Université Claude Bernard - Lyon 1
Géométrie élémentaire (L3)
Année 2007/2008

Fiche 5 : corrigé

Les dessins sont laissés au soin du lecteur...

Exercice 1. 1) Si $G = \{Id_E\}$, alors le résultat est vrai (avec $n = 1$). On peut donc supposer $G \neq \{Id_E\}$; $G \setminus \{Id_E\}$ est alors fini, non vide, donc il existe un unique plus petit réel $\vartheta \in]0, 2\pi[$ tel que $R_{\overline{\vartheta}} \in G$.

Soit n le plus petit entier naturel tel que $2\pi \leq n\vartheta$. On a $0 \leq n\vartheta - 2\pi < \vartheta$, et $R_{\overline{n\vartheta-2\pi}} = R_{\overline{n\vartheta}} = (R_{\overline{\vartheta}})^n \in G$, donc $0 = n\vartheta - 2\pi$ par choix de ϑ. Donc $\vartheta = \frac{2\pi}{n}$ et $\mathscr{C}_n =< R_{\overline{\vartheta}} >\subseteq G$.

Réciproquement, soit $R_{\overline{\vartheta'}} \in G \setminus \{Id_E\}$, avec $\vartheta' \in]0, 2\pi[$, et soit p le plus grand entier naturel tel que $0 \leq \vartheta' - p\vartheta$. On a $0 \leq \vartheta' - p\vartheta < \vartheta$ et $R_{\overline{\vartheta'-p\vartheta}} = R_{\overline{\vartheta'}}(R_{\overline{\vartheta}})^{-p} \in G$, donc $0 = \vartheta' - p\vartheta$ par choix de ϑ. On en déduit que $R_{\overline{\vartheta'}} = (R_{\overline{\vartheta}})^p \in \mathscr{C}_n$, d'où finalement $G = \mathscr{C}_n$.

2) 2.1. Soit $g \in G$. Si $g \in O^+(E)$, alors $g \in H$. Si $g \in O^-(E)$, alors $g \circ s \in O^+(E)$, donc $g \circ s \in H$ et $g = (g \circ s) \circ s \in H \circ s$.

2.2. On a $H \cap \mathscr{S} = \{Id_E\}$. Cette remarque et la question 2.1 montrent que tout élément de $g \in G$ s'écrit *de manière unique* comme une composée $g = h \circ \sigma$, avec $h \in H$ et $\sigma \in \mathscr{S}$. Les *ensembles* $H \times \mathscr{S}$ et G sont donc en bijection, via $(h, \sigma) \mapsto h \circ \sigma$. De plus il est clair que H est distingué dans G (car $O^+(E)$ est distingué dans $O(E)$). Dans cette situation, on dit que G est le *produit semi-direct* de H par $\mathscr{S}$.

Si $g = h \circ \sigma$ et $g' = h' \circ \sigma'$ sont deux éléments de G décomposés comme indiqué, alors la décomposition de $g \circ g'$ est nécessairement $g \circ g' = (h \circ \sigma \circ h' \circ \sigma) \circ (\sigma \circ \sigma')$, puisque $(h \circ \sigma \circ h' \circ \sigma) \in H$ et $(\sigma \circ \sigma') \in \mathscr{S}$. Par transport de structure, *l'ensemble* $H \times \mathscr{S}$ acquiert structure de groupe avec la loi de composition interne $(h, \sigma) \cdot (h', \sigma') := (h \circ \sigma \circ h' \circ \sigma, \sigma \circ \sigma')$ (exercice : le vérifier directement !), et la bijection $(h, \sigma) \mapsto h \circ \sigma$ devient alors un isomorphisme de groupes.

3) Soit $N \geq 3$. On considère le N-gone régulier du plan E (plan qu'on identifie à $\mathbb{C}$) de sommets l'ensemble μ_N des racines N-ièmes de l'unité, et le sous-groupe G de $O(E)$ laissant globalement invariant μ_N.

On a un morphisme de restriction de G dans le groupe des permutations de μ_N, et ce morphisme est injectif puisque μ_N contient une base affine de E. Le groupe G est donc fini, et on peut appliquer les résultats de l'étude effectuée ci-dessus. La symétrie s par rapport à l'axe des réels (i.e. la conjugaison complexe) appartient clairement à G, donc on est dans le cas de la question 2), et G est le produit semi-direct de $H = G \cap O^+(E)$ par $\mathscr{S} = \{Id_E, s\}$. Enfin, on vérifie facilement que $H = \mathscr{C}_N$.

Le groupe G est le *groupe diédral* d'ordre $2N$.

Exercice 2. 1) La symétrie orthogonale par rapport à une droite D est la rotation d'axe D et d'angle π, c'est donc un élément de G.

2) 2.1. Soient σ et σ' deux symétries orthogonales par rapport à des droites parallèles D et D'. L'application linéaire L_σ associée à σ est la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à la direction $\overrightarrow{D}$ de D, de mÃªme $L_{\sigma'}$ est la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à la direction $\overrightarrow{D'}$ de D'. Comme D et D' sont parallèles, on a $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{D'}$ et donc $L_\sigma = L_{\sigma'}$. On en déduit que $L_{\sigma\circ\sigma'} = L_\sigma \circ L_{\sigma'} = Id_E$, donc $\sigma \circ \sigma'$ est une translation.

Réciproquement, soit τ une translation de vecteur $\overrightarrow{v}$. Si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, alors on a le résultat voulu avec $\sigma = \sigma'$. Supposons donc $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, et soit D une droite affine de direction $\overrightarrow{D}$ contenue dans $< \overrightarrow{v} >^\perp$. Fixons $a \in D$ et considérons le point $a' = a + \frac{1}{2}\overrightarrow{v}$, la droite $D' = a' + \overrightarrow{D}$, et les symétries orthogonales σ et σ' par rapport à D et D' respectivement. Alors D et D' sont deux droites parallèles, donc $\sigma' \circ \sigma$ est une translation, et un calcul direct donne $\sigma' \circ \sigma(a) = a + \overrightarrow{v}$, donc $\sigma' \circ \sigma = \tau$ (faire un dessin !).

2.2. Soit τ une translation de vecteur $\overrightarrow{v}$. On a $\tau = (\tau_0)^2$ avec τ_0 la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{v}$.

2.3. Avec les notations de la question précédente, soient σ et σ' des symétries orthogonales par rapport à des droites telles que $\tau_0 = \sigma \circ \sigma'$. On a alors $\tau = (\tau_0)^2 = \sigma \circ \sigma' \circ \sigma \circ \sigma' = [\sigma, \sigma']$ (car $\sigma = \sigma^{-1}$ et $\sigma' = \sigma'^{-1}$).

3) 3.1. La composée $\sigma \circ \sigma'$ est un déplacement qui laisse fixe (point par point) la droite $O + (\overrightarrow{D} \oplus \overrightarrow{D'})^\perp$, puisque pour tout point P de cette droite, on a $\overrightarrow{OP} \in (\overrightarrow{D} \oplus \overrightarrow{D'})^\perp = \overrightarrow{D}^\perp \cap \overrightarrow{D'}^\perp$, donc $L_\sigma(\overrightarrow{OP}) = L'_\sigma(\overrightarrow{OP}) = -\overrightarrow{OP}$. Donc $\sigma \circ \sigma'$ est une rotation (c.f. le rappel fait en préambule : les seuls éléments de G ayant des points fixes sont les rotations).

3.2. Si ρ est la rotation d'axe D, d'angle ϑ, alors $\rho = (\rho_0)^2$ avec ρ_0 la rotation d'axe D, d'angle $\frac{\vartheta}{2}$.

