Université Lyon 1
L3 mathématiques
2007/2008

Géométrie élémentaire. Fiche 4 : suite.

Exercice 6

On rappelle que si $(G, \star)$ est un groupe, l'ensemble $Z = \{z \in G \mid z \star g = g \star z, \forall g \in G\}$ est un sous-groupe distingué appelé le centre de G.

Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 2$.
1) a) Soit f un endomorphisme de E qui commute avec toutes les symétries orthogonales $s \in O(E)$ (i.e. quelle que soit la symétrie $s \in O(E)$, $f \circ s = s \circ f$).

Démontrer que f stabilise chaque droite et en déduire que f est une homothétie.

b) Déterminer le centre du groupe orthogonal $O(E)$.

2) Déterminer le centre de $O^+(E)$ en dimension $n = 2$ et $n = 3$.

Exercice 7 Soit $(V, (\,|\,))$ un espace euclidien, $A \subset V$ un sous-espace vectoriel et $p_A : V \to V$ le projecteur sur A relatif à la décomposition $V = A \oplus A^\perp$. La distance d d'un point $x \in V$ au sous-espace A est par définition $d = \| x - p_A(x) \|$.
Pour un $m-$ uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in V^m$, on notera

$$G(x_1, \ldots, x_m; x_1, \ldots, x_m) \in M_m\mathbf{R}$$

la matrice de composantes $G_{ij} = (x_i \mid x_j), 1 \leq i, j \leq m$. (La lettre G fait référence à Gram.)
1) Soient $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}'$ deux bases de V. Rappeler la relation entre $G(\mathbf{a}; \mathbf{a})$ et $G(\mathbf{a}'; \mathbf{a}')$.

2) Soit $(x_1, \cdots, x_m)$ une famille libre de V et $(v_1, \cdots, v_m)$ la famille orthogonale (non normée) obtenue en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à $(x_1, \cdots, x_m)$.
Donner $Det\, G(x_1, \ldots, x_m; x_1, \ldots, x_m)$ en fonction de $(v_i \mid v_i)$, $1 \leq i \leq m$.

- En déduire que la distance d du point $x \in V$ au sous-espace $< x_1, \ldots, x_m >$ est donnée par

$$d = \left(\frac{Det\, G(x_1, \cdots, x_m, x; x_1, \cdots, x_m, x)}{Det\, G(x_1, \cdots, x_m; x_1, \cdots, x_m)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Exercice 8 (Extrait de l'examen de janvier 2007)

Soit $(E, (\,|\,))$ un espace *vectoriel* euclidien de dimension 3.

On appelle *demi-tour* toute rotation (vectorielle) $r_\pi \in O^+(E)$ d'angle π autour d'une droite vectorielle D i.e. toute symétrie orthogonale $s_D \in O(E)$ par rapport à une droite D. On rappelle (et on ne demande pas de démontrer) que tout endomorphisme orthogonal $f \in O^+(E)$ est une composée de demi-tours.

Le but de l'exercice est de montrer que le groupe $O^+(E)$ ne possède pas de sous-groupe distingué autre que $\{Id_E\}$ et $O^+(E)$.

1)
a) Montrer que tout endomorphisme $f \in O^+(E)$ admet la valeur propre $+1$.

b) Soit $\vec{e} \in E$ un vecteur propre de f de valeur propre $+1$ et $<\vec{e}>$ la droite vectorielle engendrée par $\vec{e}$. Montrer que $f(<\vec{e}>^\perp) = <\vec{e}>^\perp$.

c) En déduire que tout endomorphisme orthogonal $f \in O^+(E) \setminus \{Id_E\}$ est une rotation autour d'un axe.

2) a) Soient D', D'' deux droites vectorielles distinctes de E. Montrer, en décrivant un procédé de construction, qu'il existe un endomorphisme orthogonal $\rho \in O^+(E)$ tel que $\rho(D') = D''$. Cet endomorphisme ρ est-il unique?

b) Quelle est la nature de $\rho \circ s_{D'} \circ \rho^{-1}$?

Soit $H \subset O^+(E)$ un sous-groupe non trivial (i.e. $H \neq \{Id_E\}$).
3)
a) Montrer que H contient une rotation r_α d'angle $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$.

[Commencer par montrer que H contient une rotation r_β d'angle $\beta \in]0, \pi]$]

b) Soit $<\vec{e}>$ l'axe de r_α où $\vec{e}$ est de norme 1 et soit $(\vec{e}, \vec{e}', \vec{e}'')$ une base orthonormée de E complétant $\vec{e}$.
Montrer qu'il existe une droite vectorielle $D \subset <\vec{e}, \vec{e}'>$ telle que $r_\alpha(D)$ et D sont orthogonales.

On suppose à présent que le sous-groupe $H \subset O^+(E)$ est distingué (i.e. quels que soient $f \in O^+(E)$ et $h \in H$, $f \circ h \circ f^{-1} \in H$).

4) Soient D', D'' deux droites vectorielles distinctes de E. Montrer que si $s_{D'} \in H$ alors on a aussi $s_{D''} \in H$.

5) Soient r_α et D comme à la question 3).
Montrer que $r = s_D \circ r_\alpha \circ s_D \circ r_\alpha^{-1}$ est un demi-tour de H.

6) Conclure, en vous servant du rappel, que si $H \subset O^+(E)$ est un sous-groupe distingué non-trivial (i.e. $H \neq \{Id_E\}$) alors $H = O^+(E)$.

7) Que peut-on en déduire sur le centre de $O^+(E)$?