# ALGÈBRE COMMUTATIVE I : CORRIGÉ

**Exercice 1** — Si un idéal bilatère $\mathfrak{a}$ de $\mathrm{M}_n(k)$ est non nul, il contient une matrice M de rang $r \geq 1$. Il existe des matrices $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_n(k)$ telles que $\mathrm{PMQ} = \mathrm{J}_r = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathfrak{a}$ contient donc $\mathrm{J}_r$. On en déduit que $\mathfrak{a}$ contient la matrice élémentaire $\mathrm{E}_{11} = \mathrm{J}_r\mathrm{E}_{11}$, puis chacune des matrices $\mathrm{E}_{ii} = \mathrm{T}_{1i}\mathrm{E}_{11}\mathrm{T}_{1i}$, $1 \leq i \leq n$, où $\mathrm{T}_{1i}$ désigne la matrice transposant les coordonnées d'indices $i$ et 1, et donc finalement la matrice identité $\mathrm{I}_n = \sum_i \mathrm{E}_{ii}$. Les seuls idéaux bilatères de l'anneau $\mathrm{M}_n(k)$ sont donc $\{0\}$ et $\mathrm{M}_n(k)$.

**Exercice 2** — 1. (i) Quels que soient $a, b \in \mathrm{A}$,

$$a + b = (a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a + b + ab + ba, \text{ donc } ab + ba = 0$$

et

$$2a = (a+1)^2 - (a^2+1) = (a+1) - (a+1) = 0$$

donc l'anneau A est de caractéristique 2 (i.e. l'homomorphisme canonique $\mathbb{Z} \to \mathrm{A}$ se factorise par $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_2$) et il est commutatif ($ab = ab + 2ba = ba$).

(ii) Si l'anneau booléien A est intègre, l'identité $a^2 - a = a(a-1) = 0$ implique $a = 0$ ou $a = 1$ et donc A est le corps $\mathbb{F}_2$ (l'homomorphisme canonique $\mathbb{F}_2 \to \mathrm{A}$ est un isomorphisme). Quel que soient alors l'anneau booléien A et l'idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, $\mathrm{A}/\mathfrak{p}$ est un anneau booléien intègre, donc un corps, et $\mathfrak{p}$ est par conséquent maximal.

(iii) Il suffit de vérifier que l'idéal $\mathrm{A}a + \mathrm{A}b$ engendré par deux éléments $a, b$ de A est principal. Tel est bien le cas en vertu des identités $a = a(a + b + ab)$ et $b(a + b + ab)$ : $\mathrm{A}a + \mathrm{A}b$ est l'idéal principal engendré par $a + b + ab$.

2. Quelle que soit la partie F de E, on désigne par $\chi_{\mathrm{F}}$ l'application

$$\mathrm{E} \to \mathbb{F}_2,\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathrm{F} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathrm{F} \end{cases} \quad \text{(fonction caractéristique de F)}$$

et on vérifie immédiatement que l'application $\chi \mapsto \chi_{\mathrm{F}}$ de l'ensemble $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ des parties de E dans l'ensemble $\mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathbb{F}_2)$ des applications de E dans $\mathbb{F}_2$ est une bijection satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\chi_{\mathrm{F}\cap\mathrm{F}'} = \chi_{\mathrm{F}}\chi_{\mathrm{F}'} \ \text{ et } \ \chi_{(\mathrm{F}\cup\mathrm{F}')-(\mathrm{F}\cap\mathrm{F}')} = \chi_{\mathrm{F}} + \chi_{\mathrm{F}'}$$

pour toutes parties $\mathrm{F}, \mathrm{F}'$ de E. Les lois de compositions définies sur $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ ne sont donc autres que celles provenant de la structure naturelle de $\mathbb{F}_2$-algèbre sur $\mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathbb{F}_2)$ via cette bijection. En particulier, comme $\mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathbb{F}_2)$ est un anneau booléien, il en est de même pour $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ muni de la structure d'anneau considérée.

3. (i) Quels que soient l'élément $f$ de A et l'idéal premier $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec(A)}$, l'identité $f(f-1) = 0$ implique $f(f-1) \in \mathfrak{p}$, donc $f \in \mathfrak{p}$ ou $f - 1 \in \mathfrak{p}$, et ces deux dernières conditions s'excluent mutuellement puisque $1 \notin \mathfrak{p}$. En d'autres termes : chaque idéal premier est contenu dans un seul des ouverts $\mathrm{D}(f-1), \mathrm{D}(f)$ de $\mathrm{Spec(A)}$, donc

$$\mathrm{Spec(A)} = \mathrm{D}(f) \cup \mathrm{D}(f-1),\ \ \mathrm{D}(f) \cap \mathrm{D}(f-1) = \emptyset$$

et $\mathrm{D}(f)$ est une bien partie ouverte et fermée de $\mathrm{Spec(A)}$.

(ii) Soit Y une partie ouverte et fermée de $\mathrm{Spec(A)}$. Comme les ouverts principaux engendrent la topologie de $\mathrm{Spec(A)}$ (cf. exercice 7, 1), il existe une famille $\{f_i\}_{i\in\mathrm{I}}$ d'éléments de A telle que l'ouvert Y soit la réunion des $\mathrm{D}(f_i)$. Comme Y est fermé,

$$(\mathrm{Spec(A)} - \mathrm{Y}) \cup \bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{D}(f_i)$$

est un recouvrement ouvert de l'espace topologique $\mathrm{Spec(A)}$ ; ce dernier étant quasi-compact (cf. exercice 7, 1), il existe un sous-ensemble fini J de I tel que Y soit recouvert par les ouverts $\mathrm{D}(f_j)$, $j \in \mathrm{J}$, et il reste à vérifier que toute réunion finie d'ouverts principaux est un ouvert principal. Il suffit de traiter le cas de deux ouverts $\mathrm{D}(a), \mathrm{D}(b)$, qui découle immédiatement de la question 1. (iii) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Spec}(\mathrm{A}) - (\mathrm{D}(a) \cup \mathrm{D}(b)) &= (\mathrm{Spec}(\mathrm{A}) - \mathrm{D}(a)) \cap (\mathrm{Spec}(\mathrm{A}) - \mathrm{D}(b)) \\
&= \mathrm{V}(\mathrm{A}a) \cap \mathrm{V}(\mathrm{A}b) \\
&= \mathrm{V}(\mathrm{A}(a+b+ab)) \\
&= \mathrm{Spec}(\mathrm{A}) - \mathrm{D}(a+b+ab)
\end{aligned}$$

et donc $\mathrm{D}(a) \cup \mathrm{D}(b) = \mathrm{D}(a+b+ab)$.

