L3 Mathématiques 2007/2008
UNIVERSITE LYON 1

Géométrie élémentaire
Fiche 2.

Exercice 1.
1) Soient deux espaces vectoriels V et W, $l : V \longrightarrow W$ une application linéaire et $\vec{b} \in W$. Montrer que l'ensemble des solutions $\vec{x}$ de l'équation linéaire

$$l(\vec{x}) = \vec{b}$$

s'il n'est pas vide, est un espace affine dont on déterminera la direction.
En voici quelques exemples usuels:
2) Soient $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ et $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une application continue.
L'ensemble des applications $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^n qui sont solutions de l'équation

$$a_n \frac{d^n}{dx^n}\phi + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\phi + \cdots + a_0\phi = \psi$$

est-il un espace affine? Dans l'affirmative, quelle est sa dimension lorsque $n = 2$?
3) Soient $(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}) \in \mathbf{R}^k$ et $b \in \mathbf{R}$. L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels vérifiant

$$u_{n+k} + a_{k-1}u_{n+k-1} + \cdots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n = b$$

est-il un espace affine?
4) Même question pour l'ensemble des applications $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vérifiant $f(x+1) = f(x)+1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Exercice 2. On considère $\mathbf{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbf{R}\}$, P_0 le plan d'équation $z = 0$ et P_1 le plan d'équation $z = 1$.
On désigne par $\mathbf{P}^\star$ l'ensemble des droites vectorielles supplémentaires de P_0 dans $\mathbf{R}^3$.
a- Faire une figure.
b- Donner une bijection de $\mathbf{P}^\star$ sur P_1. En déduire, en revenant à la définition en terme de translations, que $\mathbf{P}^\star$ est un espace affine de direction P_0.
c- *Question*:* Comparer $\mathbf{P}^\star$ et la sphère unité S_2 de $\mathbf{R}^3$.
[Penser à la projection stéréographique.]

Exercice 3.
Soit X un espace affine réel de direction V, $f : X \longrightarrow X$ une application affine et

$$X_f := \{x \in X,\ f(x) = x\}$$

l'ensemble des points fixes de f.

a - Montrer que $X_f \subset X$ est soit vide soit un sous-espace affine de X dont on déterminera la direction.

b - Soit D une droite affine. Montrer que si $f : D \to D$ est affine et admet deux points fixes, alors f est l'application identité.

c - Soit P un plan affine et $D, D' \subset P$ deux droites affines distinctes, sécantes en $O \in P$ et de directions respectives $k\vec{u}$, $k\vec{u}'$. Au point $M = O + \overrightarrow{OM} = O + x\vec{u} + y\vec{u}'$ on associe $p(M)$ défini par $\overrightarrow{Op(M)} = x\vec{u}$. L'application p est la projection sur D parallèlement à D'.

- Faire un dessin de la situation.

- Montrer que p est une application affine.

- Déterminer l'ensemble des points fixes de p.

- Une application affine $f : P \to P$ admettant deux points fixes est -elle l'identité?

d - Soit A, B, C trois points non alignés du plan P. On note

h_1 la projection sur la droite (BC) parallèlement à la droite (CA)
h_2 la projection sur la droite (CA) parallèlement à la droite (AB)
h_3 la projection sur la droite (AB) parallèlement à la droite (BC)
On pose $h = h_3 \circ h_2 \circ h_1$ et $f = h \circ h$.

- Faire une figure.

- Montrer que la restriction de f à la droite (AB) est l'identité. Décrire l'application $f : P \to P$.

Exercice 4. (Symétries affines.)

a - Une application affine $\sigma : X \to X$ telle que $\sigma \circ \sigma = 1$ est appelée une symétrie de X. On aimerait obtenir une version affine de l'exercice 6 fiche 1. On procède comme suit:

- Soit M un point de X. Montrer que le point milieu du segment $[M, \sigma(M)] := \{M + t\,\overrightarrow{M\sigma(M)},\ t \in [0, 1]\}$ est un point fixe de σ.

- Donner l'ensemble des points fixes de σ.

- Donner deux sous -espaces L_σ-stables V_+ et V_- tels que $\overrightarrow{X} = V_+ \oplus V_-$. Conclure en explicitant $\sigma(M)$ pour tout $M \in X$.

b - (Illustration) Donner la classification des symétries de $\mathbf{R}^2$ et de $\mathbf{R}^3$ en fonction de la dimension du sous-espace de leurs points fixes.

Exercice 5. (Symétries affines, suite.)

Soit $P_1, \cdots P_n$, n points de l'espace affine X. On se pose la question suivante:

Peut-on trouver n points $M_1, \cdots, M_n$ de X tels que pour tout $i \leq n-1$, P_i soit le point milieu du segment $[M_i, M_{i+1}]$ et P_n le point milieu du segment $[M_n, M_1]$?

Voici une manière de répondre.

Toute symétrie σ distincte de l'identité admet un unique point fixe ; c'est son centre. Soit σ_i la symétrie de centre P_i.

a - Montrer que pour tout $i \geq 2$, $M_i = \sigma_{i-1} \circ \sigma_{i-2} \circ \cdots \circ \sigma_1(M_1)$.

En déduire que la question admet une solution ssi $\sigma_n \circ \sigma_{n-1} \circ \cdots \circ \sigma_1$ admet un point fixe.

b - Montrer que si n est impair il y a une solution unique.

Si n est pair, donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe au moins une solution. Est-elle unique?

c - Illustration sur $\mathbf{R}^2$: Faire la construction explicite pour $P_1 = (-1,1), P_2 = (0,1/2), P_3 = (1,1), P_4 = (1,-1), P_5 = (-1,-1)$ ainsi que pour l'hexagone régulier.

d - Déduire qu'étant donnés trois points P, Q, R, il existe un unique triangle dont le milieu des côtés sont ces points.