Il reste à voir (cf. la démarche de la question 2) que toute rotation est la composée de deux symétries orthogonales par rapport à des droites. Soit donc ρ une rotation d'axe D et d'angle ϑ, qu'on peut supposer différent de 0 modulo 2π. Fixons O un point de D et $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v'}$ deux vecteurs non nuls de $\overrightarrow{D}^\perp$ formant un angle orienté $[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'}] = \frac{\vartheta}{2}$. Considérons les symétries orthogonales σ et σ' par rapport aux droites $O + < \overrightarrow{v} >$ et $O + < \overrightarrow{v'} >$ respectivement. Alors la composée $\sigma' \circ \sigma$ est une rotation d'axe D, d'après la question 3.1, et le calcul de $\sigma' \circ \sigma(O + \overrightarrow{v}) = \sigma'(O + \overrightarrow{v})$ montre que l'angle de cette rotation est ϑ (là encore, faire un dessin peut aider ...), donc $\sigma' \circ \sigma = \rho$.

4) D'après les deux questions précédentes, le sous-groupe des commutateurs $[G, G]$ de G contient les translations et les rotations. Par composition, il contient donc également les vissages (produits d'une rotation d'axe D et d'une translation de vecteur non nul $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{D}$) ; le sous-groupe $[G, G]$ contient donc G en entier.

Exercice 3. 1) L'ensemble des points fixes de σ_i est l'hyperplan H_i. On a clairement $E^G \subseteq H_i$, pour tout i, et réciproquement, tout point de $\bigcap_{1 \le i \le k} H_i$ est fixé par les σ_i, $1 \le i \le k$, donc par tous les éléments de G. Donc $E^G = \bigcap_{1 \le i \le k} H_i$.

On a $E^G = \{0\} \Leftrightarrow (E^G)^\perp = E$. Comme $E^G = \bigcap_{1 \le i \le k} H_i$ et comme $H_i^\perp = < x_i >$, on a $(E^G)^\perp = \sum_{1 \le i \le k} < x_i >$, donc $E^G = \{0\} \Leftrightarrow \sum_{1 \le i \le k} < x_i > = E$, c'est-à-dire $E^G = \{0\}$ si et seulement si les x_i forment une famille génératrice de E.

2) Si σ est la symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace A de E, et si $g \in O(E)$, alors le conjugué $g \circ \sigma \circ g^{-1}$ est la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace $g(A)$ de E (exercice ! Écrire l'action du conjugué relativement à la décomposition $E = g(A) \oplus g(A)^\perp$, et profiter du fait que $g(A)^\perp = g(A^\perp)$ ...).

Considérons alors $x \in \Delta$ et $g \in G$, et montrons que $g(x) \in \Delta$. D'après la remarque ci-dessus, on a $\sigma_{<g(x)>^\perp} = g \circ \sigma_{<x>^\perp} \circ g^{-1}$, mais par hypothèse sur x, il existe $g' \in G$ et $1 \le i \le k$ tels que $\sigma_{<x>^\perp} = g' \circ \sigma_i \circ g'^{-1}$, on a donc $s_{<g(x)>^\perp} = g \circ g' \circ \sigma_i \circ g'^{-1} \circ g^{-1} = (gg') \circ \sigma_i \circ (gg')^{-1}$, donc $g(x) \in \Delta$.
Rq : En fait, comme $\sigma_i = \sigma_{<x_i>^\perp}$, le raisonnement précédent montre que $\Delta = \{g(x_i) \mid 1 \le i \le k, g \in G\}$. En particulier, Δ contient les x_i, et les $-x_i = \sigma_i(x_i)$.

3) On déduit de la question précédente que l'on a un morphisme de G dans $\mathscr{S}_\Delta$, donné par la restriction $g \mapsto g_{|\Delta}$ (le vérifier proprement). Si Δ est fini, alors le groupe $\mathscr{S}_\Delta$ est fini. Si $E^G = \{0\}$, i.e. si les x_i forment une famille génératrice de E, alors tout endomorphisme de E est entièrement déterminé par son action sur les x_i, donc aussi par son action sur l'ensemble Δ (qui contient les x_i), et le morphisme $G \to \mathscr{S}_\Delta$, $g \mapsto g_{|\Delta}$, est alors injectif. Lorsque les deux conditions sont réalisées, le groupe G s'injecte dans un groupe fini, donc est fini.

4) On vérifie facilement que les σ_i commutent deux à deux, et cela implique que le groupe G est abélien. On en déduit immédiatement que $\Delta = \{\pm x_i \mid 1 \le i \le k\}$ puisque les seuls vecteurs de norme 1 tels que $\sigma_{<x>^\perp} = \sigma_i$ sont x_i et $-x_i$.

De plus, en profitant des relations de commutation entre les σ_i et du fait que $\sigma_i^2 = Id_E$, on voit que tout élément $g \in G$ peut s'écrire $g = \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_n}$ avec $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_n \le k$ (en partant d'un produit fini quelconque d'éléments σ_i, regrouper les différentes occurences d'un mÃªme σ_i par commutation, puis simplifier tous les carrés apparus) — on parlera d'une écriture *réduite* de g. Cela montre déjà que G est de cardinal $\le 2^k$. On a en fait égalité, pour voir cela, il suffit de montrer que tout élément de $g \in G$ possède en fait une *unique* écriture réduite, autrement dit que deux écritures réduites distinctes définissent deux éléments distincts de G. Mais on vérifie facilement, par récurrence sur n, que $\sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_n}$ est en fait la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace $\bigcap_{1 \le j \le n} H_{i_j} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid \forall 1 \le j \le n, x_{i_j} = 0\}$ de E, donc deux écritures réduites distinctes définissent bien deux symétries distinctes dans $O(E)$.

Exercice 4 — 1) Quel que soit le point p de $X - \{o\}$, le point $\iota(p)$ est distinct du point o puisque $||\overrightarrow{o\iota(p)}|| =$

$\frac{a}{||\overrightarrow{op}||^2}||\overrightarrow{op}|| = \frac{a}{||\overrightarrow{op}||} \neq 0$ et

$$\iota(\iota(p)) = o + \frac{a}{||\overrightarrow{o\iota(p)}||^2}\overrightarrow{o\iota(p)} = o + \frac{||\overrightarrow{op}||^2}{a}\overrightarrow{o\iota(p)} = o + \overrightarrow{op} = p.$$

On a donc $\iota^2 = \mathrm{id}_{X-\{o\}}$, ce qui établit en particulier que l'application ι est une bijection de $X-\{o\}$ dans lui-même.

Un point p de $X-\{o\}$ est fixé par l'inversion ι si et seulement si $\frac{a}{||\overrightarrow{op}||^2} = 1$, donc si et seulement si p appartient au cercle de centre o et de rayon $\sqrt{a}$.

Remarque : on dit également que l'application ι est l'inversion par rapport au cercle de centre o et de rayon $\sqrt{a}$..

2) 2.1. Soit h l'homothétie de centre o et de rapport $\rho \in \mathbb{R}-\{0\}$. Quel que soit le point $p \in X-\{o\}$,

$$(h\circ\iota)(p) = o + \rho\frac{a}{||\overrightarrow{op}||^2}\overrightarrow{op} \quad \text{et} \quad (\iota\circ h)(p) = o + \frac{a}{||\overrightarrow{oh(p)}||^2}\overrightarrow{oh(p)} = o + \frac{a\rho}{\rho^2||\overrightarrow{op}||^2}\overrightarrow{op}$$

donc

- si $\rho > 0$,
  (i) $h\circ\iota$ est l'inversion de pôle o et de puissance ρa ;
  (ii) $\iota\circ h$ est l'inversion de pôle o et de puissance $\rho^{-1}a$;
- si $\rho < 0$,
  (i) $h\circ\iota$ est la composée de l'inversion de pôle o et de puissance $a|\rho|$ par la symétrie de centre o ;
  (ii) $\iota\circ h$ est la composée de l'inversion de pôle o et de puissance $a|\rho|^{-1}$ par la symétrie de centre o.