(iii) L'espace topologique $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ étant quasi-compact, il s'agit de voir qu'il est séparé. Étant donnés $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ deux idéaux premiers distincts A, il existe un élément $f$ de A appartenant à $\mathfrak{p}'$ mais pas à $\mathfrak{p}$ ; on a alors $\mathfrak{p} \in \mathrm{D}(f)$ et $\mathfrak{p}' \notin \mathrm{D}(f)$, donc $\mathfrak{p} \in \mathrm{D}(f)$ et $\mathfrak{p}' \in \mathrm{D}(f-1)$, et $\mathrm{D}(f), \mathrm{D}(f-1)$ sont ainsi des voisinages disjoints de $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ respectivement.

**Exercice 3** — Commençons par une observation préliminaire : tout homomorphisme d'anneaux $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ donne naturellement naissance à des homomorphismes d'anneaux

$$\mathrm{M}_n(\mathrm{A}) \to \mathrm{M}_n(\mathrm{B}), \ \ (m_{ij}) \mapsto (\varphi(m_{ij})), \ \text{ et } \ \mathrm{A}[\mathrm{T}] \to \mathrm{B}[\mathrm{T}], \ \sum_n a_n \mathrm{T}^n \mapsto \sum_n \varphi(a_n)\mathrm{T}^n,$$

que l'on convient de désigner également par la lettre $\varphi$. Quels que soient la matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{A})$ et le polynôme $\mathrm{P} \in \mathrm{A}[\mathrm{T}]$,

$$\chi_{\varphi(\mathrm{M})} = \varphi(\chi_\mathrm{M}) \ \text{ et } \ \varphi(\mathrm{P}(\mathrm{M})) = \varphi(\mathrm{P})(\varphi(\mathrm{M})).$$

Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{A})$. Quels que soient le corps K et l'homomorphisme d'anneaux $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{K}$,

$$\varphi(\chi_\mathrm{M}(\mathrm{M})) = \chi_{\varphi(\mathrm{M})}(\varphi(\mathrm{M})) = 0$$

en vertu du théorème de Hamilton-Cayley usuel dans $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ ; les coefficients de la matrice $\chi_\mathrm{M}(\mathrm{M})$ ont ainsi une image nulle par tout homomorphisme de A dans un corps. Il est équivalent de dire que les coefficients de $\chi_\mathrm{M}(\mathrm{M})$ appartiennent à l'intersection de tous les idéaux premiers de A [(1)] et ce sont donc des éléments nilpotents : en effet, l'intersection des idéaux premiers de l'anneau A est l'idéal, appelé *nilradical* de A et noté $\mathfrak{N}(\mathrm{A})$, constitué des éléments nilpotents de A [(2)]. À ce stade, nous ne pouvons conclure à la nullité de $\chi_\mathrm{M}(\mathrm{M})$ seulement si l'anneau A est *réduit*, c'est-à-dire s'il ne contient pas d'élément nilpotent non nul.

Introduisons maintenant l'anneau $\mathrm{A}_0 = \mathbb{Z}[(\mathrm{T}_{ij})_{1 \le i,j \le n}]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ en les indéterminés $\mathrm{T}_{i,j}$ et la matrice $\mathrm{M}_0 = (\mathrm{T}_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathrm{A}_0)$. L'anneau $\mathrm{A}_0$ étant réduit (pour le démontrer, on peut par exemple invoquer les questions 1. (ii) et 2 de l'exercice 4), on déduit de ce qui précède l'identité

$$\chi_{\mathrm{M}_0}(\mathrm{M}_0) = 0$$

dans $\mathrm{M}_n(\mathrm{A}_0)$.

---

(1) Les conditions suivantes sont équivalentes pour tout élément $a$ de A :
- quels que soient le corps K et l'homomorphisme $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{K}$, $\varphi(a) = 0$ ;
- $a$ appartient à tous les idéaux premiers de A.

La première implique la seconde car le noyau d'un homomorphisme de A dans un corps est un idéal premier de A ; la seconde implique la première car, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, l'anneau intègre $\mathrm{A}/\mathfrak{p}$ s'injecte dans son corps des fractions $\kappa(\mathfrak{p})$

(2) Voir par exemple *Introduction to Commutative Algebra*, M. F. Atiyah and I. G. MacDonald, Addison-Wesley Pub.Co. (1969), Chap.1, Proposition 1.8.

Soit alors $\varphi$ l'unique homomorphisme de $A_0$ dans A tel que $\varphi(T_{ij}) = m_{ij}$ pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ [3] ; on a $M = \varphi(M_0)$ et donc

$$\chi_M(M) = \chi_{\varphi(M_0)}(\varphi(M_0)) = \varphi(\chi_{M_0}(M_0)) = \varphi(0) = 0.$$

Soit $N \in M_n(A)$. Si la matrice N est nilpotente, $\chi_{\varphi(N)} = T^n$ pour tout homomorphisme $\varphi$ de A dans un corps et donc les coefficients non dominants du polyôme $\chi_N$ sont des éléments nilpotents de A. Réciproquement, si cette dernière condition est vérifiée, $N^n$ est une somme d'éléments nilpotents de la sous-A-algèbre de $M_n(A)$ engendrée par N ; comme cette algèbre est commutative, ses éléments nilpotents en constituent un idéal et N est donc une matrice nilpotente [4]

**Exercice 4** — 1. (i) Quel que soit le corps K, $K[T]^\times = K^\times$. En raisonnant comme dans l'exercice précédent, on en déduit l'inclusion

$$A[T]^\times \subset \{a_0 + a_1T + \ldots + a_nT^n \mid a_0 \in A^\times \text{ et } a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{N}(A)\}.$$

L'inclusion réciproque découle immédiatement du fait que, dans tout anneau B, $1+b$ est inversible si $b$ est un élément nilpotent de B : $(1+b)^{-1} = 1 + \sum_{n\geq 1}(-1)^n b^n$ (la somme est finie).

