L3 Mathématiques 2006/2007
UNIVERSITE LYON 1

Géométrie élémentaire
Fiche 1

Groupes.

Un des ingrédients de la géométrie élémentaire est la notion de *groupe*.
Pour rappel: un *groupe* c'est deux choses: 1) un ensemble (non vide) G, 2) une loi de composition interne (LCI):

$$\star : G \times G \to G : (a, b) \mapsto a \star b$$

avec les propriétés suivantes:
i) Associativité: $\forall a, b, c \in G$, $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$,
ii) neutre: $\exists e \in G \mid x \star e = x = e \star x$, $\forall x \in G$
iii) réciproques: $\forall x \in G, \exists x^{-1} \in G, \mid x \star x^{-1} = x^{-1} \star x = e$.
Le groupe est dit commutatif ou abélien si $\forall a, b \in G$, $a \star b = b \star a$.

Voici un exemple important:
Exo 1. On note $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. L'ensemble $\mathcal{S}_n$ des bijections $\sigma : I_n \longrightarrow I_n$ est un groupe pour la composition $\circ$ des applications. $\mathcal{S}_n$ est appelé groupe des permutations ou groupe symétrique. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$ on utilise la notation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Pour $i \neq j \in I_n$, la permutation t_{ij} définie par

$$t_{ij}(i) = j, \quad t_{ij}(j) = i, \quad t_{ij}(k) = k \ \forall k \in I_n \setminus \{i, j\}$$

est appelée une *transposition*.
a - Confirmer que Card $(\mathcal{S}_n) = n!$
b - Confirmer que la table de composition du groupe $\mathcal{S}_3$ est donnée par

$$\begin{array}{c|cccccc} \circ & 1 & c & c' & t_{12} & t_{13} & t_{23} \\ 1 & 1 & c & c' & t_{12} & t_{13} & t_{23} \\ c & c & c' & 1 & t_{13} & t_{23} & t_{12} \\ c' & c' & 1 & c & t_{23} & t_{12} & t_{13} \\ t_{12} & t_{12} & t_{23} & t_{13} & 1 & c' & c \\ t_{13} & t_{13} & t_{12} & t_{23} & c & 1 & c' \\ t_{23} & t_{23} & t_{13} & t_{12} & c' & c & 1 \end{array}$$

où
$$1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\quad c=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\quad c'=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}.$$
Observer sur la table de composition que (i) S_3 n'est pas abélien et (ii) la partie $\mathcal{A}_3=\{1,c,c'\}$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}_3$ appelé le groupe alterné.

c - Montrer par une récurrence sur l'entier n que le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ est *engendré* par les transpositions i.e. que toute bijection de I_n s'écrit comme la composition d'un nombre fini de transposition $t_{ij}, i\neq j\in I_n$.

d - Pour des entiers $1\leq i_1,i_2,\ldots,i_l\leq n$ deux à deux distincts, on appelle $l-$ cycle de S_n la permutation
$$(i_1 i_2\ldots i_l):=\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_{l-1}&i_l\\i_2&i_3&\cdots&i_l&i_1\end{pmatrix}.$$
Combien y-a-t-il de $2-$ cycles (i.e. de transpositions), de $l-$cycles dans S_n?

Donner une décomposition d'un $l-$ cycle en transpositions.

Exo 2.

a- Montrer que tout sous-groupe H de $\mathbf{Z}$ est de la forme $d\mathbf{Z}$ pour un entier $d\in\mathbf{N}$.

[Utiliser la division euclidienne par le plus petit entier positif de H.]

b- Montrer que les racines $n-$ièmes de l'unité, $n\in\mathbf{N}^\star$, sont les seuls sous-groupes finis de $\mathbf{C}^\star$.

[Commencer par montrer que tout sous-groupe fini est sur le cercle unité. On pourra ensuite utiliser le thm de Lagrange.]

Opération d'un groupe sur un ensemble.

L'idée est de réaliser un groupe non pas comme une entité abstraite mais comme transformations d'un ensemble.

Voici pour rappel la définition formelle et quelques notations: Soit G un groupe de neutre e et X un ensemble. On dit que l'application
$$\varphi: G\times X\longrightarrow X:(g,x)\mapsto\varphi_g(x)$$
est une opération à gauche de G sur X si
$$\varphi_e(x)=x\quad\text{ et }\quad\varphi_{g\star g'}(x)=\varphi_g(\varphi_{g'}(x))\quad\forall g,g'\in G\text{ et }\forall x\in X.$$
On notera $\mathcal{S}(X)$ l'ensemble des bijections de X.

