LICENCE DE MATHEMATIQUES
UNIVERSITE LYON 1
Année 2007/2008

Géométrie élémentaire
Corrigé de la fiche 3

Exercice 1.

Notons H_0 l'hyperplan (vectoriel) de R^{n+1} d'équation $\sum_{i=0}^{n} a_i = 0$. L'hyperplan H_0 est la direction de l'hyperplan affine H (cf. question 1 de l'exercice 1 de la feuille 2).

- Soit $x \in X$. On cherche $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus H_0$ tel que $x = Bar\big((p_i, a_i)_{0 \leq i \leq n}\big)$. Or si on note $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de x dans le repère affine $(p_0, \dots, p_n)$, on a par définition $\overrightarrow{p_0x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{p_0p_i}$. En utilisant les relations de Chasles $\overrightarrow{p_0p_i} = \overrightarrow{p_0x} + \overrightarrow{xp_i}$, on obtient l'égalité $\overrightarrow{0} = \Big(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\Big)\overrightarrow{xp_0} + \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{xp_i}$. Donc le $(n+1)$-uplet $(a_0, a_1, \dots, a_n) = (1 - \sum_{i=1}^{n} x_i, x_1, \dots, x_n)$ convient.

- On vient en fait de montrer que la restriction $s_{|H}$ de s à H est surjective. Notons V la direction de X. C'est un espace vectoriel de base $(\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n})$.
Montrons que $s_{|H}$ est une application affine. Il s'agit de trouver un point $h \in H$ et une application linéaire $L_{s_{|H}} \in \mathcal{L}(H_0, V)$, telle que, pour tout $a \in H$, on ait $s_{|H}(a) = s_{|H}(h) + L_{s_{|H}}(\overrightarrow{ah})$. Si $a = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in H$, on a $s_{|H}(a) = p_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{p_0p_i}$; en particulier, pour $h = (1, 0, \dots, 0) \in H$, on a $s_{|H}(h) = p_0$. Comme $\overrightarrow{ah} = (a_0 - 1, a_1, \dots, a_n) \in H_0$, on obtient la formule voulue avec l'application $L_{s_{|H}} : H_0 \to V$, $(b_0, b_1, \dots, b_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} b_i \overrightarrow{p_0p_i}$, qui est clairement linaire.
On vérifie facilement que $L_{s_{|H}}$ est injective (et surjective), donc l'application $s_{|H}$ l'est aussi, et est donc bien un isomorphisme d'espaces affines.

Remarque : On vient de montrer qu'un espace affine de dimension n est l'ensemble des barycentres, de poids total 1, de $n+1$ points formant un repère affine. En particulier (cas $n = 1$), une droite affine est l'ensemble des barycentres, de poids total 1, de deux points distincts de cette droite.

Exercice 2.

a - Dans le cas $n = 2$ et les a_i tous égaux à $\frac{1}{3}$, on retrouve le fait que les médianes d'un triangle sont concourantes en le centre de gravité du triangle.

b - Par associativité du barycentre, pour $0 \leq i \leq n$, le point s est le barycentre des deux points pondérés (p_i, a_i) et $(s_i, \sum_{j \neq i} a_j)$ (les poids sont bien non nuls puisque les a_j sont supposés strictement positifs). Donc le point s est sur la droite (s_ip_i) pour tout i, et il reste à démontrer que, si $i \neq j$, alors les droites (s_ip_i) et (s_jp_j) ne sont pas confondues (elles auront alors s comme *unique* point d'intersection).
Supposons le contraire. Alors les points p_j, p_i et s_i sont alignés, donc il exite $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\overrightarrow{p_ip_j} = \lambda \overrightarrow{p_is_i}$. Par définition du barycentre s_i, on a $\overrightarrow{p_is_i} = \sum_{k \neq i} a'_k \overrightarrow{p_ip_k}$, où $a'_k = \frac{a_k}{\sum_{k \neq i} a'_k}$. Mais cela montre que la famille de vecteurs $(\overrightarrow{p_ip_k})_{k \neq i}$ est liée, ce qui contredit le fait que $(p_0, p_1, \dots, p_n)$ est une base affine de X.

