plan de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{dist}(o, P) < 1$ (cette condition garantit que l'intersection $S \cap P$ n'est ni vide, ni réduite à un point) ; on parle de *grand cercle* lorsque P est un plan passant par l'origine o.

Soit $C \subset S$ un cercle tracé sur S. Démontrer que $\pi(C - \{\xi\})$ est
– un cercle si $\xi \notin C$;
– une droite si $\xi \in C$
et vérifier que tout cercle (resp. toute droite) de Π est de cette forme. (*Indication : utiliser les expressions de π et π^{-1} en termes de coordonnées obtenues à la question précédente.*)

4) Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan Π. Vérifier que l'application $\pi \circ s \circ \pi^{-1} : \Pi - \{o\} \to \Pi - \{o\}$ est l'inversion de pôle o et de puissance 1 (c'est-à-dire l'inversion par rapport au cercle $S \cap \Pi$).

Remarque : les inversions dans le plan ne sont donc que des réflexions dans $\mathbb{R}^3$ vues à travers une projection stéréographique...

5) Soit p un point de S. Le *plan tangent* à S en p est le plan orthogonal au vecteur $\overrightarrow{op}$ passant par p ; on le note T_pS.

Toute droite $D \subset T_pS$ passant par p détermine un unique grand cercle $\Gamma(D)$ passant par p, intersection de S et du plan $P(D) = o + \mathbb{R}\overrightarrow{op} \oplus \overrightarrow{D}$.

5.1. Faire un dessin et vérifier que tout grand cercle passant par p est de la forme $\Gamma(D)$, où $D \subset T_pS$ est une droite passant par p uniquement déterminée.

5.2. Soient D, D' deux droites dans T_pS passant par p. Par définition, l'*angle* entre deux grands cercles $\Gamma(D)$ et $\Gamma(D')$ est l'angle entre les droites D et D' dans le plan T_pS, c'est-à-dire l'unique élément φ de $[0, \frac{\pi}{2}]$ tel que

$$\cos(\varphi) = \frac{|(\overrightarrow{t}\,|\,\overrightarrow{t'})|}{||\overrightarrow{t}||.||\overrightarrow{t'}||},$$

où $\overrightarrow{t}$ (resp. $\overrightarrow{t'}$) est un vecteur non nul de $\overrightarrow{D}$ (resp. de $\overrightarrow{D'}$). Démontrer que cet angle est également celui entre les normales aux plans $P(D)$ et $P(D)$.

5.3. Supposons $p \neq \xi$ et soient D et D' deux droites de T_pS passant par p. Démontrer que l'angle entre les cercles ou droites $\pi(\Gamma(D))$ et $\pi(\Gamma(D'))$ est égal à l'angle entre les grand cercles $\Gamma(D)$ et $\Gamma(D')$. (*Indication : utiliser la question 7.2 de l'exercice précédent pour calculer l'angle entre $\pi(\Gamma(D))$ et $\pi(\Gamma(D'))$ à partir d'équations des plans $P(D)$ et $P(D')$ puis conclure grâce à la question précédente.*)