Académie de Lyon
Licence de Mathématiques (L3)
Année 2005/2006

Géométrie élémentaire. Fiche 4.

Exo 1. (Extrait de l'examen de Mai 2005)

On rappelle que si $(G, \star)$ est un groupe, l'ensemble $Z = \{z \in G \mid z \star g = g \star z, \forall g \in G\}$ est appelé le centre de G.

Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 2$ et $(\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de E. On désigne par $O(E)$ le groupe orthogonal de E et par $O^{\pm}(E)$ les composantes $O^{\pm}(E) = \{f \in O(E) \mid Det(f) = \pm 1\}$.

Question 1. Soit f un endomorphisme de E qui commute avec toutes les symétries orthogonales $s \in O(E)$ (i.e. quelle que soit la symétrie $s \in O(E)$, $f \circ s = s \circ f$).

a) Montrer que la matrice de f dans la base $(\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$ est diagonale.
[Faire commuter f avec des réflexions choisies judicieusement.]

b) Montrer ensuite que l'endomorphisme f est une homothétie.
[Utiliser d'autres réflexions.]

c) Déterminer le centre du groupe orthogonal $O(E)$.

Question 2.
Déterminer le centre de $O^+(E)$ en dimension $n = 2$ et $n = 3$.

Question 3.
Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de direction E. On désigne par $Is(\mathcal{E})$ le groupe des isométries affines de $\mathcal{E}$.

a) Soient $O \in \mathcal{E}$, $\sigma : \mathcal{E} \to \mathcal{E} : M \mapsto O - \overrightarrow{OM}$ la symétrie affine de centre O et τ une translation de $\mathcal{E}$.

Montrer que si $\tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau$, alors $\tau = Id_{\mathcal{E}}$.

b) Déterminer le centre du groupe $Is(\mathcal{E})$.

[On pourra commencer par utiliser le cas linéaire et, le cas échéant, un théorème du cours sur $Is(\mathcal{E})$.]

Exo 2. (Extrait de l'examen de septembre 1997)

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien de direction E muni d'un repère orthonormé $[o; \vec{i}, \vec{j}]$. On considère les points

$$a = o + \vec{i} + \vec{j}, \quad b = o - \vec{i} + \vec{j}, \quad c = o - \vec{i} - \vec{j}, \quad d = o + \vec{i} - \vec{j}.$$

On désigne par G l'ensemble des isométries affines de $\mathcal{E}$ laissant globalement invariant l'ensemble $\{a, b, c, d\}$.

a - Montrer que tout élément de G laisse le point o invariant.

b - Montrer que, muni de la composition des applications, G est un groupe isomorphe à un sous-groupe du groupe orthogonal $O(E)$.

c - Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique S_4.

d - Trouver un sous-groupe cyclique d'ordre 4 de G.

e - Trouver tous les éléments de G.

f - Dresser la table de G.

g - Montrer que G est engendré par deux symétries orthogonales par rapport à des droites.

Exo 3. (*Sous-groupes finis du groupe orthogonal du plan euclidien.*)

Soit E un plan euclidien et $O(E)$ le groupe orthogonal.

a - Pour rappel: on a l'isomorphisme:

$$\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \longrightarrow O^+(E)$$
$$\hat{\theta} \mapsto R_{\hat{\theta}} = \begin{pmatrix} cos\,\theta & -sin\,\theta \\ sin\,\theta & cos\,\theta \end{pmatrix}$$

Montrer que tout sous-groupe fini $G \subset O^+(E)$ est un groupe cyclique

$$\mathcal{C}_n := \{R_{2\pi\hat{k}/n},\, 0 \leq k \leq n \in \mathbf{N}\}$$

[Indication: considérer le plus petit réel $\theta \in]0, 2\pi[$ tel que $R_{\hat{\theta}} \in G$ et le plus petit entier naturel n tel que $2\pi \leq n\theta$.]