2.2. Soit α le milieu du segment $[xy]$; le vecteur $\overrightarrow{c\alpha}$ est orthogonal à la droite D. On a

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{px}|\overrightarrow{py}) &= (\overrightarrow{p\alpha}+\overrightarrow{\alpha x}|\overrightarrow{p\alpha}+\overrightarrow{\alpha y})\\ &= (\overrightarrow{p\alpha}|\overrightarrow{p\alpha}) + (\overrightarrow{p\alpha}|\overrightarrow{\alpha x}) + (\overrightarrow{p\alpha}|\overrightarrow{\alpha y}) + (\overrightarrow{\alpha x}|\overrightarrow{\alpha y})\\ &= ||p-\alpha||^2 + (\overrightarrow{\alpha x}|\overrightarrow{\alpha y})\end{aligned}$$

car $\overrightarrow{\alpha x}+\overrightarrow{\alpha y} = 0$, donc

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{px}|\overrightarrow{py}) &= ||p-\alpha||^2 - ||\alpha - x||^2\\ &= ||p-c||^2 - R^2\end{aligned}$$

puisque $||p-\alpha||^2 = ||p-c||^2 - ||\alpha-c||^2$ et $R^2 = ||x-c||^2 = ||\alpha-c||^2 + ||\alpha-x||^2$.

2.3. Les triangles (p,p',x) et (p,p',x') étant respectivement rectangles en x et en p',

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{px}|\overrightarrow{px'}) &= (\overrightarrow{pp'}|\overrightarrow{px'}) + (\overrightarrow{p'x}|\overrightarrow{px'})\\ &= (\overrightarrow{pp'}|\overrightarrow{px'})\\ &= (\overrightarrow{pp'}|\overrightarrow{pp'}) + (\overrightarrow{pp'}|\overrightarrow{p'x'})\\ &= (\overrightarrow{pp'}|\overrightarrow{pp'}).\end{aligned}$$

3)

(i) Soit D une droite passant par le point o. Étant donné un point $p \in D-\{o\}$, $\iota(p) \in (op) = D$ puisque les points o, p et $\iota(p)$ sont alignés ; on a ainsi $\iota(D-\{o\}) \subset D-\{o\}$. En appliquant ι à cette inclusion, on obtient $\iota^2(D-\{o\}) \subset \iota(D-\{o\})$ et donc $D-\{o\} \subset \iota(D-\{o\}) \subset D-\{o\}$ puisque $\iota^2(D-\{o\}) = D-\{o\}$ en vertu de la première question. Nous avons ainsi prouvé l'égalité $\iota(D-\{o\}) = D-\{o\}$, soit encore $\iota(D-\{o\}) \cup \{o\} = D$.

(ii) Soit $C \subset X$ un cercle de centre c et de rayon R ne passant par o. En vertu de la question 2.2, la *puissance* du point o par rapport au cercle C est le nombre réel non nul

$$||c-o||^2 - R^2 = (\overrightarrow{ox}|\overrightarrow{oy}),$$

où x et y sont n'importe quels points de C tels que o, x et y soient alignés.

– Si $||c-o||^2 - R^2 > 0$, cette identité signifie précisément que le point y est l'image du point x par l'inversion ι' de pôle o et de puissance $b = ||c-o||^2 - R^2$; on a donc $\iota'(C) = C$. Il reste à appliquer la question 2.1 pour conclure : si h est l'homothétie de centre o et de rapport $b^{-1}a$, $\iota = h \circ \iota'$ et donc $\iota(C) = h(\iota'(C)) = h(C)$ est l'image d'un cercle par une homothétie, c'est-à-dire un cercle.

– Soit σ la symétrie de centre o. Si $||c-o||^2 < R^2$, l'identité précédente signifie précisément que le point $\sigma(y)$ est l'image du point x par l'inversion ι' de pôle o et de puissance $b = R^2 - ||oc-||^2$; on a donc $\iota'(C) = \sigma(C)$. Il reste à appliquer la question 2.1 pour conclure : si h est l'homothétie de centre o et de rapport $b^{-1}a$, $\iota = h \circ \iota'$ et donc $\iota(C) = h(\iota'(C)) = h(\sigma(C)) = (h \circ \sigma)(C)$ est l'image d'un cercle par une homothétie, c'est-à-dire un cercle.

(iii) Soit D une droite ne passant pas par o. Notant o' le projeté orthogonal du point o sur la droite D et désignant par C le cercle de diamètre $[oo']$, nous avons établi à la question 2.3 l'identité

$$(\overrightarrow{ox}|\overrightarrow{ox'}) = ||\overrightarrow{oo'}||^2$$

pour tous points $x \in D$ et $x' \in C - \{o\}$ tels que les points o, x et x' soient alignés. Ceci signifie précisément que le point x' est l'image du point x par l'inversion ι' de pôle o et de puissance $b = ||\overrightarrow{oo'}||^2$, de sorte que $\iota'(D) = C - \{o\}$. Il reste à appliquer la question 2.1 pour conclure : si h est l'homothétie de centre o et de rapport $b^{-1}a$, $\iota = h \circ \iota'$ et donc

$$\iota(D) \cup \{o\} = h(\iota'(D)) \cup \{o\} = h(C - \{o\}) \cup \{o\} = h(C)$$

est un cercle passant par o.

(iv) Soit C un cercle passant par o et soit o' le point diamétralement opposé sur C. Ce que l'on vient de dire en (iii) établit que D est l'image de $C - \{o\}$ par l'inversion de pôle o et de puissance $b = ||\overrightarrow{oo'}||^2$ et il suffit d'appliquer la question 2.1 pour conclure : si h est l'homothétie de centre o et de rapport $b^{-1}a$, $\iota = h \circ \iota'$ et donc

$$\iota(C - \{o\}) = h(D)$$

est une droite ne passant pas par o.

4) Il suffit de traduire la définition de l'application ι : l'image du point $p \in X - \{o\}$ de coordonnées (x, y) est le point de $X - \{o\}$ de coordonnées $(x', y') = \left(\frac{ax}{x^2+y^2}, \frac{ay}{x^2+y^2}\right)$.

(i) Une droite D passant par o a une équation de la forme $ux + vy = 0$; $\iota(D - \{o\})$ est alors le sous-ensemble de $X - \{o\}$ défini par l'équation $aux' + avy' = 0$ et donc $\iota(D - \{o\}) = D - \{o\}$.

(ii) Un cercle C ne passant par o a une équation de la forme $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ avec $\gamma \neq 0$ et $\alpha^2 + \beta^2 - 4\gamma > 0$; $\iota(C)$ est alors le sous-ensemble de $X - \{o\}$ défini par l'équation

$$\frac{a}{x'^2 + y'^2} + a\alpha \frac{x'}{x'^2 + y'^2} + a\beta \frac{y'}{x'^2 + y'^2} + \gamma = 0,$$

soit encore

$$\gamma(x'^2 + y'^2) + a\alpha x' + a\beta y' + a = 0.$$

Comme $\gamma \neq 0$ et

$$\left(\frac{a\alpha}{a\gamma}\right)^2 + \left(\frac{a\beta}{a\gamma}\right)^2 - 4\frac{a}{a\gamma} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 4\gamma}{\gamma^2} > 0,$$

il s'agit d'un cercle (ne passant pas par o puisque $a \neq 0$).

(iii) Une droite D ne passant par o a une équation de la forme $ux+vy+w=0$ avec $w \neq 0$ et $u^2+v^2>0$; $\imath(D)$ est alors le sous-ensemble de $X-\{o\}$ défini par l'équation $aux'+avy'+w(x'^2+y'^2)=0$, c'est-à-dire un cercle passant par le point o.

(iv) Enfin, un cercle C passant par o a une équation de la forme $x^2+y^2+\alpha x+\beta y=0$ avec $\alpha^2+\beta^2>0$; $\imath(C-\{o\})$ est alors le sous-ensemble de $X-\{o\}$ d'équation

$$\frac{a^2}{x'^2+y'^2}+a\alpha\frac{x'}{x'^2+y'^2}+a\beta\frac{y'}{x'^2+y'^2}=0,$$

soit encore

$$\alpha x'+\beta y'+a=0,$$

et $\imath(C-\{o\})$ est donc une droite (ne passant pas par le point o).