(ii) Le *radical* (ou *radical de Jacobson*) d'un anneau B est par défintion l'intersection des idéaux maximaux de B ; c'est un idéal, noté $\mathfrak{R}(B)$, que l'on peut également caractérisé de la manière suivante [5] :

$$\mathfrak{R}(B) = \{b \in B \mid \text{pour tout } x \in B,\ 1 + xb \in B^\times\}.$$

L'inclusion $\mathfrak{N}(B) \subset \mathfrak{R}(B)$ est tautologique.

Dans le cas qui nous intéresse, on dispose des inclusions évidentes :

$$\mathfrak{N}(A)[T] = \{a_0 + a_1T + \ldots + a_nT^n \mid a_0, \ldots, a_n \in \mathfrak{N}(A)\} \subset \mathfrak{N}(A[T]) \subset \mathfrak{R}(A[T])$$

ainsi que de l'inclusion

$$\mathfrak{R}(A[T]) \subset \mathfrak{N}(A)[T]$$

en vertu de la caractérisation que l'on vient de mentionner du radical d'un anneau et de la détermination de $A[T]^\times$ à la question précédente. Nous avons donc :

$$\mathfrak{N}(A[T]) = \mathfrak{R}(A[T]) = \mathfrak{N}(A)[T].$$

(iii) Soit $f = a_0 + a_1T + \ldots + a_nT^n$ un diviseur de zéro dans A[T] et soit $g = b_0 + b_1T + \ldots + b_mT^m$ de degré minimal parmi les éléments non nuls de A[T] tels que $fg = 0$ (il existe par hypothèse). On a $a_nb_m = 0$, donc $a_ng = 0$ par minimalité ; il en découle les égalités

$$0 = fg = (f - a_nT^n)g + a_nT^ng = (f - a_nT^n)g,$$

donc $a_{n-1}b_m = 0$ puis $a_{n-1}g = 0$ par minimalité. En poursuivant le raisonnement ainsi amorcé, on obtient $a_ig = 0$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$ et le coefficient $b_m$ de $g$, non nul par hypothèse, répond à la question : $b_mf = 0$.

2. Supposons tout d'abord que l'ensemble I soit fini. En raisonnant par récurrence sur le cardinal de I, on déduit immédiatement de la question 1 les propriétés suivantes de l'anneau $B = A[\{T_i\}_{i\in I}]$ :

$$\mathfrak{N}(B) = \mathfrak{R}(B) = \mathfrak{N}(A)[\{T_i\}_{i\in I}],\ \ B^\times = A^\times + \mathfrak{N}(B)$$

---

[3] Les anneaux de polynômes satisfont à une propriété universelle qui les caractérise. Quels que soient l'anneau (non nécessairement commutatif) B et l'ensemble I, on désigne par $B^{(I)}$ l'ensemble des applications de I dans B de *support fini* (i.e. s'annulant en dehors d'un sous-ensemble fini de I). Étant donné un anneau A (non nécessairement commutatif) A, l'anneau $A[(T_i)_{i\in I}]$ des polynômes à coefficients dans A en la famille d'indéterminée $\{T_i\}_{i\in I}$ satisfait alors à la condition suivante : quel que soit la A-algèbre (non nécessairement commutative) B, l'application

$$\mathrm{Hom}_{A-\mathbf{Alg}}(A[(T_i)_{i\in I}], B) \to B^{(I)},\ \varphi \mapsto (\varphi(T_i))_{i\in I}$$

réalise une bijection, le membre de gauche étant l'ensemble des homomorphismes de A-algèbres de $A[(T_i)_{i\in I}]$ dans B. Cette propriété caractérise l'anneau $A[[(T_i)_{i\in I}]$ à un isomorphisme unique près : si C est une A-algèbre satisfaisant à la même condition, il existe un isomorphisme et un seul de $A[[(T_i)_{i\in I}]$ sur C qui soit compatible (en un sens évident) avec cette propriété (le vérifier !). Une référence possible : *Les formalismes fondamentaux de l'algèbre commutative*, J.-P. Lafon, Hermann (1998).

[4] Prendre garde que les élément nilpotents de $M_n(A)$ ne constituent évidemment pas un idéal de $M_n(A)$ dès que $n \geq 2$. Contre-exemple (n=2) : les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes mais leur somme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne l'est pas puisqu'elle est inversible !

[5] Voir par exemple Atiyah - MacDonald, Chap.1, Proposition 1.9.

et un élément $f$ de B est diviseur de zéro si et seulement s'il existe $a \in \mathrm{A}$ non nul tel que $af = 0$.

Pour traiter le cas d'un ensemble I quelconque, il suffit de remarquer que toute famille finie de polynômes dans $\mathrm{A}[\{\mathrm{T}_i\}_{i\in\mathrm{I}}]$ est contenue dans un sous-anneau $\mathrm{A}[\{\mathrm{T}_j\}_{j\in\mathrm{J}}]$ avec $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ *fini* et d'utiliser les résultats précédents.

**Exercice 5** — 1. Rappel : étant donné un anneau A, on désigne par A[[T]] l'anneau des *séries formelles* à coefficients dans A en l'indéterminée T ; il s'agit des expressions

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mathrm{T}^n$$

avec $a_n \in \mathrm{A}$, la structure d'anneau étant définie par

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mathrm{T}^n\right) + \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \mathrm{T}^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n)\mathrm{T}^n \text{ et } \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mathrm{T}^n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \mathrm{T}^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{p,q\in\mathbb{N},\ p+q=n} a_p b_q\right)\mathrm{T}^n.$$

Observation préliminaire : l'élément $1-\mathrm{T}$ de A[[T]] est inversible, d'inverse $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{T}^n$ (vérification immédiate).