φ est une opération ssi l'application
$$G\to S(X):g\mapsto\varphi_g$$
est un morphisme de groupes.

La relation $\sim$ sur X définie par $x\sim x'$ ssi il existe $g\in G$ tel que $x'=\varphi_g(x)$ est une relation d'équivalence dont les classes sont appelées orbites: l'orbite du point $x\in X$ est donc $G\cdot x:=\{\varphi_g(x)\mid g\in G\}$.

L'ensemble $G_x=\{g\in G\mid\varphi_g(x)=x\}$ s'appelle le stabilisateur (ou sous - groupe d'isotropie) de x.

On notera $X^G:=\{x\in X\mid\varphi_g(x)=x,\,\forall g\in G\}$ l'ensemble des points fixes.

L'opération est dite transitive si il n 'y a qu'une seule orbite, en d'autres termes si tous les points de X sont reliés par une transformation de G ce qui formellement s'écrit $\forall x, x' \in X$, $\exists g \in G \mid x' = \varphi_g(x)$.
L'opération est dite simple (ou libre) si le stabilisateur de chaque point est trivial i.e. si $\forall x \in X$, $G_x = \{e\}$.

Exo 3. *(Exemples d'opérations.)*
a- Le groupe $Gl_2\mathbf{R}$ des matrices inversibles réelles de type 2×2 opère sur $\mathbf{R}^2$ par multiplication matricielle à gauche:

$$\varphi : Gl_2\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 : \quad (A, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Montrer en utilisant un argument 'géométrique' qu'il y a deux orbites: le singleton $\{(0,0)\}$ et le plan épointé $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Donner une seconde preuve de ce fait en utilisant un argument plus 'algébrique'.
Déterminer le stabilisateur de $(1,0)$.
Qu'en est-il en dimension n?

b- le sous-groupe $G = \{\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta' \end{pmatrix}, \delta, \delta' \in \mathbf{R}_+^\star\} \subset Gl_2\mathbf{R}$ opère par φ sur $\mathbf{R}^2$.
Déterminer les orbites et les stabilisateurs $G_{(x,y)}$.

c- Mêmes questions pour le sous-groupe $G' = \{\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \delta \in R_+^\star\}$.

d- Mêmes questions pour le groupe des rotations du plan $O_2^+ := \{\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in R\}$.
(Indication: Commencer par l'orbite du point $(r, 0)$, $r \in \mathbf{R}_+$.)

e- Mêmes questions pour le sous-groupe $H = \{\begin{pmatrix} cosh\omega & sinh\omega \\ sinh\omega & cosh\omega \end{pmatrix}, \omega \in R\}$.

f- Soit $V \subset \mathbf{R}^3$ un sous-espace vectoriel (donc en particulier un sous-groupe additif de $\mathbf{R}^3$). Confirmer que l'application

$$V \times \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 : (\vec{v}, \vec{x}) \mapsto \vec{x} + \vec{v}$$

est une opération simple (i.e. $V_{\vec{x}} = \{\vec{0}\}$, $\forall \vec{x} \in \mathbf{R}^3$) de V. Est-elle transitive?

Exo 4. (Opérations et matrices.)
Soit $Gl_2\mathbf{C} \subset M_2\mathbf{C}$ l'ensemble des matrices 2×2 inversibles à coefficients complexes.
a - Montrer que l'application

$$\varphi : Gl_2\mathbf{C} \times M_2\mathbf{C} \longrightarrow M_2\mathbf{C} : (W, A) \mapsto WAW^{-1}$$

est une opération. Montrer qu'elle n'est ni transitive ni simple.
Soient $z, z' \in \mathbf{C}$. Décrire l'orbite de $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z' \end{pmatrix}$ lorsque $z \neq z'$.

Une matrice A dont le spectre est $\{z\}$ est - elle nécessairement dans l'orbite de $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$?

b - On considère le groupe $Gl_2\mathbf{C} \times Gl_2\mathbf{C}$ pour la loi de composition $(P,Q)\star(P',Q') = (PP',QQ')$. Montrer que l'application

$$\varphi : \ (Gl_2\mathbf{C} \times Gl_2\mathbf{C}) \times M_2\mathbf{C} \to M_2\mathbf{C} : \big((P,Q),A\big) \mapsto PAQ^{-1}$$

est une opération.