5) Il est commode de désigner par $\mathscr{E}$ l'ensemble des droites et des cercles du plan X. On observera que deux cercles (resp. une cercle et une droite) sont tangents si et seulement si leur intersection est réduite à un point.

– Soient C et C' deux cercles tangents en un point $p \neq o$; en vertu de la question 3, $\imath(C-\{o\})$ est un cercle ne passant pas par o ou une droite ne passant pas par o. Comme $\imath$ est une bijection de $X-\{o\}$ dans lui-même, $\imath(C-\{o\}) \cap \imath(C'-\{o\}) = \imath(C \cap C') = \{\imath(p)\}$ et les éléments $\imath(C-\{o\})$ et $\imath(C-\{o\})$ de $\mathscr{E}$ sont donc tangents au point $\imath(p)$.
– Si C et C' deux cercles tangents au point o, $\imath(C-\{o\})$ et $\imath(C'-\{o\})$ sont deux droites en vertu de la question 3 (iv) ; ces deux droites sont en outre parallèles car toutes deux sont perpendiculaires à la droite portant les diamètres de C et C' qui passe par o.
– Soient C un cercle et D une droite tangents en un point $p \neq o$; en vertu de la question 3, $\imath(C)$ est un élément de $\mathscr{E}$ ne passant pas par o tandis que $\imath(D-\{o\}) \cup \{o\}$ est un élément de $\mathscr{E}$ passant par o. L'application $\imath$ étant une bijection de $X-\{o\}$, $\imath(C-\{o\}) \cap \imath(D-\{o\}) = \imath(C \cap D) = \{\imath(p)\}$ et donc

$$\imath(C-\{o\}) \cap (\imath(D-\{o\}) \cup \{o\}) = \imath(C-\{o\}) \cap \imath(D-\{o\}) = \{\imath(p)\}$$

puisque $o \notin \imath(C-\{o\})$. On en déduit que $\imath(C-\{o\})$ et $\imath(D-\{o\}) \cup \{o\}$ sont tangents au point $\imath(p)$.
– Soient D et D' deux droites parallèles distinctes ; l'une d'entre-elles au moins, disons D, ne passe pas par le point o et, en vertu de la question 3, $\imath(D) \cup \{o\}$ est alors un cercle passant par o tandis que $\imath(D'-\{o\}) \cup \{o\}$ est un cercle passant par o ou une droite passant par o selon que $o \notin D'$ ou $o \in D'$. On a

$$\imath(D-\{o\}) \cap \imath(D'-\{o\}) = \imath((D-\{o\}) \cap (D'-\{o\})) = \emptyset$$

et donc

$$(\imath(D-\{o\}) \cup \{o\}) \cap (\imath(D'-\{o\}) \cup \{o\}) = (\imath(D-\{o\}) \cap \imath(D'-\{o\})) \cup \{o\} = \{o\},$$

ce qui prouve que les éléments $\imath(D-\{o\}) \cup \{o\}$ et $\imath(D'-\{o\}) \cup \{o\}$ de $\mathscr{E}$ sont tangents au point o.

6) Soient C et C' deux cercles distincts de centres respectifs c et c' ; on suppose $C \cap C' \neq \emptyset$.

6.1. On observe sur un dessin et on vérifie immédiatement que l'on a

$$\overrightarrow{pc'} = ||\overrightarrow{pc'}||\frac{\overrightarrow{cp'}}{||\overrightarrow{cp'}||} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{pc} = ||\overrightarrow{pc}||\frac{\overrightarrow{c'p'}}{||\overrightarrow{c'p'}||},$$

d'où

$$\begin{aligned}[\overrightarrow{pc},\overrightarrow{pc'}] &= \left[||\overrightarrow{pc}||\frac{\overrightarrow{c'p'}}{||\overrightarrow{c'p'}||}, ||\overrightarrow{pc'}||\frac{\overrightarrow{cp'}}{||\overrightarrow{cp'}||}\right] = [\overrightarrow{c'p'},\overrightarrow{cp'}] \\ &= -[\overrightarrow{cp'},\overrightarrow{c'p'}] = -[\overrightarrow{p'c},\overrightarrow{p'c'}].\end{aligned}$$

6.2. La tangente au cercle C en un point p est la droite perpendiculaire à (cp) passant par le point p ; de manière équivalente, la droite passant par p et perpendiculaire à la tangente à C en p est la droite (cp).

6.3. Soient D et D' deux droites perpendiculaires en un point p.

– Si $p = o$, $\iota(D - \{o\}) \cup \{o\} = D$ et $\iota(D - \{o\}) \cup \{o\} = D'$ sont deux droites orthogonales.
– Si $o \notin D \cup D'$, $C = \iota(D - \{o\}) \cup \{o\}$ et $C' = \iota(D - \{o\})$ sont deux cercles passant par le point o. Notant c et c' leurs centres respectifs, les droites (oc) et (oc') sont respectivement perpendiculaires aux droites D et D' ; comme D et D' sont perpendiculaires, (oc) et (oc') sont perpendiculaires et donc (oc') (resp. (oc)) est la tangente à C (resp. à C') au point o. Les cercles C et C' ont ainsi des tangentes perpendiculaires au point o, ce qui signifie qu'ils sont orthogonaux.
– Enfin, si $o \in D$ et $o \notin D'$, $C' = \iota(D' - \{o\}) \cup \{o\}$ est un cercle passant par le point o dont la tangente au point o est la parallèle à D' passant par o ; comme les droites D et D' sont perpendiculaires, D est perpendiculaire à la tangente à C' en o et donc $\iota(D - \{o\}) \cup \{o\}$ et $\iota(D' - \{o\}) \cup \{o\}$ sont orthogonaux.

Nous avons finalement vérifié que l'inversion ι transformait deux éléments orthogonaux de $\mathscr{E}$ en des éléments de $\mathscr{E}$ orthogonaux.

6.4. Soient C et C' deux cercles orthogonaux en un point p et soient T_pC et T_pC' les tangentes respectives à C et C' au point p. D'après la question précédente, les images par ι des droites T_pC et T_pC' sont des éléments de $\mathscr{E}$ orthogonaux. D'autre part, d'après la question 5, ι transforme C et T_pC d'une part, C' et T_pC' d'autre part, en des éléments de $\mathscr{E}$ tangents. Il en découle que les tangentes à $\iota(C)$ et $\iota(C')$ au point $\iota(p)$ coïncident avec celles à $\iota(T_pC - \{o\}) \cup \{o\}$ et $\iota(T_pC' - \{o\}) \cup \{o\}$ en ce point, donc sont perpendiculaires, ce qui prouve que les éléments $\iota(C)$ et $\iota(C')$ de $\mathscr{E}$ sont orthogonaux.

Un raisonnement parfaitement analogue établit que l'inversion ι transforme un cercle et une droite orthogonaux en des éléments de $\mathscr{E}$ orthogonaux.

Exercice 5 — 1) Soit o un point dans $C \cap C'$. Toute inversion de pôle o transforme C et C' en des droites, lesquelles sont parallèles ou sécantes selon que C et C' sont ou ne sont pas tangents.

2) 2.1. Soit L la droite parallèle à D passant par le point c'' ; L coupe le cercle C'' en deux points diamétralement opposés x et y. On désigne par L' la droite perpendiculaire à L passant par x et par x' le point d'intersection des droites L' et D. Le cercle Γ de centre x' passant par x satisfait aux conditions requises :
– Γ et D sont orthogonaux puisque le centre de Γ appartient à D (cf. la question 6.2 de l'exercice précédent) ;
– les cercles Γ et C'' sont orthogonaux puisque leurs tangentes respectives au point x sont les droites perpendiculaires L et L' ;
– le cercle Γ et la droite L'', perpendiculaire à D passant par c'', ont deux points d'intersection distincts car la distance du centre x' de Γ à la droite L'' est strictement inférieure au rayon de Γ : en effet,

$$\mathrm{dist}(x', L'') = \mathrm{dist}(x, c'') < \mathrm{dist}(c'', D) = \mathrm{dist}(x, x')$$

puisque le cercle C'' est disjoint de la droite D (observer ces distances sur un dessin).