Soit $f \in \mathrm{A}[[\mathrm{T}]]$ une série formelle dont le terme initial $a_0 = f(0)$ s'annule. On a alors $f^p \in \mathrm{T}^p\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]$ pour tout entier naturel $p$ et il existe donc une unique série formelle $g \in \mathrm{A}[[T]]$ telle que

$$g = f + f^2 + \ldots + f^p \mod. \mathrm{T}^{p+1}\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]$$

pour tout entier naturel $p$ : le coefficient de $\mathrm{T}^n$ dans $g$ est simplement la somme des coefficients de $\mathrm{T}^n$ dans $f, f^2, \ldots, f^n$. En d'autre termes, l'expression $\sum_{n\in\mathbb{N}} f^n$ définit (malgré les apparences...) un élément de A[[T]], à savoir $g$. L'identité

$$(1-f)g = 1$$

est immédiate : quel que soit en effet l'entier naturel $p$,

$$\begin{aligned}(1-f)g &= (1-f)(1+f+f^2+\ldots+f^p) \mod. \mathrm{T}^{p+1}\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]\\ &= 1 \mod. \mathrm{T}^{p+1}\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]\end{aligned}$$

et donc $(1-f)g - 1 = 0$.

On déduit de ce qui précède l'inclusion $\mathrm{A}^\times + \mathrm{TA}[[\mathrm{T}]] \subset \mathrm{A}[[\mathrm{T}]]^\times$ : si en effet $f$ est une série formelle dont le terme constant $f(0)$ est inversible dans A, il suffit d'écrire $f$ sous la forme $f = f(0) - (f(0) - f) = f(0)[1 - f(0)^{-1}(f(0) - f)] = f(0)(1-h)$ avec $h(0) = 0$ pour voir qu'elle est inversible. L'inclusion réciproque est immédiate et donc $\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]^\times = \mathrm{A}^\times + \mathrm{TA}[[\mathrm{T}]]$.

En utilisant la caractérisation du radical de Jacobson rappelée à la question 1. (ii) de l'exercice précédent, il vient :

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}(\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]) &= \{f \in \mathrm{A}[[\mathrm{T}]] \mid 1 + gf \in \mathrm{A}[[\mathrm{T}]]^\times, \text{ pour tout } g \in \mathrm{A}[[\mathrm{T}]]\}\\ &= \{f \in \mathrm{A}[[\mathrm{T}]] \mid 1 + af(0) \in \mathrm{A}^\times, \text{ pour tout } a \in \mathrm{A}\}\\ &= \{f \in \mathrm{A}[[\mathrm{T}]] \mid f(0) \in \mathfrak{R}(A)\}.\end{aligned}$$

2. Si l'anneau A est intègre, il en est de même de l'anneau A[[T]] (vérification facile : considérer le premier coefficient non nul dans $f, g$ et $fg$). Quel que soit l'idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, l'homomorphisme canonique $\mathrm{A}[[\mathrm{T}]] \to (\mathrm{A}/\mathfrak{p})[[\mathrm{T}]]$ défini par la réduction des coefficients modulo $\mathfrak{p}$ a pour noyau l'idéal de A[[T]] engendré par $\mathfrak{p}$ ; comme l'anneau d'arrivée est intègre, $\mathfrak{p}\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]$ est un idéal premier de A[[T]]. En utilisant le fait que le nilradical d'un anneau est précisément l'intersection de ses idéaux premiers, nous déduisons de ces observations l'inclusion

$$\mathfrak{N}(\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]) \subset \bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(\mathrm{A})} \mathfrak{p}\mathrm{A}[[\mathrm{T}]] = \mathfrak{N}(\mathrm{A})[[\mathrm{T}]].$$

Cette inclusion peut être stricte. Considérons par exemple l'anneau A, quotient de l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ par l'idéal qu'engendrent $\mathrm{T}_0$, $\mathrm{T}_n^n$, $n \geq 1$, et $\mathrm{T}_n\mathrm{T}_m$, $n \neq m$ ; si l'on désigne par $t_n$ l'image de $\mathrm{T}_n$ dans A, alors $t_n^n = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $t_n t_m = 0$ pour tous entiers $n, m$ distincts. La série formelle $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} t_n \mathrm{T}^n$ est à coefficients nilpotents mais elle n'est pas nilpotente car $f^p = \sum_{n\in\mathbb{N}} t_n^p \mathrm{T}^{np}$ n'est nulle pour aucun entier $p \geq 1$ puisque $t_{p+1}^p \neq 0$ dans A.

**Remarque** – *Il est facile de vérifier que l'inclusion* $\mathfrak{N}(\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]) \subset \mathfrak{N}(\mathrm{A})[[\mathrm{T}]]$ *est une égalité s'il existe un entier naturel* N *tel que* $a^{\mathrm{N}} = 0$ *pour tout élément a de* $\mathfrak{N}(\mathrm{A})$ *; c'est en particulier le cas si l'idéal* $\mathfrak{N}(\mathrm{A})$ *est engendré par un nombre fini d'éléments.*

3. Étant donné un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, l'idéal $(\mathfrak{m},\mathrm{T})$ de $\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]$ est le noyau de l'homomorphisme surjectif $\mathrm{A}[[\mathrm{T}]] \to \mathrm{A}/\mathfrak{m},\ f \mapsto f(0)$ mod. $\mathfrak{m}$ ; c'est donc un idéal maximal. Cela permet de définir une application

$$\mathrm{Max}(\mathrm{A}) \to \mathrm{Max}(\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]),\ \ \mathfrak{m} \mapsto (\mathfrak{m},\mathrm{T})$$

qui est manifestement injective.

