LICENCE DE MATHEMATIQUES
UNIVERSITE LYON 1
Année 2007/2008

Géométrie élémentaire
fiche 3

Rappel: (Barycentre)
Soit X un espace affine réel, $P = (p_0, p_1, \cdots, p_m) \in X^{m+1}$ et $a_0, a_1, \cdots a_m$, $m+1$ nombres réels tels que $\sum_{0 \leq i \leq m} a_i \neq 0$.
Le barycentre s des points pondérés $(p_i, a_i)_{0 \leq i \leq m}$ est l'unique point de X tel que

$$\sum_{0 \leq i \leq m} a_i \, \overrightarrow{sp_i} = 0.$$

Si q est un point arbitraire de X, on a

$$s = q + \sum_{0 \leq i \leq m} \left(\frac{a_i}{\sum_{0 \leq j \leq m} a_j}\right) \overrightarrow{qp_i}.$$

Exercice 1. (Coordonnées barycentriques)
- Soit $P = \{p_0, \cdots, p_n\}$ une base affine de X. Montrer que l'application

$$s : \mathbf{R}^{n+1} - \left\{(a_0, \ldots, a_n),\ \sum_{i=0}^{n} a_i = 0\right\} \longrightarrow X, \quad (a_0, \cdots, a_n) \mapsto Bar((p_i, a_i))_{0 \leq i \leq n})$$

est surjective. Si $p = s(a_0, \cdots, a_n)$ on dit que $(a_0, \cdots, a_n)$ sont des coordonnées barycentriques du point p dans la base affine P.
- Soit H l'hyperplan de $\mathbf{R}^{n+1}$ d'équation $a_0 + a_1 + \cdots + a_n = 1$. Montrer que la restriction de s à H est un isomorphisme d'espace affine.

Rappel: Le barycentre d'une famille de points pondérés est associatif.

Exercice 2
Soit $(p_0, p_1, \cdots, p_n)$ une base affine de l'espace affine réel X et $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ vérifiant $a_i > 0, \forall i,\ 0 \leq i \leq n$ et $\sum_{0 \leq i \leq n} a_i = 1$.
On considère les barycentres $s = Bar((p_i,\, a_i)_{0 \leq i \leq n})$ et $s_j = Bar((p_i,\, a_i)_{i \neq j})$.
a - Faire un dessin de la situation pour $n = 2$ et $n = 3$.
b - Montrer que $i \neq j \ \Rightarrow (s_i p_i) \bigcap (s_j p_j) = \{s\}$.
Exercice 3
Soient $P = \{p_0, \cdots, p_m\} \subset X$ et $(a_0, a_1, \cdots, a_m) \in \mathbf{R}$.
Soit $f : X \longrightarrow X$ une application affine.

Les deux premières questions sont des rappels de cours.
a - Montrer que $f\,(Bar((p_i, a_i)_{0\leq i\leq m})) = Bar((f(p_i), a_i)_{0\leq i\leq m})$.

b - On suppose que $f \in GA(X)$ et $\forall i,\ 0 \leq i \leq m,\ f(p_i) \in P$. Montrer que f admet au moins un point fixe.

c - On suppose qu'il existe $n \in \mathbf{N}^\star$ tel que $f^n(p) = p$, $\forall p \in X$.

- Montrer que f est une bijection affine.

- Montrer que f admet un point fixe.

- Construire explicitement une application affine $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ telle que $f \neq Id,\ f^n = Id, n \geq 2$.

Exercice 4

Rappel: Une partie $C \subset X$ est dite convexe si pour tout $(q, p) \in C \times C$ le segment

$$[q,p] = \{\begin{pmatrix} p & q \\ 1-t & t \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1]\}$$

est contenu dans C. Remarquer que ce segment est l'ensemble des barycentres des points pondérés $(a, p), (b, q)$ avec $0 \leq a, 0 \leq b$ et $a + b = 1$.

L'enveloppe convexe $Env\,Conv\,(p_1, \ldots p_r)$ est l'intersection de toutes les parties convexes contenant $p_1, \ldots, p_r$.

a - Intuitivement (i.e. sans faire de démo complète) quelle est l'enveloppe convexe de trois points non alignés dans $\mathbf{R}^2$, de quatre points non coplanaires dans $\mathbf{R}^3$?

b - Soit $[p_1, p_2, \ldots, p_r] = \{\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_r \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_r \end{pmatrix}, |\ \forall i, 0 \leq a_i,\ \sum_i a_i = 1\}$ l'ensemble des barycentres à poids positifs des points $p_1, \ldots, p_r$.

En procédant par récurrence sur le nombre de points r, montrer que

$$Env\,Conv\,(p_1, \ldots, p_r) = [p_1, \ldots, p_r].$$

c - Confirmer que l'image par une application affine $f : X \to X$ de l'enveloppe convexe de $(p_1, \ldots, p_r)$ est l'enveloppe convexe de $(f(p_1), \ldots f(p_r))$.

d - Soient $C \subset \mathbf{R}^3$ le cube et T et T' les deux tétraèdres (réguliers) de la figure: Donner une bijection affine f telle que $f(T) = T'$. Combien y-a-t-il de bijections affines telles que $f(T) = T'$? (On admettra ici qu'une telle bijection affine envoie nécessairement un sommet de T sur un sommet de T'.)

Exercice 5

Soit C le cube unité porté par la base canonique B de $\mathbf{R}^3$. Faire un dessin et donner des équations des quatre diagonales et du plan passant par le sommet $(1,1,1)$ et perpendiculaire à la diagonale en ce point.

Rappel: En algèbre linéaire, si $W, W' \subset V$ sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace V, alors $W \bigcup W'$ est un sous- espace si et seulement si $W \subset W'$ ou $W' \subset W$. En général donc, $W \bigcup W'$ **n'est pas** un sous-espace de V (penser à la réunion de deux droites vectorielles distinctes de $\mathbf{R^2}$).

Dans le cas vectoriel, le plus petit sous-espace de V contenant la réunion $W \bigcup W'$ est la somme de W et W':

$$< W \bigcup W' >= W + W'.$$

L'exercice qui suit est l'analogue de cette construction en géométrie affine.

Exercice 6

Soient A, A' deux sous-espaces affines de l'espace affine réel (X, V) de directions W et W' et $p \in A$, $p' \in A'$.

Rappel: $A \bigcap A' \neq \emptyset$ ssi $\overrightarrow{pp'} \in W + W'$.

a - En distinguant les situations $A \bigcap A' \neq \emptyset$ et $A \bigcap A' = \emptyset$ déterminer $< A \bigcup A' >$ et en déduire sa dimension.

b - Montrer que lorsque $A \bigcap A' \neq \emptyset$, le sous-espace $< A \bigcup A' >$ coincide avec la réunion des droites $(p\,p')$ où $p \in A$ et $p' \in A'$.

c - Donner un exemple dans $\mathbf{R}^3$ de sous-espaces A et A' tels que $A \bigcap A' = \emptyset$ et pour lesquels $< A \bigcup A' >$ est distinct de la réunion de droites du point b -.