2.2. Soit o l'un des deux points du cercle C' appartenant à la droite $L = (cc')$ et soit ι une inversion de pôle o. Comme on l'a établi au cours de l'exercice précédent, $\iota(C)$ est un cercle, $\iota(C' - \{o\})$ est une droite disjointe de $\iota(C)$ et ι transforme la droite L en elle-même. D'après la question précédente, il existe un cercle Γ' orthogonal à $\iota(C)$ et $\iota(C')$ coupant L en deux points distincts ; $\Gamma = \iota(\Gamma' - \{o\})$ est alors un cercle ou une droite, orthogonal aux cercles C et C' en vertu de la question 6 de l'exercice précédent. La seule droite orthogonale à C et C' étant L, $\iota(\Gamma' - \{o\})$ est un cercle puisque $\Gamma' \neq L$ et nous avons donc établi l'existence d'un cercle Γ orthogonal à C et C' qui coupe la droite L en deux points distincts, notés x et y.

2.3. Le cercle Γ étant orthogonal aux cercles C et C', ses points d'intersection x et y avec la droite (cc') ne sont pas situés sur $C \cup C'$.

Une inversion ι de pôle x transforme les cercles C et C' en des cercles puisque $x \notin C \cup C'$. Elle transforme la droite $L = (cc')$ en elle-même puisque $x \in (cc')$ et elle transforme le cercle Γ en une droite puisque $x \in \Gamma$. Les droites $\iota(L - \{x\}) \cup \{x\}$ et $\iota(\Gamma - \{x\})$ sont en outre sécantes au point $\iota(y)$ puisque $y \in \Gamma \cap L$. Nous savons par ailleurs que ces droites sont orthogonales aux cercles $\iota(C)$ et $\iota(C')$ car la droite L et le cercle Γ sont tous deux orthogonaux aux cercles C et C' (appliquer la question 6 de l'exercice précédent).

Toute droite orthogonale à un cercle passe par le centre d'icelui (question 6 de l'exercice précédent). Cela a pour conséquence que les cercles $\iota(C)$ et $\iota(C')$ sont centrés au point d'intersection $\iota(y)$ des droites $\iota(L - \{o\}) \cup \{o\}$ et $\iota(\Gamma - \{o\})$ et nous avons finalement établi le résultat suivant : deux cercles disjoints peuvent être transformés, par une inversion convenable, en deux cercles concentriques.

3) Soient C et C' deux cercles disjoints tels que C' soit intérieur à C et soit (Γ_n) une suite de cercles telle que
- Γ_0 soit tangent à C et C' ;
- Γ_1 soit distinct de Γ_0 et tangent à C, C' et Γ_0 ;
- pour tout $n \geq 1$, Γ_{n+1} soit distinct de Γ_n et Γ_{n-1} et tangent à C, C' et Γ_n.

Supposons tout d'abord que les cercles C et C' soient concentriques et soit C'' le cercle équidistant de C et C'. Un cercle est tangent à C et C' si et seulement s'il est centré sur C'' et de diamètre $R_C - R'_C$. La suite (γ_n) des centres des cercles Γ_n est une suite de points de C'' tels que $\mathrm{dist}(\gamma_{n+1}, \gamma_n) = \mathrm{dist}(\gamma_1, \gamma_0) = R_C - R'_C$ pour tout n. La suite (Γ_n) est périodique (i.e. il existe un entier n_0 tel que $\Gamma_{n_0} = \Gamma_0$) si et seulement si la suite (γ_n) est périodique, donc si et seulement si l'angle $\vartheta = [\overrightarrow{c\gamma_0}, \overrightarrow{c\gamma_1}]$ est de la forme $\frac{2\pi}{N}$ avec $N \in \mathbb{N} - \{0\}$. Comme $\cos(\vartheta) = 1 - \frac{2(R_C - R'_C)^2}{(R_C + R'_C)^2}$ (le vérifier sur un dessin), la périodicité de la suite (Γ_n) ne dépend que de la position relative des cercles C et C', non pas du choix du cercle initial Γ_0.

Considérons maintenant deux cercles disjoints C et C' tels que C' soit intérieur à C et soit (Γ_n) une suite de cercles vérifiant les mêmes conditions que précédemment. Comme on l'a établi, il existe une inversion ι telle que $\iota(C)$ et $\iota(C')$ soient deux cercles concentriques ; $(\iota(\Gamma_n))$ est alors une suite de cercles satisfaisant aux conditions ci-dessus (cf. exercice précédent, question 4), qui est périodique si et seulement si tel est le cas pour la suite (Γ_n). Nous en déduisons que cette dernière propriété ne dépend que des cercles C et C' et non pas de la suite (Γ_n) elle-même.

Remarque : on trouvera des dessins dans le livre Géométrie *de Marcel Berger (éditions Nathan), à la page 363 du tome 1 (chapitre 10, section 10.10.3).*

4) 4.1. Soient C et C' deux cercles disjoints non concentriques. On sait qu'il existe une inversion ι telle que $\iota(C)$ et $\iota(C')$ soient deux cercles concentriques. Comme ι préserve l'orthogonalité, $\iota(\mathscr{F})$ est l'ensemble des éléments de $\mathscr{E}$ orthogonaux à $\iota(C)$ et $\iota(C')$, c'est-à-dire l'ensemble des droites passant par le centre commun o des cercles $\iota(C)$ et $\iota(C')$; il en découle que $\mathscr{F}$ est l'image par un inversion de l'ensemble des droites passant par o. Comme les cercles C et C' ne sont pas concentriques, seule la droite reliant les centres leur est orthogonale et le pôle de l'inversion ι est par conséquent distinct de o ; il en découle que $\mathscr{F}$ est l'ensemble des cercles et droites passant par les deux points distincts que sont $\iota(o)$ et le centre de ι.

4.2. Soient C et C' deux cercles tangents en un point p. Une inversion ι de pôle p transforme C et C' en des droites parallèles, de sorte que $\iota(\mathscr{F})$ soit l'ensemble des droites perpendiculaires à $\iota(C - \{o\})$; $\mathscr{F}$ est par conséquent l'ensemble des éléments de $\mathscr{E}$ passant par o et orthogonaux à la tangente commune aux cercles C et C' au point p.

4.3. Soient C et C' deux cercles sécants et non tangents. Une inversion de pôle $p \in C \cap C'$ transforme C et C' en deux droites sécantes en p, de sorte que $\iota(\mathscr{F})$ soit l'ensemble des cercles concentriques de centre p. Il en découle que deux éléments distincts de $\mathscr{F}$ sont disjoints.

4.4. On trouvera des dessins dans le livre *Géométrie* de Marcel Berger (éditions Nathan), aux pages 360 et 361 du tome 1 (chapitre 10, section 10.10.1).

Exercice 6 — 1) L'ensemble $\Gamma_{\mathbf{a}}$ est
- $\mathbb{R}^2$ si $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$;
- vide si $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ et $a_3 \neq 0$;
- une droite si $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$ ou $a_2 \neq 0$;
- vide si $a_0 \neq 0$ et $a_1^2 + a_2^2 - 4a_3a_0 < 0$ (cette équation définit un cercle de centre $(-\frac{a_1}{2a_0}, -\frac{a_2}{2a_0})$ et de rayon « imaginaire pur ») ;
- un point si $a_0 \neq 0$ et $a_1^2 + a_2^2 - 4a_0a_3 = 0$ (cette équation définit un cercle de centre $(-\frac{a_1}{2a_0}, -\frac{a_2}{2a_0})$ de rayon nul) ;
- un cercle si $a_0 \neq 0$ et $a_1^2 + a_2^2 - 4a_0a_3 > 0$ (cette équation définit un cercle de centre $(\frac{a_1}{2a_0}, \frac{a_2}{2a_0})$ et de rayon $\frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 4a_0a_3}}{2|a_0|}$.)

