ACADEMIE DE LYON
LICENCE DE MATHEMATIQUES

Géométrie élémentaire. Fiche 4.

Exercice 1. Soit $\mathbf{R}^2$ muni de la forme bilinéaire symétrique

$$B\big((x,t),(x',t')\big) = xx' - tt'$$

Déterminer le groupe $O_{1,1}$ des matrices 2×2 réelles qui préservent B.
Soit $O_{1,1}^+$ le sous-groupe des matrices de $O(1,1)$ de déterminant $+1$. Montrer qu'il existe une bijection de $O_{1,1}^+$ sur la réunion des branches de l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$ du plan $\mathbf{R}^2$.

Exercice 2. Soit un espace vectoriel euclidien $(V, (\,|\,))$ et $A, B \subset V$ deux sous-espaces vectoriels orthogonaux.
Montrer que la composée des symétries orthogonales par rapport à A et B commutent et que c'est la symétrie par rapport au sous-espace $(A \oplus B)^\perp$.
On se place dans $\mathbf{R}^3$. Soit σ_x (resp. σ_y) la symétrie orthogonale par rapport à l'axe $< (1,0,0) >$ (resp. $< (0,1,0) >$). Donner la table de composition du sous-groupe $G \subset O_3$ engendré par σ_x et σ_y.

Exercice 3. (Générateurs du groupe O_n.)
Confirmer que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

appartiennent à O_2 et déterminer leur décomposition en un produit de réflexions.
Même question pour la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. (*Symétries et commutateur de $O(V)$.)*
Rappel: Soit G un groupe. $\forall x, y \in G$, l'élément $[x,y] := xyx^{-1}y^{-1}$ est appelé commutateur de x et de y. Clairement l'inverse d'un commutateur est un commutateur. On notera $[G,G]$

le sous-groupe de G dont les éléments sont les produits d'un nombre fini de commutateurs. Le sous-groupe (distingué) $[G, G]$ est appelé groupe dérivé de G.

a - Soit V un espace euclidien de dimension n et A, $A' \subset V$ deux sous-espaces vectoriels de même dimension $m \leq n$. Montrer qu'il existe une isométrie $\sigma \in O^+(V)$ telle que $\sigma(A) = A'$.
[*Indication: Utiliser des bases adaptées aux décompositions* $V = A \oplus A^\perp = B \oplus B^\perp$.]
b - Montrer que la symétrie orthogonale σ_A par rapport au sous-espace A satisfait

$$f \circ \sigma_A \circ f^{-1} = \sigma_{f(A)}, \quad \forall f \in O(V).$$

c - Soient H, H' 2 hyperplans (vectoriels) de V et $\sigma_H, \sigma_{H'}$ les réflexions correspondantes. Utiliser les questions a et b pour montrer que $\sigma_H \circ \sigma_{H'} \in [O(V), O(V)]$. Conclure à l'aide du théorème d'engendrement de $O(V)$ du cours que $O^+(V) = [O(V), O(V)]$.

Soit V un espace vectoriel réel de dimension n et $B : V \times V \longrightarrow \mathbf{R}$ une forme bilinéaire symétrique.
Pour $(x_i)_{1 \leq i \leq m}$ et $(y_i)_{1 \leq i \leq m} \in V^m$ on appelle matrice de Gram $G(x_1, \cdots, x_m; y_1, \cdots, y_m)$ la matrice dont la composante (i, j) est $B(x_i, y_j)$.

Exercice 5.
- Montrer que si $DetG(x_1, \cdots, x_m; y_1, \cdots, y_m) \neq 0$ alors $(x_i)_{1 \leq i \leq m}$ et $(y_i)_{1 \leq i \leq m}$ sont libres.
- On suppose B non dégénérée sur V. Montrer que $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des bases de V ssi $DetG(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_n) \neq 0$.