Comme l'élément $1 - f\mathrm{T}$ de $\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]$ est inversible quel que soit $f$ dans $\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]$ en vertu de la question (i), T appartient au radical de $\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]$ et donc à chaque idéal maximal de $\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]$. Soit $\mathfrak{m}'$ un idéal maximal de $\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]$ et soit $\mathfrak{m} = \mathrm{A} \cap \mathfrak{m}'$ ; si un élément $a$ de A n'appartient pas à $\mathfrak{m}$, il existe un élément $f$ de $\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]$ tel que $af = 1$ mod. $\mathfrak{m}'$ puisque $\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]/\mathfrak{m}'$ est un corps ; comme $\mathrm{T} \in \mathfrak{m}'$, cette égalité est équivalente à $af(0) = 1$ mod. $\mathfrak{m}'$ ou encore à $af(0) = 1$ mod. $\mathfrak{m}$, et cette dernière montre que $\mathrm{A}/\mathfrak{m}$ est un corps. L'idéal $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \cap \mathrm{A}$ de A est ainsi maximal et, comme $\mathfrak{m}' = (\mathfrak{m}' \cap \mathrm{A},\mathrm{T})$, l'application considérée est surjective, donc bijective.

**Exercice 6** — Étant donnés un anneau A et un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, on désigne par $\kappa(\mathfrak{p})$ le corps des fractions de l'anneau intègre $\mathrm{A}/\mathfrak{p}$.

0. *Complément : idéaux premiers d'un localisé.* Soient A un anneau et S une partie multiplicative de A. L'homomorphisme canonique $i_{\mathrm{S}} : \mathrm{A} \to \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ induit une application ${}^{a}i_{\mathrm{S}} : \mathrm{Spec}(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}) \to \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, envoyant un idéal premier $\mathfrak{q}$ de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ sur l'idéal premier $i_{\mathrm{S}}^{-1}\mathfrak{q}$ de A (cet idéal est premier puisque l'anneau quotient $\mathrm{A}/i_{\mathrm{S}}^{-1}\mathfrak{q}$ s'injecte dans l'anneau intègre $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}/\mathfrak{q}$).

L'application ${}^{a}i_{\mathrm{S}}$ réalise une bijection sur le sous-ensemble de $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ constitué des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de A ne rencontrant pas S.

- L'application ${}^{a}i_{\mathrm{S}}$ est injective : étant donné un idéal premier $\mathfrak{q}$ de A, $\mathfrak{q}$ est l'idéal de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ engendré par l'idéal premier $\mathfrak{p} = i_{\mathrm{S}}^{-1}\mathfrak{q}$ de A. L'inclusion $\mathfrak{p}\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A} \subset \mathfrak{q}$ est en effet évidente ; réciproquement, étant donné un élément $b$ de $\mathfrak{q}$, il existe des éléments $s$ de S et $a$ de A tels que $i_{\mathrm{S}}(s)b = i_{\mathrm{S}}(a)$ et donc $b = i_{\mathrm{S}}(s)^{-1}i_{\mathrm{S}}(a)$ appartient à l'idéal de $\mathrm{S}^{-1}(\mathrm{A})$ engendré par $i_{\mathrm{S}}^{-1}\mathfrak{q}$.
- L'image de l'application ${}^{a}i_{\mathrm{S}}$ est l'ensemble des idéaux premiers de A ne rencontrant pas S. Si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$, $i_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}) \cap \mathfrak{q} = \emptyset$ puisque $i_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}) \subset (\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A})^{\times}$ et donc $\mathrm{S} \cap i_{\mathrm{S}}^{-1}(\mathfrak{q}) = \emptyset$. Réciproquement, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A ne rencontrant pas S, l'homomorphisme canonique $\mathrm{A} \to \kappa(\mathfrak{p})$ envoie S dans $\kappa(\mathfrak{p})^{\times}$ et il se factorise donc à travers la flèche $i_{\mathrm{S}}$ ; l'homomorphisme obtenu $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A} \to \kappa(\mathfrak{p})$ a pour noyau un idéal premier $\mathfrak{q}$ de $\mathrm{S}^{-1}(\mathrm{A})$ et on vérifie immédiatement l'identité $\mathfrak{p} = i_{\mathrm{S}}^{-1}(\mathfrak{q})$.

*Conséquence* : étant donné un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, les idéaux premiers du localisé $\mathrm{A}_{\mathfrak{p}}$ de A relativement à la partie multiplicative $\mathrm{A} - \mathfrak{p}$ sont les idéaux $\mathfrak{q}\mathrm{A}_{\mathfrak{p}}$ engendrés par les idéaux premiers $\mathfrak{q}$ de A ne rencontrant pas $\mathrm{A} - \mathfrak{p}$, c'est-à-dire les idéaux premiers $\mathfrak{q}$ de A contenus dans $\mathfrak{p}$. En particulier, $\mathrm{A}_{\mathfrak{p}}$ est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{p}\mathrm{A}_{\mathfrak{p}}$ ; en outre, l'homomorphisme canonique $\mathrm{A} \to \mathrm{A}_{\mathfrak{p}}$ induit un homomorphisme $\mathrm{A}/\mathfrak{p} \to \mathrm{A}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}\mathrm{A}_{\mathfrak{p}}$ qui est injectif en vertu de la discussion précédente ; celui-ci se prolonge donc en un homomorphisme du corps des fractions $\kappa(\mathfrak{p})$ de l'anneau intègre $\mathrm{A}/\mathfrak{p}$ dans le corps $\mathrm{A}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}\mathrm{A}_{\mathfrak{p}}$ et, comme tout élément de $\mathrm{A}_{\mathfrak{p}}$ s'écrit sous la forme $s^{-1}a$ avec $s \in \mathrm{A} - \mathfrak{p}$ et $a \in \mathrm{A}$, cet homomorphisme est un isomorphisme. (Voir aussi la question 5. (i) de l'exercice 7).

1. Soit $p$ un nombre premier et soit $\mathrm{A} = \mathbb{Z}_{(p)}$ l'anneau obtenu en localisant $\mathbb{Z}$ relativement à l'idéal premier $p\mathbb{Z}$ ; A s'identifie canoniquement au sous-anneau de $\mathbb{Q}$ constitué des fractions $\frac{a}{b}$ avec $a,b \in \mathbb{Z}$ et $b \neq 0$ premier à $p$. Les idéaux premiers de A sont l'idéal $(0)$ et l'idéal engendré par $p$ ; par suite, si l'on inverse $p$ dans A (c'est-à-dire si l'on localise A relativement à la partie multiplicative des puissances de $p$), on obtient un anneau dont $(0)$ est le seul idéal premier. L'anneau $\mathrm{A}[\frac{1}{p}]$ est donc un corps, en l'occurence $\mathbb{Q}$.