Exercice 3.

a - Remarque : il faut prendre le $(m+1)$-uplet $(a_0, \ldots, a_m)$ tel que $\sum_{i=0}^m a_i \neq 0$ pour que les barycentres de la question (a) soient définis. Pour un tel $(m+1)$-uplet et pour un point arbitraire p de X, on a $Bar((p_i, a_i)_{0 \leq i \leq m}) = p + \sum_{i=0}^m \big(\frac{a_i}{\sum_{j=0}^m a_j}\big)\overrightarrow{pp_i}$. Comme f est affine, on obtient $f\big(Bar((p_i, a_i)_{0 \leq i \leq m})\big) = f(p) + \sum_{i=0}^m \big(\frac{a_i}{\sum_{j=0}^m a_j}\big)\overrightarrow{f(p)f(p_i)}$, et donc (par définition) $f\big(Bar((p_i, a_i)_{0 \leq i \leq m})\big)$ est le barycentre des points pondérés $(f(p_i), a_i)$ pour $0 \leq i \leq m$.

b - L'hypothèse donne $f(P) \subset P$, mais comme f est supposée injective et comme P est un ensemble fini, on a en fait $f(P) = P$ (car $f(P)$ est de cardinal $m+1$ par injectivité, et inclus dans P qui est de cardinal $m+1$). D'après la question (a), f envoie l'isobarycentre des points de P sur l'isobarycentre des points de $f(P) = P$, c'est-à-dire que f fixe cet isobarycentre.

c - On a $f^n = f \circ f^{n-1} = f^{n-1} \circ f = Id_X$, donc f est bijective (de réciproque f^{n-1}).
- Pour $p \in X$, f vérifie les hypothèses du (b) avec l'ensemble $P = \{p, f(p), f^2(p), \ldots, f^{n-1}(p)\}$ (puisque $f(f^{n-1}(p)) = f^n(p) = p$), donc f admet pour point fixe l'isobarycentre des points de cet ensemble P.
- Pour $n = 2$, voir l'exercice 4 de la fiche 2 : les applications affines f du plan qui vérifient $f \neq Id$ et $f^2 = Id$ sont les symétries par rapport à une droite, ou par rapport à un point (i.e. les rotations d'angle π). Pour $n \geq 3$, une rotation r d'angle $\frac{2\pi}{n}$ autour d'un point ω du plan vérifie $r \neq Id$ et $r^n = Id$ (car r^n est alors la rotation d'angle $n \cdot \frac{2\pi}{n} = 2\pi$ autour de ω).

Remarque : Il peut être bon de faire un dessin illustrant l'ensemble P de la question (c), en fonction du choix de p, pour les symétries et les rotations évoquées ci-dessus.

Exercice 4.

a - ...

b - Dans un premier temps, on peut directement vérifier (sans faire de récurrence), que l'ensemble $[p_1, p_2, \ldots, p_r]$ est une partie convexe de X : si $p = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_r \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_r \end{pmatrix}$ et $q = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_r \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_r \end{pmatrix}$ avec $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^r a_i = \sum_{i=1}^r b_i = 1$, alors pour un point arbitraire $o \in X$ et pour tout $t \in [0;1]$, on a, par définition des barycentres, $\overrightarrow{op} = \sum_{i=1}^r a_i \overrightarrow{op_i}$, de même $\overrightarrow{oq} = \sum_{i=1}^r b_i \overrightarrow{op_i}$, et $\begin{pmatrix} p & q \\ 1-t & t \end{pmatrix} = o + (1-t)\overrightarrow{op} + t\overrightarrow{oq}$. On a donc $\begin{pmatrix} p & q \\ 1-t & t \end{pmatrix} = o + \sum_{i=1}^r \big((1-t)a_i + tb_i\big)\overrightarrow{op_i}$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} p & q \\ 1-t & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_r \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_r \end{pmatrix}$, avec $c_i = (1-t)a_i + tb_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^r c_i = (1-t)\sum_{i=1}^r a_i + t\sum_{i=1}^r b_i = (1-t) + t = 1$. On a donc $\begin{pmatrix} p & q \\ 1-t & t \end{pmatrix} \in [p_1, p_2, \ldots, p_r]$ et le résultat annoncé.

Comme $[p_1, p_2, \ldots, p_r]$ contient clairement les points p_i (le point p_i est le barycentre des points p_j, $1 \leq j \leq r$, pour le système de poids $(a_1, \ldots, a_r)$ avec $a_i = 1$ et $a_j = 0$ si $j \neq i$), on a déjà l'inclusion $EnvConv(p_1, \ldots, p_r) \subset [p_1, \ldots, p_r]$.

- Montrons l'autre inclusion par récurrence sur r. il s'agit de vérifier que, pour toute partie convexe C de X contenant les points $p_1, \ldots, p_r$, on a $[p_1, \ldots, p_r] \subset C$.
Pour $r = 1$, il n'y a rien faire : l'ensemble $[p_1]$ est le singleton $\{p_1\}$.
Supposons le résultat vrai pour $r \geq 1$ et considérons $r+1$ points $p_1, \ldots, p_r, p_{r+1}$ de X et une partie convexe C de X contenant ces points. Alors, C contient en particulier les points $p_1, \ldots, p_r$, donc contient l'ensemble $[p_1, \ldots, p_r]$ par hypothèse de récurrence. Comme C est convexe, C contient donc la réunion U de tous les segments joignant p_{r+1} à un point de $[p_1, \ldots, p_r]$, et on aura l'inclusion voulue $[p_1, \ldots, p_r, p_{r+1}] \subset C$ si l'on montre l'inclusion $[p_1, \ldots, p_r, p_{r+1}] \subset U$ (cela impliquera en fin de compte l'égalité $[p_1, \ldots, p_r, p_{r+1}] = U$; visualiser sur les dessins du (a) ce que cela signifie).