2) Vu la question 1, l'image de l'application $\gamma : \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^4 \mid q(\mathbf{a}) \geq 0\} \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$ est effectivement le sous-ensemble $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \cup \mathscr{E}$ de $\mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$.

Soient $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \mathbb{R}^4 - \{\mathbf{0}\}$ deux quadruplets tels que $q(\mathbf{a}), q(\mathbf{a}') \geq 0$ et $\Gamma_{\mathbf{a}} = \Gamma_{\mathbf{a}'}$.

– Si $\Gamma_{\mathbf{a}} = \Gamma_{\mathbf{a}'} = \emptyset$, $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}'$ sont tous deux proportionnels à $(0,0,0,1)$.
– Si $\Gamma_{\mathbf{a}} = \Gamma_{\mathbf{a}'}$ est un point ou un cercle, alors $a_0, a'_0 \neq 0$, $\mathbf{a} = a_0(1, \frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \frac{a_3}{a_0})$ et $\mathbf{a}' = a'_0(1, \frac{a'_1}{a'_0}, \frac{a'_2}{a'_0}, \frac{a'_3}{a'_0})$; on voit finalement en considérant le centre et le rayon (éventuellement nul) du cercle $\Gamma_{\mathbf{a}} = \Gamma_{\mathbf{a}'}$ que $\mathbf{a}' = \frac{a'_0}{a_0}\mathbf{a}$.
– Enfin, si $\Gamma_{\mathbf{a}} = \Gamma_{\mathbf{a}'}$ est une droite, $a_0 = a'_0 = 0$ et on voit que les quadruplets $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}'$ sont proportionnels en condiérant un vecteur normal et un point de cette droite.

Nous avons vérifié que l'application γ induit une bijection de $\overline{\mathscr{C}}$ sur $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \cup \mathscr{E}$.

3) Soit $D \in \mathscr{C}$ et soit $\mathbf{a} \in D - \{\mathbf{0}\}$. On désigne par $H_0 \subset \mathbb{R}^4$ l'hyperplan d'équation $a_0 = 0$.

3.1. Vu la question 1,
– $\gamma(D) \in \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ si et seulement si $a_0 \neq 0$ et $q(\mathbf{a}) = 0$ ou si $\mathbf{a} = (0,0,0,1)$; comme $Q \cap H_0 = \{(0,0,0,1)\}$, la première condition équivaut bien à $D \subset Q$;
– $\gamma(D)$ est une droite si et seulement si $a_0 = 0$ et $a_1^2 + a_2^2 > 0$, donc si et seulement si $D \in \mathscr{C}$ et $D \subset H_0$;
– $\gamma(D)$ est un cercle si et seulement si $a_0 \neq 0$ et $q(\mathbf{a}) > 0$, donc si et seulement si $D \in \mathscr{C}$ et $D \nsubseteq H_0$.

3.2. Si $D \in \mathscr{C}$, $q(\mathbf{a}) = a_1^2 + a_2^2 - 4a_0a_3 > 0$ et donc a_0 ne peut s'annuler. L'équation de $\Gamma_{\mathbf{a}}$ s'écrit alors sous la forme
$$0 = a_0(x^2+y^2) + a_1x + a_2y + a_3 = a_0\left\{\left(x + \frac{a_1}{2a_0}\right)^2 + \left(y + \frac{a_2}{2a_0}\right)^2 - \frac{q(\mathbf{a})}{4a_0^2}\right\}$$
et il s'agit donc du cercle de centre $(-\frac{a_1}{2a_0}, -\frac{a_2}{2a_0})$ et de rayon $\frac{\sqrt{q(\mathbf{a})}}{2|a_0|}$.

4. 4.1. Vu la question 1, l'unique droite dans $\overline{\mathscr{C}}$ d'image p est $D_p = \mathbb{R}(1, -2x_0, -2y_0, x_0^2 + y_0^2)$.

4.2. Étant donné un point $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$,
$$R(\mathbf{a}, (1, -2x_0, -2y_0, x_0^2+y_0^2)) = -2a_1x_0 - 2a_2y_0 - 2(a_3 + a_0(x_0^2+y_0^2)) = -2\left(a_0(x_0^2+y_0^2) + a_1x_0 + a_2y_0 + a_3\right)$$
s'annule si et seulement si le point p appartient à $\Gamma_{\mathbf{a}}$.

4.3. Les droites D et D_∞ sont orthogonales si et seulement si $0 = R(\mathbf{a}, (0,0,0,1)) = -4a_0$, donc si et seulement si $D \subset H_0$.

4.4. Soient $D, D' \in \mathscr{C}$ deux droites distinctes contenues dans H_0. Les droites $\gamma(D)$ et $\gamma(D')$ dans $\mathbb{R}^2$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs (a_1, a_2) et (a'_1, a'_2) sont proportionnels, ce qui est le cas si et seulement si $|a_1a'_1 + a_2a'_2| = \sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{{a'_1}^2 + {a'_2}^2}$ (cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz). D'autre part, une droite de $\overline{\mathscr{C}}$ contenue dans Q est soit D_∞, soit de la forme D_p avec $p \in \mathbb{R}^2$; comme D_p et D sont orthogonales si et seulement si le point p appartient à $\gamma(D)$, les droites $\gamma(D)$ et $\gamma(D')$ sont orthogonales si et seulement si D_∞ est l'unique droite de $\overline{\mathscr{C}}$ contenue dans Q qui soit simultanément orthogonale à D et D'.

5) Soient $D, D' \in \mathscr{C}$ deux droites et $\mathbf{a} \in D - \{\mathbf{0}\}, \mathbf{a}' \in D' - \{\mathbf{0}\}$. La restriction de la forme quadratique q au plan $\{t\mathbf{a} + s\mathbf{a}',\ (s,t) \in \mathbb{R}^2\}$ de $\mathbb{R}^4$ engendré par D et D' est positive (resp. définie positive) si et seulement si $q(t\mathbf{a}+s\mathbf{a}') \geq 0$ pour tout couple $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ (resp. > 0 pour tout couple $(s,t) \neq (0,0)$). Comme
$$q(t\mathbf{a}+s\mathbf{a}') = q(\mathbf{a})t^2 + q(\mathbf{a}')s^2 + 2R(\mathbf{a},\mathbf{a}')st$$
et $q(\mathbf{a}), q(\mathbf{a}') > 0$, tel est le cas si et seulement si le discriminant de ce trinôme est négatif (resp. strictement négatif) :
$$R(\mathbf{a},\mathbf{a}')^2 - q(\mathbf{a})q(\mathbf{a}') \leq 0 \quad (\text{resp.} \quad < 0)$$
ou, de manière équivalente,
$$[D, D'] = \frac{|R(\mathbf{a},\mathbf{a}')|}{\sqrt{q(\mathbf{a})q(\mathbf{a}')}} \leq 1 \quad (\text{resp.} < 1).$$
Il revient au même de dire que ce plan a au plus une droite en commun avec la quadrique Q.

6) 6.1. Soient $D, D' \in \mathscr{C}$ deux droites contenues dans H_0 et soient $\mathbf{a} \in D - \{\mathbf{0}\}, \mathbf{a}' \in D' - \{\mathbf{0}\}$. On a
$$|R(\mathbf{a},\mathbf{a}')| = |a_1a'_1 + a_2a'_2| \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{{a'_1}^2+{a'_2}^2} = \sqrt{q(\mathbf{a})q(\mathbf{a}')}$$

(c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz), donc $[D,D'] \leq 1$, et il y a égalité si et seulement si les vecteurs (a_1,a_2) et (a'_1,a'_2) sont proportionnels, donc si et seulement si les droites $\gamma(D)$ et $\gamma(D')$ de $\mathbb{R}^2$ sont parallèles.