2. Quel que soit la partie multiplicative S de A, le noyau de l'homomorphisme $i_{\mathrm{S}} : \mathrm{A} \to \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ est l'idéal constitué des éléments $a$ de A tels que $sa = 0$ pour un certain élément $s$ de S. Si un élément $a$ de A appartient au noyau de l'application canonique $\mathrm{A} \to \prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathrm{A})} \mathrm{A}_{\mathfrak{p}}$, nous en déduisons que l'idéal *annulateur* de $a$

$$\mathrm{Ann}(a) = \{x \in \mathrm{A} \mid xa = 0\}$$

n'est contenu dans aucun idéal premier de A ; il en découle $\mathrm{Ann}(a) = \mathrm{A}$ et donc $a = 0$.

On déduit immédiatement de l'injectivité de l'application $A \to \prod_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(A)} A_{\mathfrak{p}}$ que l'anneau A est réduit si chacun de ses localisés $A_{\mathfrak{p}}$ l'est. Réciproquement, si l'anneau A est réduit, alors l'anneau $S^{-1}A$ est réduit quelle que soit la partie multiplicative S de A : soit en effet $x \in S^{-1}A$ un élément nilpotent et écrivons-le sous la forme $x = s^{-1}a$ avec $a \in A$ et $s \in S$ ; on a alors $0 = x^n = s^{-n}a^n$, donc $a^n = 0$ dans $S^{-1}A$, ce qui signifie qu'il existe $s' \in S$ tel que $s'a^n = 0$ dans A ; on a alors $(s'a)^n = 0$, donc $s'a = 0$ puisque A est réduit, et finalement $x = a = 0$ dans $S^{-1}A$.

3. Supposons que l'anneau A soit intègre. Quelle que soit la partie multiplicative S de A, $S \subset A - \{0\}$ et donc l'homomorphisme canonique $A \to K$ se factorise donc à travers $i_S : A \to S^{-1}A$. L'homomorphisme obtenu de $S^{-1}A$ dans K est évidemment injectif et il identifie donc l'anneau $S^{-1}A$ avec un sous-anneau du corps des fractions K de A.

L'inclusion $A \subset \bigcap_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(A)} A_{\mathfrak{m}}$ est triviale. Soit réciproquement $x$ un élément de K appartenant à chacun des localisés $A_{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$, et soit $\mathfrak{d} = \{b \in A \mid bx \in A\}$ l'idéal des dénominateurs de $x$. Dire que $x$ appartient au localisé $A_{\mathfrak{m}}$ équivaut à dire qu'on peut l'écrire sous la forme $x = s^{-1}a$ avec $s \in A - \mathfrak{m}$ et $a \in A$ ou, de manière équivalente, que $\mathfrak{d}$ rencontre $A - \mathfrak{m}$. L'idéal $\mathfrak{d}$ n'est par conséquent contenu dans aucun idéal maximal de A, donc $\mathfrak{d} = A$ et $x \in A$.

4. (i) Vérification immédiate.

(ii) Étant donnée une partie multiplicative S de A, le noyau de l'homomorphisme canonique $A \to S^{-1}A$ est l'ensemble des éléments $a$ de A pour lesquels il existe $s \in S$ tel que $sa = 0$. Lorsque $S = S_0$ est la partie multiplicative des éléments réguliers de A, cette dernière condition implique $a = 0$ et l'homomorphisme $A \to S_0^{-1}A$ est donc injectif.

(iii) Si S est une partie multiplicative de A telle que l'homomorphisme canonique $i_S : A \to S^{-1}A$ soit injectif, S est composée d'éléments réguliers de A : en effet, si $s \in S$ était un diviseur de zéro dans A, il existerait un élḿent non nul $a$ de A tel que $sa = 0$ et alors $i_S(a) = i_S(s)^{-1} i_S(sa) = 0$.

**Exercice 7** — 0. Étant donné un élément $f$ de A, on note $D(f)$ le sous-ensemble de $\mathrm{Spec}(A)$ constitué des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de A ne contenant pas $f$. Il s'agit d'une partie ouverte puisque son complémentaire est le fermé $V(Af)$ des idéaux premiers de A contenant l'idéal $Af$. Les ouverts de $\mathrm{Spec}(A)$ de cette forme sont dits *principaux* et il est facile de voir qu'ils engendrent la topologie de $\mathrm{Spec}(A)$ : en effet, quel que soit l'ouvert U de$\mathrm{Spec}(A)$, il existe un idéal $\mathfrak{a}$ de A tel que $\mathrm{Spec}(A) - U = V(\mathfrak{a})$ et donc

$$\begin{aligned} U &= \mathrm{Spec}(A) - V(\mathfrak{a}) \\ &= \mathrm{Spec}(A) - \bigcap_{f\in\mathfrak{a}} V(Af) \\ &= \bigcup_{f\in\mathfrak{a}} D(f). \end{aligned}$$

Notons également le fait suivant : quel que soit l'idéal $\mathfrak{a}$ de A, l'application ${}^a p : \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}) \to \mathrm{Spec}(A)$ associée à la projection canonique $p : A \to A/\mathfrak{a}$ réalise un homéomorphisme de $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$ sur le fermé $V(\mathfrak{a})$ de $\mathrm{Spec}(A)$. Cette application est en effet continue, injective d'image $V(\mathfrak{a})$ (car l'application $\mathfrak{q} \mapsto p^{-1}(\mathfrak{q})$ réalise une bijection entre l'ensemble des idéaux premiers de $A/\mathfrak{a}$ et l'ensemble des idéaux premiers de A contenant $\mathfrak{a}$) et fermée, car ${}^a p(V(\mathfrak{b})) = V(p^{-1}(\mathfrak{b}))$ pour tout idéal $\mathfrak{b}$ de $A/\mathfrak{a}$. Cas particulier : comme le nilradical $\mathfrak{N}(A)$ est l'intersection des idéaux premiers de A (voir la question 1 de l'exercice 3), $V(\mathfrak{N}(A)) = \mathrm{Spec}(A)$ et la projection canonique $A \to A^{\text{réd}} = A/\mathfrak{N}(A)$ induit donc un homéomorphisme entre $\mathrm{Spec}(A^{\text{réd}})$ et $\mathrm{Spec}(A)$ ; ainsi, il est toujours possible de se ramener au cas d'un anneau A réduit lorsqu'on étudie les propriété de l'espace toplogique $\mathrm{Spec}(A)$.

