Géométrie élémentaire: Décembre 2007. Corrigé.

Partie A

1)
a) On a
$$\mathbf{R}^n = (\vec{A} \oplus \vec{B}) \oplus (\vec{A} \oplus \vec{B})^{\perp}, \qquad (\vec{A} \oplus \vec{B})^{\perp} = \vec{A}^{\perp} \cap \vec{B}^{\perp}$$
D'où l'existence et l'unicité de $\vec{u} \in \vec{A}, \vec{v} \in \vec{B}, \vec{w} \in \vec{A}^{\perp} \cap \vec{B}^{\perp}$ tels que $\overrightarrow{ab} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

b) On utilise le a): quel que soit $(a,b) \in A \times B$ on peut écrire $b = a + \overrightarrow{ab} = a + \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$. Dès lors
$$b - \vec{v} = a + \vec{u} + \vec{w}.$$
Existence: $a_0 = a + \vec{u} \in A$ et $b_0 = b - \vec{v} \in B$ conviennent.

Unicité: Supposons que $(a', b') \in A \times B$ soit tel que $\overrightarrow{a'b'} \in \vec{A}^{\perp} \cap \vec{B}^{\perp}$. En écrivant $\overrightarrow{a'b'} = \overrightarrow{a'a_0} + \overrightarrow{a_0b_0} + \overrightarrow{b_0b'}$, il vient
$$\overrightarrow{a'a_0} + \overrightarrow{b_0b'} \in (\vec{A}^{\perp} \cap \vec{B}^{\perp}) \cap (\vec{A} \oplus \vec{B}).$$
Cette somme est donc nulle et dès lors chaque terme est nul (somme directe). Conclusion $a' = a_0$ et $b' = b_0$.

c) Développer $d^2(a,b) = (\overrightarrow{ab} \mid \overrightarrow{ab})$ en utilisant $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{aa_0} + \overrightarrow{a_0b_0} + \overrightarrow{b_0b}$ et l'orthogonalité.

2) - Existence du sous-espace C: Pour raison d'orthogonalité et de dimension, on doit prendre $\vec{C} = \vec{A}^{\perp} \cap \vec{B}^{\perp}$. Observer ensuite que $C = a_0 + \vec{A}^{\perp} \cap \vec{B}^{\perp}$ convient puisque $a_0 \in A \cap C$ et $b_0 = a_0 + \overrightarrow{a_0b_0} \in B \cap C$.

Unicité de C: Supposons que C' convienne. Nécessairement $\vec{C'} = \vec{A}^{\perp} \cap \vec{B}^{\perp}$. Pour $a' \in A \cap C'$ et $b' \in B \cap C'$, on a $\overrightarrow{a'b'} \in \vec{A}^{\perp} \cap \vec{B}^{\perp}$. Dès lors, par 1 b), $(a', b') = (a_0, b_0)$ et $C' = a_0 + \vec{A}^{\perp} \cap \vec{B}^{\perp} = C$.

- On a déjà $a_0 \in A \cap C$ et $b_0 \in B \cap C$. Dès lors $A \cap C$ est un sous-espace affine de direction $\vec{A} \cap \vec{C} = \{\vec{0}\}$. Conclusion: $\{a_0\} = A \cap C$. De même $\{b_0\} = B \cap C$.

3)
a) Puisque D et D' sont non parallèles on a $\vec{D} \cap \vec{D'} = \{\vec{0}\}$. C'est un cas particulier de ce qui précède avec ici $dim\, A = 1 = dim\, B$ et dès lors $dim\, C = 3 - 2 = 1$. Poser donc $D'' = C$.

c) Construction explicite de la perpendiculaire commune: Il faut pour chacun des trois cas, déterminer le point a_0 et la direction orthogonale (ou le couple (a_0, b_0) lorsque $a_0 \neq b_0$).
Cas 1: $a_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = b_0$ et D'' a pour équation paramétrique $a_0 + t\,(0, 1, 1)$.
Cas 2: $a_0 = (\frac{1}{2}, 0, 1), b_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
Cas 3: $a_0 = (1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}), b_0 = (\frac{2}{3}, 1, \frac{2}{3})$.

Partie B

1) L'image d'une droite par une bijection affine est une droite dès lors c'est vrai pour $m = 1$. Pour $m \geq 1$ on a $f(D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_m) = f(D_1) \cup f(D_2) \cup \ldots \cup f(D_m)$. C'est donc une réunion de droites. Si pour $i \neq j$, $f(D_i) = f(D_j)$ alors $f^{-1}(f(D_i)) = f^{-1}(f(D_j))$ i.e. $D_i = D_j$ ce qui contredit le fait que $\cup_{1 \leq i \leq m} D_i$ est une $m-$ droite.

2) (Cet argument a été utilisé en TD pour l'étude des triplexes.) $f(D_i) \subset \mathbf{\Delta}$ est une droite. Elle contient une infinité de points et intersecte donc l'une des droites Δ_i en au moins deux points. Elle coincide donc avec cette droite.

3) (ι) Trois droites concourantes et trois droites parallèles

$(\iota\iota)$ Trois droites concourantes au point O et $\mathbf{D} = \mathbf{\Delta}$. Les homothéties de centre O préservent les droites.

$(\iota\iota\iota)$ (Hors Barème) Deux triplexes de droites.

Partie C: C.I.