Montrer qu'il y a 3 orbites distinctes, $O(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}), O(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$ et $O(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$.

[Penser aux transformations élémentaires sur les lignes et les colonnes de la matrice A.]

Exo 5.

On considère $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire $(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Soit

$$S_2 = \{\vec{x} \mid (\vec{x},\vec{x}) = 1\} \subset \mathbf{R}^3$$

la sphère unité de centre $(0,0,0)$. On considère l'opération

$$O_2^+ \times S_2 \to S_2$$

par rotation autour de l'axe $< (0,0,1) >$.

Ecrire cette action matriciellement. Quelles sont les orbites? Quels sont les points fixes?

Exo 6. (Permutations et symétries)

a - Soit V un espace vectoriel réel. Une application linéaire $s : V \to V$ est appelée une symétrie (ou involution) si $s \circ s = id_V$. Montrer que V est somme directe de deux sous-espaces V_+ et V_- stables pour s.

b - Donner un exemple (i.e. faire une figure) de symétrie lorsque $V = \mathbf{R}^2$ et $\dim V_+ = \dim V_- = 1$.

On considère à présent le triangle équilatéral tracé sur le cercle unité de $\mathbf{R}^2$ de sommets $P = \{x_1 = (1,0), x_2, x_3\}$.

On se propose de déterminer le sous- groupe G des bijections linéaires du plan qui stabilisent l'ensemble des sommets P.

c- Donner six bijections linéaires f telles $f(P) = P$ et écrire leurs matrices dans la base canonique.

d - Soient f, f' deux bijections linéaires de $\mathbf{R}^2$. Montrer que si $f_{|P} = f'_{|P}$ alors $f = f'$.

e - Conclure que le groupe G est isomorphe au groupe des permutations S_3.

Exo 7.*(Un autre exemple d'opération de groupe.)*

Soit $\mathcal{S}_3$ le groupe des permutations de 3 éléments. On considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{S}_3 \times \mathbf{R}^3 &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ (\sigma,(x_1,x_2,x_3)) &\mapsto (x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, x_{\sigma^{-1}(3)}) \end{aligned}$$

a - Montrer que φ est une opération fidèle. Peut-elle être transitive?

[Une action est dite fidèle si l'application $G \to S(X) : g \mapsto \varphi_g$ est injective.]

b - Donner l'ensemble V des points fixes de $\mathbf{R}^3$.

c - Déterminer le groupe d'isotropie des points de $\mathbf{R}^3$ et le cardinal des orbites.

d - Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Vérifier que $R = \{e_i - e_j, 1 \leq i \neq j \leq 3\}$ est globalement $\mathcal{S}_3-$ invariant et que $\mathcal{S}_3$ opère transitivement sur R.
e - Soit W l'hyperplan d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Vérifier que $\mathbf{R}^3 = V \oplus W$ et déduire que V et W sont les seuls sous-espaces propres $\mathcal{S}_3-$invariants de $\mathbf{R}^3$.
(On pourra montrer que tout sous-espace invariant U non inclus dans V contient nécessairement R.)

Questions diverses.

Q1. (Les ponts de Königsberg.)

Soit K le graphe

Peut-on trouver un chemin passant une seule fois par chacune des arêtes de K?

Q2. (Nombres constructibles.)

Montrer que l'ensemble C des réels qui sont constructibles à la règle et au compas est un sous-corps de $\mathbf{R}$, stable par racine carrée (i.e. $\forall c \in C, \sqrt{c} \in C$).

Q3. (Le nombre d'or.)

On considère un rectangle de longueur L et de largeur l, $l < L < 2l$. Le nombre d'or est le rapport $\tau = \frac{L}{l}$ tel que

$$\frac{L}{l} = \frac{l}{L - l}.$$

- Donner une construction de τ à la règle et au compas en partant de deux points 0 et I du plan.
- Itération: à partir d'un rectangle de rapport $\frac{L_0}{l_0} = \tau$ on crée une suite de rectangles de longueur L_n et de largeur l_n en posant $L_{n+1} = l_n$ et $l_{n+1} = L_n - l_n$.

Faire une figure. Quel est le rapport $\frac{L_n}{l_n}$?

Q4. (Une suite remarquable: les nombres de Fibonacci.)

On considère la suite d'entiers $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par

$$f_0 = 1, \quad f_1 = 1, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

En voici une représentation géométrique:

Déterminer f_n et montrer que $\lim_{n \to \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \tau$.