On suppose à présent que le sous-groupe fini $G \subset O(E)$ contient une symétrie s.

b - Soit $H := G \cap O^+(E)$. Montrer que $G = H \cup H \circ s$.

c - Montrer que G est le produit semi-direct de H et $\mathcal{S} = \{1_E, s\}$. En déduire une structure de groupe sur $H \times \mathcal{S}$ telle que l'application $H \times \mathcal{S} \longrightarrow G : (h, \sigma) \mapsto h \circ \sigma$ soit un isomorphisme de groupes.

d - *Application*: déterminer le sous-groupe de $O(E)$ laissant globalement invariant l'ensemble des sommets d'un $n-$gone régulier du plan E.

Exo 4.

Soit $G \subset GA(\mathcal{E})$, le groupe des *déplacements* de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3.

On rappelle que G est constitué des transformations suivantes

- les rotations d'axe des droites de $\mathcal{E}$
- les translations
- les produits d'une rotation d'axe D et d'une translation de vecteur non nul, vecteur directeur de D

On se propose ici de déterminer le sous- groupe des commutateurs $[G, G] \subset G$.

1) Montrer que toute symétrie orthogonale par rapport à une droite D appartient à G.

Montrer que le produit de deux symétries orthogonales par rapport à deux droites parallèles D et D' est une translation.

2)

a) Montrer que toute translation τ peut s'écrire sous la forme $\sigma' \circ \sigma$ où σ' et σ sont des symétries orthogonales par rapport à des droites.

b) Montrer que toute translation τ peut s'écrire τ_0^2 où τ_0 est une translation.

c) Déduire de a) et b) que toute translation τ est un commutateur de G.

3)

a) Soient D et D' deux droites concourrantes de $\mathcal{E}$ en un point O, non confondues. Soit σ la symétrie orthogonale par rapport à la droite D, σ' la symétrie orthogonale par rapport à D'.

Montrer que $\sigma' \circ \sigma$ est une rotation d'axe orthogonal au plan défini par D et D'.

b) Soit $\rho \neq Id$ une rotation appartenant à G. En écrivant ρ sous la forme ρ_0^2 où ρ_0 est une rotation, montrer que ρ est un commutateur de G.

4) Montrer que $[G, G] = G$.

Exo 5.

On considère k hyperplans $H_1, \cdots, H_k$ d'un espace euclidien E.

Soient $\sigma_1, \cdots, \sigma_k$ les réflexions correspondantes et $\{x_1, \cdots, x_k\}$ des vecteurs unitaires tels que $H_i^\perp =< x_i > \ \forall i \in \{1, \cdots, k\}$.

Soit G le sous-groupe de $O(E)$ dont les éléments sont les compositions d'un nombre fini de σ_i, $i \in \{1, \cdots, k\}$, i.e. G est le sous-groupe *engendré* par les réflexions σ_i.

a - Déterminer l'ensemble

$$E^G = \{x \in E \mid g(x) = x, \forall g \in G\}$$

des points fixes communs à tous les éléments de G.

En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur les x_i pour que $E^G = \{0\}$.

(*Indication: Utiliser* $(V \cap V')^\perp = V^\perp + V'^\perp$)

b - Si $x \in E - \{0\}$ on note $\sigma_{<x>^\perp}$ la réflexion d'hyperplan fixe $< x >^\perp$. On considère le sous-ensemble

$$\Delta = \{x \in E \mid \| x \| = 1, \exists i \in \{1, \cdots, k\}, \exists g \in G \mid \sigma_{<x>^\perp} = g^{-1} \circ \sigma_i \circ g\}.$$

Montrer que Δ est globalement invariant sous l'action de G i.e. que $g(\Delta) \subset \Delta, \ \forall g \in G$.

c - Montrer que si Δ est fini et si $E^G = \{0\}$ alors G est fini.

(*Indication: Soit $\mathcal{S}_\Delta$ le groupe de permutation de Δ. Montrer que l'application: $G \longrightarrow \mathcal{S}_\Delta : g \mapsto g_{|\Delta}$ est injective.*)

d - Soit $E = \mathbf{R}^n$, $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique et $\{H_i = \mathbf{R}e_i^{\perp},\ 1 \leq i \leq n\}$. Montrer que G est abélien et déterminer son cardinal. Déterminer Δ.