Soit $p = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_{r+1} \\ a_1 & \cdots & a_{r+1} \end{pmatrix} \in [p_1, \ldots, p_{r+1}]$, c'est-à-dire avec les $a_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{r+1} a_i = 1$. Si $p = p_{r+1}$ (i.e. si $a_{r+1} = 1$), alors $p \in U$ par construction. On peut donc supposer $a_{r+1} \neq 1$ et donc $\sum_{i=1}^{r} a_i \neq 0$. Par associativité du barycentre, on a alors $p = \begin{pmatrix} q & p_{r+1} \\ (\sum_{i=1}^{r} a_i) & a_{r+1} \end{pmatrix} \in [p_{r+1}, q]$, où $q = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_r \\ a_1 & \cdots & a_r \end{pmatrix}$. Comme on a aussi $q = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_r \\ a'_1 & \cdots & a'_r \end{pmatrix}$ avec $a'_i = \frac{a_i}{\sum_{i=1}^{r} a_i}$, on voit que q appartient $[p_1, \ldots, p_r]$ et on a donc le résultat.

c - Comme une application affine f envoie le barycentre d'une famille de points sur le barycentre de la famille de points image (en préservant les systèmes de poids), il est clair que f envoie $[p_1, \ldots, p_r]$ sur $[f(p_1), \ldots, f(p_r)]$. On conclut grâce à (b).

d - Par exemple, la rotation d'un quart de tour autour de l'axe de symétrie vertical du cube envoie T sur T'.
Notons $S = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ et $S' = \{p'_1, p'_2, p'_3, p'_4\}$ les ensembles de sommets de T et T' respectivement. Notons $F(T, T')$ l'ensemble des bijections affines envoyant T sur T', et $B(S, S')$ l'ensemble des bijections de S sur S' (ce ne sont pas des groupes !).
En admettant qu'un élément de $F(T, T')$ envoie nécessairement un élément de S sur un élément de S', on obtient une application $\phi : F(T, T') \to B(S, S')$, $f \mapsto f_{|S}$, où $f_{|S}$ est ici la restriction de f à S au départ et à S' à l'arrivée.
Comme S est un repère affine de $\mathbf{R}^3$, une application affine f est entièrement déterminée par son action sur S, et l'application ϕ est donc injective. De même, toute bijection $\sigma \in B(S, S')$ se prolonge en une (unique) application affine $f : X \to X$, qui est nécessairement une bijection affine (puisque $S' = f(S)$ est aussi un repère affine de $\mathbf{R}^3$), donc qui appartient $F(T, T')$; donc ϕ est surjective.
L'application ϕ est donc bijective, et comme $B(S, S')$ est clairement de cardinal $4! = 24$, il en est de même pour $F(T, T')$.

Remarque : En admettant qu'un élément f de $F(T, T')$ envoie aussi nécessairement un élément de S' sur un élément de S, on voit qu'une telle bijection affine f stabilise l'ensemble $S \cup S'$ de tous les sommets du cube C (et donc stabilise le cube C qui en est l'enveloppe convexe). Obtient-on de cette façon toutes les bijections affines stabilisant le cube C ? Sinon, combien y en a-t-il en tout ?

Exercice 5.

On laisse le dessin aux soins du lecteur ; les sommets du cube sont les points $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ et $(1,1,1)$.
- On rappelle que la droite affine passant pas deux points distincts p et q d'un espace affine est l'ensemble des barycentres de poids total 1 de p et q, c'est-à-dire l'ensemble $p + \mathbf{R}\overrightarrow{pq}$ (en choisissant pour point arbitraire le point p dans la définition d'un barycentre des points p et q). On obtient, pour les diagonales du cube :
la diagonale passant par $(0,0,0)$ et $(1,1,1)$ est la droite $\mathbf{R}(1,1,1)$,
la diagonale passant par $(1,0,0)$ et $(0,1,1)$ est la droite $(1,0,0) + \mathbf{R}(-1,1,1)$,
la diagonale passant par $(0,1,0)$ et $(1,0,1)$ est la droite $(0,1,0) + \mathbf{R}(1,-1,1)$,
la diagonale passant par $(1,1,0)$ et $(0,0,1)$ est la droite $(1,1,0) + \mathbf{R}(-1,-1,1)$.
- Le plan H passant par $(1,1,1)$ et perpendiculaire à la diagonale $\mathbf{R}(1,1,1)$ est le plan affine passant par $(1,1,1)$ et de direction orthogonale à la direction $\mathbf{R}(1,1,1)$ de la diagonale en question (orthogonalité au sens du produit scalaire usuel $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ dans $\mathbf{R}^3$), c'est-à-dire de direction le plan vectoriel $H_0 = \{(x,y,z) \mid \langle (x,y,z) | (1,1,1) \rangle = x + y + z = 0\}$.
Le plan affine H est donc le plan $(1,1,1) + H_0 = \{(x,y,z) \mid x + y + z = 3\}$.