1. Étant donnée une famille $(f_i)_{i\in I}$ d'éléments de A, les ouverts principaux $D(f_i)$ recouvrent $\mathrm{Spec}(A)$ si et seulement s'il existe pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A un élément $i$ de I tel que $f_i \notin \mathfrak{p}$, donc si et seulement si l'idéal $\sum_{i\in I} Af_i$ de A engendré par les $f_i$ est égal à l'idéal trivial A. Cette dernière condition équivaut à $1 \in \sum_i Af_i$, et cela a lieu si et seulement s'il existe une partie finie J de I ainsi que des éléments $g_j$ de A, $j \in J$, tels que $1 = \sum_{j\in J} g_j f_j$.

Il est maintenant facile d'établir que l'espace topologique $X = \mathrm{Spec}(A)$ est quasi-compact. Soit $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X ; chacun des ouverts $U_i$ étant lui-même recouvert par des ouverts principaux, il existe une famille $(f_\ell)_{\ell\in Ł}$ d'éléments de A donnant lieu à un recouvrement ouvert $\{D(f_\ell)\}_{\ell\in L}$ de X raffinant

$\mathscr{U}$. D'après ce que l'on vient de voir, il existe un sous-ensemble fini J de L tel que les ouverts $\mathrm{D}(f_j)$, $j \in \mathrm{J}$, recouvrent X, et on extrait donc un sous-recouvrement fini de $\mathscr{U}$ en choisissant une application $\tau : \mathrm{J} \to \mathrm{I}$ telle que $\mathrm{D}(f_j) \subset \mathrm{U}_{\tau(j)}$ pour tout $j \in \mathrm{J}$.

2. Quel que soit l'idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, l'adhérence du point $\mathfrak{p}$ dans $\mathrm{Spec(A)}$ est le fermé $\mathrm{V}(\mathfrak{p})$. En effet, le fermé $\mathrm{V}(\mathfrak{p})$ de $\mathrm{Spec(A)}$ contient tautologiquement le point $\mathfrak{p}$ et est contenu dans tout fermé $\mathrm{V}(\mathfrak{a})$ contenant $\mathfrak{p}$ car alors $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ et donc $\mathrm{V}(\mathfrak{p}) \subset \mathrm{V}(\mathfrak{a})$. Observer en particulier que, puisque $\mathrm{V}(\mathfrak{p})$ contient tous les idéaux maximaux de A contenant $\mathfrak{p}$, un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A définit un point fermé de $\mathrm{Spec(A)}$ si et seulement s'il est maximal.

Tous les points d'un espace topologique séparé (au sens de Hausdorff) sont fermés; si l'espace topologique $\mathrm{Spec(A)}$ est séparé, tous les idéaux premiers de A sont donc maximaux. Supposons réciproquement que tous les idéaux premiers de l'anneau A soient maximaux et vérifions que l'espace topologique $\mathrm{Spec(A)}$ est séparé. Comme on l'a observé à la question 0, nous pouvons supposer que l'anneau A est réduit; c'est ce que nous faisons. Étant donnés deux points distincts $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}' \in \mathrm{Spec(A)}$, considérons un élément $f$ de A appartenant à $\mathfrak{m}'$ mais pas à $\mathfrak{m}$; puisque tous les idéaux premiers de A sont maximaux, l'anneau $\mathrm{A}_\mathfrak{m}$ possède un unique idéal premier, en l'occurence $\mathfrak{m}\mathrm{A}_\mathfrak{m}$. L'anneau $\mathrm{A}_\mathfrak{m}$ étant en outre réduit, $\mathfrak{m}\mathrm{A}_\mathfrak{m} = \mathfrak{N}(\mathrm{A}_\mathfrak{m}) = (0)$ et tout élément non nul de $\mathrm{A}_\mathfrak{m}$ est inversible; cet anneau est par conséquent un corps. Comme $f$ appartient à $\mathfrak{m}'$, $f = 0$ dans $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}'}$ et il existe donc un élément $g$ de $\mathrm{A} - \mathfrak{m}'$ tel que $fg = 0$. On obtient ainsi des voisinages $\mathrm{D}(f)$ et $\mathrm{D}(g)$ de $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$ respectivement tels que $\mathrm{D}(f) \cap \mathrm{D}(g) = \mathrm{D}(fg) = \mathrm{D}(0) = \emptyset$ et on en conclut que l'espace topologique $\mathrm{Spec(A)}$ est séparé.

3. On vérifie immédiatement que la projection canonique $\mathrm{A} \to \mathrm{A}^{\text{réd}} = \mathrm{A}/\mathfrak{N}(\mathrm{A})$ induit une bijection entre les éléments idempotents et, puisque les espaces topologiques $\mathrm{Spec(A)}$ et $\mathrm{Spec}(\mathrm{A}^{\text{réd}})$ sont homéomorphes, nous pouvons supposer que l'anneau A est réduit; c'est ce que nous faisons.

Quel que soit l'élément idempotent $e$ de A, l'ouvert principal $\mathrm{D}(e)$ de $\mathrm{Spec(A)}$ est fermé : l'identité $e(e-1) = 0$ implique en effet que les idéaux premiers contenant $e$ sont exactement ceux ne contenant pas $e-1$, donc $\mathrm{Spec(A)} - \mathrm{D}(e) = \mathrm{V}(e) = \mathrm{D}(e-1)$. Noter que les idempotents triviaux 0 et 1 définissent respectivement les parties ouvertes et fermées $\emptyset$ et $\mathrm{Spec(A)}$.