6.2. Si les droites D et D' sont concourantes, leur angle est l'unique élément ϑ de $[0,\frac{\pi}{2}]$ tel que $\cos(\vartheta) = \frac{|a_1a'_1+a_2a'_2|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{a_1'^2+a_2'^2}} = [D,D']$.

7) Soient $D,D' \in \mathscr{C}$ deux droites et $\mathbf{a} \in D-\{\mathbf{0}\}, \mathbf{a}' \in D'-\{\mathbf{0}\}$. On suppose que ni D ni D' n'est contenue dans H_0, de sorte que $\gamma(D)$ et $\gamma(D')$ sont deux cercles.

7.1. On a déjà vérifié que $\Gamma_{\mathbf{a}}$ et $\Gamma_{\mathbf{a}'}$ étaient les cercles de centres et de rayons respectifs $c = (-\frac{a_1}{2a_0}, -\frac{a_2}{2a_0})$, $r = \frac{\sqrt{q(\mathbf{a})}}{2|a_0|}$ et $c' = (-\frac{a'_1}{2a'_0}, -\frac{a'_2}{2a'_0})$, $r' = \frac{\sqrt{q(\mathbf{a}')}}{2|a'_0|}$. On a donc

$$\operatorname{dist}(c,c')^2 = \left(\frac{a_1}{2a_0} - \frac{a'_1}{2a'_0}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{2a_0} - \frac{a'_2}{2a'_0}\right)^2 = \frac{q(\mathbf{a})}{4a_0^2} + \frac{q(\mathbf{a}')}{4a'_0} - \frac{R(\mathbf{a},\mathbf{a}')}{2a_0a'_0}.$$

7.2. Les cercles $\gamma(D)$ et $\gamma(D')$ sont sécants si et seulement si $\operatorname{dist}(c,c') \leq r+r'$, donc si et seulement si

$$\operatorname{dist}(c,c')^2 \leq (r+r')^2 = \frac{q(\mathbf{a})}{4a_0^2} + \frac{q(\mathbf{a}')}{4{a_0}'^2} + 2\frac{\sqrt{q(\mathbf{a})}\sqrt{q(\mathbf{a}')}}{4|a_0a'_0|},$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$-\frac{R(\mathbf{a},\mathbf{a}')}{2a_0a'_0} \leq \frac{\sqrt{q(\mathbf{a})q(\mathbf{a}')}}{2|a_0a'_0|}$$

ou, de manière équivalente

$$[D,D'] = \frac{|R(\mathbf{a},\mathbf{a}')|}{\sqrt{q(\mathbf{a})q(\mathbf{a}')}} \leq 1.$$

Soit $p \in \gamma(D)\cap\gamma(D')$. L'angle ϑ entre les tangentes aux cercles $\gamma(D)$ et $\gamma(D')$ au point p est complètement déterminé par l'identité

$$|\operatorname{dist}(c,c')^2 - (r^2+r^2)| = 2rr'|\cos(\vartheta)|$$

(considérer le triangle (c,p,c')) et l'on obtient bien

$$|\cos(\vartheta)| = \frac{|R(\mathbf{a},\mathbf{a}')|}{\sqrt{q(\mathbf{a})q(\mathbf{a}')}} = [D,D'].$$

8) Soient $D,D' \in \mathscr{C}$ deux droites et $\mathbf{a} \in D-\{\mathbf{0}\}, \mathbf{a}' \in D'-\{\mathbf{0}\}$; on suppose $D \subset H_0$ et $D' \not\subseteq H_0$. La distance du centre $c = (-\frac{a'_1}{2a'_0}, -\frac{a'_2}{2a'_0})$ du cercle $\gamma(D')$ à la droite $\gamma(D)$ est

$$\frac{|-a_1\frac{a'_1}{2a'_0} - a_2\frac{a'_2}{2a'_0} + a_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}} = \frac{|R(\mathbf{a},\mathbf{a}')|}{2\sqrt{q(\mathbf{a})}|a0'|}$$

et $\gamma(D)\cap\gamma(D') \neq \emptyset$ si et seulement si cette distance est inférieure au rayon du cercle $\gamma(D)$:

$$\frac{|R(\mathbf{a},\mathbf{a}')|}{2\sqrt{q(\mathbf{a})}|a'_0|} \leq \frac{\sqrt{q(\mathbf{a}')}}{2|a'_0|},$$

soit

$$[D,D'] \leq 1.$$

On démontre comme dans la question précédente que le cosinus de l'angle formé par $\gamma(D)$ et la tangente à $\gamma(D')$ en un point de $\gamma(D)\cap\gamma(D')$ est précisément égal à $[D,D']$.

9) Toutes les assertions découlent immédiatement de ce qui a été établi jusqu'ici.

10) Soient $D,D' \in \mathscr{C}$ deux droites distinctes non contenues dans H_0 et soient P le plan de $\mathbb{R}^4$ qu'elles engendrent.

10.1. Le plan P n'étant pas contenu dans l'hyperplan H_0, $P\cap H_0$ est une droite vectorielle. D'autre part, la restriction de la forme quadratique q au plan P est de signature $(2,0)$, $(1,0)$ ou $(1,1)$; le premier cas équivaut à la condition $q>0$ sur $P-\{\mathbf{0}\}$ — c'est-à-dire $Q\cap P=\{\mathbf{0}\}$ — le troisième équivaut à l'existence d'une base $(\mathbf{e},\mathbf{e}')$ de P telle que $q(x\mathbf{e}+x'\mathbf{e}')=x^2-x'^2$, auquel cas $Q\cap P$ est la réunion des deux droites $\mathbb{R}(\mathbf{e}+\mathbf{e}')$ et $\mathbb{R}(\mathbf{e}-\mathbf{e}')$, et le deuxième à l'existence d'une base $(\mathbf{e},\mathbf{e}')$ de P telle que $q(x\mathbf{e}+x'\mathbf{e}')=x^2$, auquel cas $Q\cap P$ est la droite $\mathbb{R}\mathbf{e}'$.

10.2. Les cercles $\gamma(D)$ et $\gamma(D')$ sont concentriques si et seulement si $D=\mathbb{R}(1,a_1,a_2,a_3)$ et $D'=\mathbb{R}(1,a_1',a_2',a_3')$ avec $a_1'=a_1$ et $a_2'=a_2$. D'un autre côté,

$$P\cap H_0=\{t(1,a_1,a_2,a_3)+s(1,a_1',a_2',a_3')\mid s,t\in\mathbb{R} \text{ et } s+t=0\}=\mathbb{R}(0,a_1'-a_1,a_2'-a_2,a_3'-a_3)$$

est réduit à la droite D_∞ si et seulement si $a_1-a_1'=a_2-a_2'=0$; on a donc bien le résultat annoncé. Enfin, comme

$$R((1,-2a_1,-2a_2,a_1^2+a_2^2),(1,a_1,a_2,a_3))=R((1,-2a_1,-2a_2,a_1^2+a_2^2),(1,a_1,a_2,a_3'))=-2(a_1^2+a_2^2-(a_1^2+a_2^2))=0,$$

la droite D_c associée au centre des cercle $\gamma(D)$ et $\gamma(D')$ appartient à $P\cap Q$; puisque tel est également le cas de la droite D_∞, nous avons finalement bien $Q\cap P=D_\infty\cup D_c$.

