Le Problème de Napoléon

Trouver le centre d'un cercle tracé sans son centre à l'aide du compas seul.

Voici les étapes de la construction:

i) Choisir deux points A et E sur le cercle C et tracer le cercle Γ de centre A passant par E. Ce cercle coupe C au point F.

ii) Les cercles de centre E et F passant par A se coupent au point G.

iii) Le cercle C' de centre G passant par A coupe Γ aux points H et K.

iv) Les cercles de centre H et K passant par A se coupent en un point O'.

Proposition: Le point O' coincide avec le centre O du cercle C.

Voici une démo: On considère le point I, milieu du segment $[G, A]$ (intersection de la droite (EF) avec la droite (GA)) et le point I', milieu du segment $[O', A]$ (i.e. $(HK)\bigcap(GA)$) On montre que I' est aussi le point milieu du segment $[O, A]$ ce qui implique $O' = O$.

Pour ce faire, on raisonne sur les distances (dans ce qui suit, R_D désigne le rayon du cercle D)

Rappel: l'axe radical de deux cercles est l'ensemble des points ayant même puissance par rapport aux deux cercles. Si c et c' sont les centres et R et R' les rayons de ces cercles, l'axe radical est l'ensemble des points M tels que

$$2(\overrightarrow{cc'} \mid \overrightarrow{cM}) = R^2 - R'^2 + (\overrightarrow{cc'} \mid \overrightarrow{cc'}).$$

Puisque I est sur l'axe radical de Γ et C et I' sur l'axe radical de Γ et C', on a

$$d(A, I) = R_\Gamma^2/2R_C, \qquad d(A, I') = R_\Gamma^2/2R_{C'}.$$

Puisque I est équidistant de A et de G, on a aussi $d(A, I) = R_{C'}/2$. D' où $R_{C'}/2 = R_\Gamma^2/2R_C$ i.e.

$$R_C/2 = R_\Gamma/2R_{C'} = d(A, I').$$

Conclusion: I' est à mi-distance entre O et A. C'est donc le point milieu du segment $[O, A]$.

Voici un exemple un peu anecdotique d'utilisation de la formule d'Euler $s - a + f = 2$ (cf Audin par exemple)

Peut-on utiliser uniquement des hexagones pour couvrir une sphère (aucune hypothèse n'étant faite sur la régularité des hexagones et le nombre d'aretes attachées à chaque sommet).

réponse: chaque faces a 6 arètes et chaque arète appartient à deux faces: $2a = 6f$. Euler donne alors $3s = 6 + 2a$. Enfin puisque le nombre a_s d'arètes attachées à chaque sommet est supérieur à 3, on a $3s \leq \sum_s a_s = 2a$ (puisque chaque arète a deux sommets).

Réponse: non.