1) $(f(D), f(D'))$ est un couple de droites sans intersection et $(L_f(\vec{e}), L_f(\vec{e'}))$ est libre. C'est donc une paire gauche.

2) a) Puisque f est une isométrie, L_f est un endomorphisme orthogonal et pour tout sous-espace vectoriel $V \subset \mathbf{R}^3$, $L_f(V^\perp) = (L_f(V))^\perp$. Par hypothèse $f(D) = \Delta$, dès lors $L_f <\vec{e}> = <\vec{\epsilon}>$. De même $L_f <\vec{e'}> = <\vec{\epsilon'}>$.
Pour $V = <\vec{e}, \vec{e'}>$, on a $V^\perp = <\vec{e''}>$, d'où $L_f <\vec{e''}> = <\vec{\epsilon}, \vec{\epsilon'}>^\perp$ et $f(D'')$ est une droite orthogonale à Δ et à Δ'.
D'autre part, $\{f(a)\} = f(D \cap D'') = f(D) \cap f(D'') = \Delta \cap f(D'')$. De même $\{f(a')\} = \Delta' \cap f(D'')$.
Conclusion: $f(D'')$ est l'unique perpendiculaire commune à Δ et Δ'' i.e. $f(D'') = \Delta''$.

b) Par le a), $f(a) = \alpha$ et $f(a') = \alpha'$, dès lors $d(a, a') = d(f(a), f(a')) = d(\alpha, \alpha')$.

c) Rapportée aux bases $(\vec{e}, \vec{e'}, \vec{e''})$ et $(\vec{\epsilon}, \vec{\epsilon'}, \vec{\epsilon''})$ la matrice de L_f est diagonale avec ± 1 sur la diagonale. Dès lors $(\vec{e} \mid \vec{e'}) = (L_f\vec{e} \mid L_f\vec{e'}) = \pm(\vec{\epsilon} \mid \vec{\epsilon'})$.

3) On a deux possibilités: (1) $f(D) = \Delta, f(D') = \Delta'$ ou (2) $f(D) = \Delta', f(D') = \Delta$. Les conditions du 2) sont symétriques en prime et non prime, d'où leur nécessité dans les deux cas.

Pour la suffisance, on va définir une isométrie f telle que $f(D) = \Delta$ et $f(D') = \Delta'$. Je suppose ici, quitte à changer le signe de certains vecteurs de base, que $(\vec{e} \mid \vec{e'}) = +(\vec{\epsilon}, \vec{\epsilon'})$ et $\overrightarrow{aa'} = d(a, a')\vec{e''}$ (idem pour α, α').

Il suffit alors d'observer que la bijection affine définie par $f(a) = \alpha$ et $L_f(\vec{e}) = \vec{\epsilon}, L_f(\vec{e'}) = \vec{\epsilon'}, L_f(\vec{e''}) = \vec{\epsilon''}$ convient: en effet, on a $f(D) = \Delta$. Ensuite,

$$\begin{aligned}
f(D') &= f(a' + <\vec{e'}>) \\
&= f(a + \overrightarrow{aa'}) + <\vec{\epsilon'}> \\
&= f(a) + L_f(\overrightarrow{aa'}) + <\vec{\epsilon'}> \\
&= \alpha + d(a, a')L_f(\vec{e''}) + <\vec{\epsilon'}> \\
&= \alpha' + <\vec{\epsilon'}> = \Delta'.
\end{aligned}$$

Enfin, f est une isométrie puisque L_f préserve les produits scalaires des vecteurs de base.

4) Oui en appliquant les conditions nécessaires et suffisantes du 2 b),c) (cf l'exemple 2 de la question A 3)).

C.II.

1) Par C.I., si f préserve chaque droite, $f(a) = a, f(a') = a'$, si f permute les droites $f(a) = a', f(a') = a$. Dans les deux cas elle préserve $\{a, a'\}$ et donc le point milieu o du segment $[a, a']$.

2) Dans le repère $(o; (\vec{e}, \vec{e'}, \vec{e''}))$ on a

$$f(m) = o + L_f(\overrightarrow{om}) = o + xL_f(\vec{e}) + x'L_f(\vec{e'}) + x''L_f(\vec{e''}).$$

Si f conserve chaque droite, la matrice de L_f est du type $[L_f] = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si f permute les droites, la matrice de L_f est du type $[L_f] = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Si $DetL_f = 1$ les seuls choix de signes possibles sont respectivement

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

soit, dans l'ordre, $f = id, f = r'', f = r_+, f = r_-$.

3) Si $DetL_f = -1$ les choix de signe sont

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si $(\vec{e} \mid \vec{e}') \neq 0$ ces matrices ne sont pas orthogonales: pour le premier cas $(L_f(\vec{e}) \mid L_f(\vec{e}')) = -(\vec{e} \mid \vec{e}') \neq (\vec{e} \mid \vec{e}')$, même observation pour les trois autres.

4) Les quatre matrices du 3) sont cette fois orthogonales. Elles représentent dans l'ordre $f = \sigma$, $f = \sigma'$, $f = s \circ \rho''$ et $f = s \circ \rho''^{-1}$, où s est la réflexion de plan fixe $0 + < \vec{e}, \vec{e}' >$ et ρ'' est le quart de tour d'axe D''.

5) L'action n'est *pas* transitive par C.I. 3). Elle n'est *pas* simple par C.II. Il y a une infinité d'orbites puisque $d(a, a')$ peut prendre une infinité de valeurs distinctes.