10.3. Un plan P de $\mathbb{R}^4$ peut être contenu dans l'hyperplan H_0 ou le rencontrer selon une droite, laquelle peut être ou non la droite D_∞ ; par ailleurs, l'intersection du plan P et de la quadrique Q peut être réduite à $\mathbf{0}$, une droite ou la réunion de deux droites distinctes. Si l'on exclu le cas d'un plan contenu dans H_0 — ce qui est le cas ici puisque les droites dans P ne correspondent pas uniquement à des droites de $\mathbb{R}^2$ —, il n'y a que les quatre configurations envisagées dans l'énoncé car, si $P\cap H_0=D_\infty$, alors P rencontre nécessairement la quadrique Q selon la réunion de deux droites (cf. question précédente).

Soit $P^\perp$ l'orthogonal de P dans $\mathbb{R}^4$ relativement à la forme bilinéaire R (c'est-à-dire l'ensemble des points $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4$ tels que $R(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$ pour tout $\mathbf{y}\in P$) ; $P^\perp$ est également un plan puisque la forme bilinéaire R est non dégénérée.

- Si $P\cap H_0=D_\infty$, il existe un unique point c de $\mathbb{R}^2$ tel que $P\cap Q=D_c\cup D_\infty$ et P est l'ensemble des cercles concentriques de centre c en vertu de la question 10.2.
- Si $P\cap H_0\neq D_\infty$ et $P\cap Q=\{\mathbf{0}\}$, alors P est l'ensemble des cercles et droites du plan passant par deux points fixes. En effet, puisque $P\cap Q=0$, $\mathbb{R}^4=P\oplus P^\perp$ et la restriction de q à $P^\perp$ est nécessairement de signature $(1,1)$ (q serait sinon de signature $(4,0)$ ou $(3,0)$). Les deux droites de $P\cap Q$ correspondent à des points x,y de $\mathbb{R}^2$ appartenant à chaque $\gamma(D'')$, $D''\in P$, en vertu de la question 4.2 et, réciproquement, toute droite $D''\in\mathscr{C}$ telle que $\gamma(D'')$ contienne x et y est orthogonale à $P^\perp$ et est donc contenue dans P. En particulier, $P\cap H_0$ définit la droite reliant les points x et y.
- Si $P\cap H_0\neq D_\infty$ et si $P\cap Q$ est une droite, alors P est l'ensemble des cercles et droites de $\mathbb{R}^2$ passant par le point $\gamma(P\cap Q)$ et tangents à la droite $\gamma(P\cap H_0)$. En effet, tout couple de droites distinctes dans P correspond via γ à un couple de cercles ou droites tangents en un point ; en outre, comme la droite $Q\cap P$ est contenue dans $P^\perp$, elle correspond à un point de $\mathbb{R}^2$ appartenant à tous les $\gamma(D'')$, $D''\in P$.
- Si enfin $P\cap H_0\neq D_\infty$ et si $P\cap Q$ est la réunion de deux droites, le plan $P^\perp$ est tel que $P^\perp\cap H_0\neq D_\infty$ et $P^\perp\cap Q=\{\mathbf{0}\}$; $P^\perp$ est alors l'ensemble des cercles et droites du plan passant par deux points distincts et P est dont l'ensemble des cercles et droites orthogonaux aux cercles et droites passant par ces points.

Exercice 7 — 2) L'application π est une bijection dont la réciproque est l'application de Π dans $S-\{\xi\}$ qui envoie un point $q\in\Pi$ sur l'unique point d'intersection de $S-\{\xi\}$ avec la droite (ξq).

Pour déterminer les coordonnées du point $\pi(p)$ à partir des coordonnées (x,y,z) du point p, on cherche pour quelle valeur du paramètre t le point $(1-t)(0,0,1)+t(x,y,z)=(tx,ty,1+t(z-1))$ de la droite (ξq) appartient au plan Π ; on obtient immédiatement $t=\frac{1}{1-z}$ et $\pi(p)$ est donc le point de Π de coordonnées

$$\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z},0\right).$$

Réciproquement, l'application π^{-1} associe au point q de Π de coordonnées $(x',y',0)$ le point de $S-\{\xi\}$ de coordonnées

$$\left(\frac{2x'}{x'^2+y'^2+1},\frac{2y'}{x'^2+y'^2+1},\frac{x'^2+y'^2-1}{x'^2+y'^2+1}\right).$$

3) Un cercle C tracé sur la sphère S est l'intersection de S et d'un plan (affine) P tel que la distance de l'origine à P soit strictement inférieure à 1. Si P a pour équation $ux+vy+wz+t=0$, on vérifie immédiatement que $\pi(C)$ est défini par l'équation $(w+t)(x'^2+y'^2)+2ux'+2vy'+(t-w)=0$; il s'agit d'un cercle si $w+t\neq 0$ — c'est-à-dire si $\xi\notin C$ — et d'une droite si $w+t=0$, c'est-à-dire si $\xi\in C$.

On vérifie de la même manière que l'application π^{-1} transforme toute droite et tout cercle de Π en un cercle sur S.

4) Quel que soit le point q de $\Pi-\{o\}$ de coordonnées $(x,y,0)$, on vérifie sans difficulté que les coordonnées du point $\pi\circ s\circ\pi^{-1}$ de Π sont

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2},0\right)$$

et donc que l'application $\pi\circ s\circ\pi^{-1}$ de $\Pi-\{o\}$ dans lui-même est l'inversion de pôle o et de puissance 1.

5) 5.1. Par définition, un grand cercle est l'intersection de la sphère S avec un plan P passant par le centre de S. Étant donnés un tel grand cercle Γ et un point p de Γ, l'intersection du plan P et du plan tangent $T_pS=p+(\mathbb{R}\overrightarrow{op})^{\perp}$ est une droite $T_p\Gamma$ de T_pS passant par D ; réciproquement, une telle droite D détermine un unique grand cercle $\Gamma(D)$ sur S passant par p, à savoir l'intersection de S et du plan $o+\mathbb{R}\overrightarrow{op}\oplus\overrightarrow{D}$.

5.2. Soient D et D' deux droites dans T_pS passant par le point p. Le plan tangent T_pS étant orthogonal à la droite (op), la perpendiculaire à D (resp. D') dans T_pS passant par p est orthogonale au plan $P(D)$ du grand cercle $\Gamma(D)$ (resp. au plan $P(D')$ du grand cercle $\Gamma(D')$) et donc est parallèle à la normale à $P(D)$ passant par l'origine. Il en découle que l'angle entre les droites D et D', qui est le même que l'angle entre leurs perpendiculaires passant par p, est également l'angle entre les normales aux plans $P(D)$ et $P(D')$ à l'origine.

5.3. Considérons des équations $ux+vy+wz=0$ et $u'x+v'y+w'z=0$ des plans $P(D)$ et $P(D')$ (ces plans passent par l'origine !). D'après ce que l'on vient de dire, l'angle entre les droites D et D' au point p est l'unique élément ϑ de $[0,\frac{\pi}{2}]$ tel que

$$\cos(\vartheta)=\frac{|uu'+vv'+ww'|}{\sqrt{(u^2+v^2+w^2)}\sqrt{(u'^2+v'^2+w'^2)}}.$$

Les images de $\Gamma(D)$ et $\Gamma(D')$ sont les cercles ou droites d'équations respectives

$$w(x^2+y^2)+2ux+2vy-w=0\quad\text{et}\quad w'(x^2+y^2)+2u'x+2v'y-w'=0.$$

En vertu de l'exercice 7, l'angle entre ceux-ci au point $\pi(p)$ est l'unique élément α de $[0,\frac{\pi}{2}]$ tel que

$$\cos(\alpha)=\frac{|R((w,2u,2v,-w),(w',2u',2v',-w'))|}{\sqrt{q(w,2u,2v,-w)q(w',2u',2v',-w')}}.$$

Comme $R((w,2u,2v,-w),(w',2u',2v',-w'))=4uu'+4vv'+4ww'$, $q(w,2u,2v,-w)=4(u^2+v^2+w^2)$ et donc $\cos(\alpha)=\cos(\vartheta)$; les angles considérés sont donc les mêmes et nous avons prouvé que la projection stéréographique préserve les angles.