Exercice 6.

a - Notons W'' la direction du sous-espace affine $< A \cup A' >$ de X. Comme $< A \cup A' >$ contient $A = p + W$ et $A' = p' + W'$ (donc en particulier les points p et p'), on voit que W'' contient nécessairement le vecteur $\overrightarrow{pp'}$ et les sous-espaces vectoriels W et W' de V, donc contient le sous-espace vectoriel $W + W' + \mathbf{R}\overrightarrow{pp'}$ engendré par W, W' et $\overrightarrow{pp'}$. On en déduit que $< A \cup A' >= p + W''$ contient le sous-espace affine $p + (W + W' + \mathbf{R}\overrightarrow{pp'})$ de X. Réciproquement, le sous-espace affine $p + (W + W' + \mathbf{R}\overrightarrow{pp'})$ de X contient clairement $A = p + W$ et $A' = p' + W' = p + \overrightarrow{pp'} + W'$, donc contient $< A \cup A' >$. On a donc l'égalité $< A \cup A' >= p + (W + W' + \mathbf{R}\overrightarrow{pp'})$.

- Déterminons à présent la dimension de $< A \cup A' >$ (c'est-à-dire de $W'' = (W + W' + \mathbf{R}\overrightarrow{pp'})$. Premier cas : si $A \cap A' \neq \emptyset$, c'est-à-dire si $\overrightarrow{pp'} \in W + W'$, alors $W'' = (W + W')$ est de dimension $dim(W + W') = dim(W) + dim(W') - dim(W \cap W')$. Deuxième cas : si $A \cap A' = \emptyset$, c'est-à-dire si $\overrightarrow{pp'} \notin W + W'$, alors W'' est de dimension $dim(W + W') + 1 = dim(W) + dim(W') - dim(W \cap W') + 1$.

b - Soient $p \in A$ et $p' \in A'$. La droite (pp') est l'ensemble $p + \mathbf{R}\overrightarrow{pp'}$ (réduit au singleton $\{p\}$ si $p = p'$). Donc un sous-espace affine de X contenant p et p' (donc de direction contenant $\overrightarrow{pp'}$) contient nécessairement la droite (pp'). Le sous-espace affine $< A \cup A' >$ contient donc en particulier toutes les droites (pp'), pour $p \in A$ et $p' \in A'$ (sans faire d'hypothèse sur $A \cap A'$).

- Supposons à présent $A \cap A' \neq \emptyset$, fixons un point $q \in A \cap A'$ et considérons un point $x \in < A \cup A' >= q + (W + W')$. Il existe $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in W \times W'$ tel que $x = q + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$. Mais alors, si l'on pose $p = q + 2\overrightarrow{v}$ et $p' = q + 2\overrightarrow{w}$, on a $p \in A$, $p' \in A'$, $\overrightarrow{pp'} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qp'} = -2\overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{w}$, et $x = q + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = p + \frac{1}{2}\overrightarrow{pp'}$ (faire une figure) ; on a donc $x \in (pp')$. On en déduit, dans ce cas, que le sous-espace affine $< A \cup A' >$ est inclus dans — et donc coïncide avec — la réunion des droites (pp'), où $p \in A$ et $p' \in A'$.

c - Considérons les deux droites affines $A = \mathbf{R}(1, 0, 0)$ et $A' = (0, 0, 1) + \mathbf{R}(0, 1, 0)$ dans $\mathbf{R}^3$ (de direction $W = \mathbf{R}(1, 0, 0)$ et $W' = \mathbf{R}(0, 1, 0)$ respectivement). On a clairement $A \cap A' = \emptyset$, donc $< A \cup A' >$ est de dimension $dim(W) + dim(W') - dim(W \cap W') + 1 = 3$, ce qui implique $< A \cup A' >= \mathbf{R}^3$. Mais une droite passant par un point p de A et un point p' de A' coupe le plan affine P d'équation $z = 1$ en p' uniquement, et la réunion des droites du (b) ne contient donc aucun point de $P \setminus A'$, donc est distincte de $\mathbf{R}^3$.