Montrer que pour que quatre points soient les milieux des côtés d'un quadrilatère il faut et il suffit qu'ils soient les sommets d'un parallélogramme.

Exercice 6. Soit (X, V) un espace affine de direction V de dimension n sur $\mathbf{R}$.

a- Décrire l'ensemble des applications affines de X qui transforment toute droite en une droite parallèle.

b- Montrer que l'ensemble $\mathcal{H}$ des bijections affines f de X pour lesquelles $L_f = \rho\, Id_V$, $\rho \in \mathbf{k}^\star$, est un sous-groupe du groupe affine $GA(X)$.

Ce sous-groupe est appelé le *groupe des homothéties-translations* de X.

c- Décrire $GA(X)$ lorsque $n = 1$.

d- Montrer que $h \in \mathcal{H} \setminus \{Id_X\}$ admet un point fixe I ssi $\rho \neq 1$; montrer que I est l'unique point fixe de h.

On dit que ρ est le rapport et I le centre de l'homothétie h.

e- Pour rappel, on dit que deux applications $f, f' : X \to X$ commutent si quel que soit $x \in X$, $f(f'(x)) = f'(f(x))$.

Deux éléments $h, h' \in \mathcal{H} \setminus \{Id_X\}$ commutent-ils?

f- Montrer que si les points A, B, C sont alignés il existe $h \in \mathcal{H}$ telle que $h(A) = A$ et $h(B) = C$. h est-elle unique?

g- *Le théorème de Desargues.*

Utiliser les homothéties-translations pour démontrer l'énoncé suivant:

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles sans sommet commun et à côtés respectivement parallèles. Alors les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont concourantes ou parallèles.

Exercice 7. (Extrait du partiel d'avril 2006)

Soient $\mathcal{E}$ un plan affine de direction E muni d'un produit scalaire $(\ |\ )$ et h, h' deux homothéties de $\mathcal{E}$ de rapports respectifs $\rho \neq 1$ et $\rho' \neq 1$ et de centres I, I' avec $I \neq I'$.

1) a) Montrer que quel que soit $m \in \mathcal{E} \setminus \{I\}$, I appartient à la droite $(m\, h(m))$.

b) On suppose $\rho\rho' \neq 1$. Prouver que $h \circ h'$ est une homothétie dont le centre I'' appartient à la droite $(I\, I')$. (On ne demande pas d'expliciter I''.)

2)

a) Soient $C = \{m \in \mathcal{E} \mid (\overrightarrow{cm} \mid \overrightarrow{cm}) = R^2\}$ le cercle de centre c et de rayon R et h une homothétie de $\mathcal{E}$ (de centre I et de rapport ρ). Montrer que $h(C)$ est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

b) Soient C et C' deux cercles de $\mathcal{E}$ de centres c et c' et de rayons R et R' avec $R \neq R'$. Montrer qu'il y a exactement deux homothéties $h^{\pm}$ (h^{+} de rapport positif et h^{-} de rapport négatif) telles que $h^{\pm}(C) = C'$.

c) Donner une construction géométrique simple des centres $I^{\pm}$ des homothéties $h^{\pm}$.

3) On considère à présent trois cercles C_1, C_2, C_3 de $\mathcal{E}$ de centres et de rayons respectifs c_1, c_2, c_3 ; R_1, R_2, R_3. Les centres et les rayons sont supposés deux à deux distincts. Soient $h_i^{\pm}, 1 \leq i \leq 3$, les homothéties telles que

$$h_3^{\pm}(C_1) = C_2, \quad h_1^{\pm}(C_2) = C_3, \quad h_2^{\pm}(C_3) = C_1$$

On notera $I_i^{\pm}$ les centres de $h_i^{\pm}$, $1 \leq i \leq 3$.

a) Représenter les six centres d'homothéties $I_i^{\pm}$ sur la figure annexe 2.

b) Déterminer $h_2^{+} \circ h_1^{-} \circ h_3^{-}$.

c) En déduire que les points $I_1^{-}, I_2^{+}, I_3^{-}$ sont alignés.

d) En procédant par analogie, montrer que les points $I_1^{+}, I_2^{+}, I_3^{+}$ sont alignés.

Exercice 8. (Extrait du partiel d'avril 2004).

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine réel. On se donne quatre droites de $\mathcal{P}$ telles que deux quelconques d'entre elles ne soient pas parallèles et trois quelconques d'entre elles ne soient pas concourantes. Soit (A, B, C, D, E, F) l'ensemble de leurs six points d'intersection avec: A, B, C alignés, de même que C, D, E; E, F, B; A, F, D.

1) Faire une figure, que l'on complétera au fur et à mesure.

Soit I (resp. J, resp. K) le milieu de A et E (resp. B et D, resp. C et F). Il s'agit de démontrer que les trois points I, J et K sont alignés.

2) Soient h l'homothétie de centre A et de rapport 2, $\beta = h(J)$ et $\alpha = h(K)$. Soient h_1 l'homothétie de centre E telle que $h_1(F) = B$ et h_2 l'homothétie de centre E telle que $h_2(C) = D$.

3) a) Démontrer que l'homothétie $h_1 \circ h_2$ transforme la droite (αC) en la droite (βB).

b) Démontrer l'homothétie $h_2 \circ h_1$ transforme la droite (αF) en la droite (βD).

4) Comparer les homothéties $h_1 \circ_2$ et $h_2 \circ h_1$ et en conclure que les trois points I, J, K sont alignés.