Soit réciproquement U une partie ouverte et fermée de $\mathrm{Spec(A)}$ et soient $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ des idéaux de A tels que $\mathrm{U} = \mathrm{V}(\mathfrak{a})$ et $\mathrm{Spec(A)} - -\mathrm{U} = \mathrm{V}(\mathfrak{b})$. Comme $\mathrm{V}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = \mathrm{V}(\mathfrak{a}) \cap \mathrm{V}(\mathfrak{b})$ est vide, l'idéal $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ n'est contenu dans aucun idéal premier de A et donc $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \mathrm{A}$. Soient $a, b \in \mathrm{A}$ tels que $a+b = 1$; comme $\mathrm{V}(\mathfrak{a}) \subset \mathrm{V}(\mathrm{A}a)$ et $\mathrm{V}(\mathfrak{b}) \subset \mathrm{V}(\mathrm{A}b)$, $\mathrm{V}(\mathrm{A}ab) = \mathrm{V}(\mathrm{A}a) \cup \mathrm{V}(\mathrm{A}b) = \mathrm{Spec(A)}$ et donc $ab \in \mathfrak{N}(\mathrm{A}) = \{0\}$ puisque l'anneau A a été supposé réduit. L'élément $b$ de A est alors idempotent et, comme on l'a vu, $\mathrm{Spec(A)}$ est la réunion des fermés disjoints $\mathrm{V}(\mathrm{A}a)$ et $\mathrm{V}(\mathrm{A}b)$; il en découle que les inclusions $\mathrm{V}(\mathfrak{a}) \subset \mathrm{V}(\mathrm{A}a)$ et $\mathrm{V}(\mathfrak{b}) \subset \mathrm{V}(\mathrm{A}b)$ sont en fait des égalités et donc $\mathrm{U} = \mathrm{V}(\mathfrak{a}) = \mathrm{D}(b)$.

4. (i) Un espace topologique séparé (au sens de Hausdorff) est irréductible si et seulement s'il est réduit à un point. Tout espace ponctuel est en effet trivialement séparé et, si X est un espace topologique séparé contenant deux points distincts $x, y$, X n'est pas irréductible puisqu'il est la réunion des fermés stricts $\mathrm{X} - \mathrm{V}_x$ et $\mathrm{X} - \mathrm{V}_y$, où $\mathrm{V}_x$ et$\mathrm{V}_y$ sont des voisinages ouverts disjoints de $x$ et $y$ respectivement.

(ii) L'espace topologique $\mathrm{Spec(A)}$ est irréductible si et seulement si, pour tous idéaux $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ de A, la condition $\mathrm{Spec(A)} = \mathrm{V}(\mathfrak{a}) \cup \mathrm{V}(\mathfrak{b})$ implique $\mathrm{V}(\mathfrak{a}) = \mathrm{Spec(A)}$ ou $\mathrm{V}(\mathfrak{b}) = \mathrm{Spec(A)}$. Comme $\mathrm{V}(\mathfrak{a}) \cup \mathrm{V}(\mathfrak{b}) = \mathrm{V}(\mathfrak{ab})$, la condition précédente est équivalente à $\mathfrak{ab} \subset \mathfrak{N}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{Spec(A)}$ est donc irréductible si et seulement si cela a lieu uniquement lorsque $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{N}(\mathrm{A})$ ou $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{N}(\mathrm{A})$. En considérant des idéaux principaux, on voit immédiatement qu'une condition nécessaire est que l'idéal $\mathfrak{N}(\mathrm{A})$ soit premier; cette condition est en fait suffisante car, si $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux de A non contenus dans $\mathfrak{N}(\mathrm{A})$, il existe des éléments $a$ de $\mathfrak{a}$ et $b$ de $\mathfrak{b}$ d'images non nulles dans $\mathrm{A}/\mathfrak{N}(\mathrm{A})$; cet anneau étant intègre, le produit $ab$ est non nul dans $\mathrm{A}/\mathfrak{N}(\mathrm{A})$ et donc $\mathfrak{ab}$ n'est pas contenu dans $\mathfrak{N}(\mathrm{A})$.

Plus généralement, étant donné un idéal $\mathfrak{a}$ de A, le fermé $\mathrm{V}(\mathfrak{a})$ de $\mathrm{Spec(A)}$ est irréductible si et seulement si la racine $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ de $\mathfrak{a}$, intersection des idéaux premiers de A contenant $\mathfrak{a}$, est un idéal premier. Il suffit en effet d'utiliser le fait que $\mathrm{V}(\mathfrak{a})$ est homéomorphe à $\mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathfrak{a})$ et d'appliquer le résultat précédent à l'anneau $\mathrm{A}/\mathfrak{a}$ en observant que $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ est l'image réciproque du nilradical de $\mathrm{A}/\mathfrak{a}$ par la projection canonique de A sur $\mathrm{A}/\mathfrak{a}$.

(iii) L'anneau $\mathrm{A} = \mathbb{Q}[\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \mathrm{T}_3]/(\mathrm{T}_1^2 - \mathrm{T}_2\mathrm{T}_3, \mathrm{T}_1\mathrm{T}_3 - \mathrm{T}_1)$ est réduit mais il n'est pas intègre car, en notant respectivement $t_1, t_2$ et $t_3$ les images de $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2$ et $\mathrm{T}_3$ dans A, $t_1 \neq 0$ et $t_1 \neq 0$ mais $t_3 - 1 \neq 0$ mais $t_1(t_3-1) = 0$; d'après ce qui précède, l'espace topologique $\mathrm{X} = \mathrm{Spec(A)}$ n'est pas irréductible.

Le fermé $\mathrm{V}(\mathrm{T}_1^2-\mathrm{T}_2\mathrm{T}_3,\mathrm{T}_1\mathrm{T}_3-\mathrm{T}_1)$ est la réunion de trois fermés stricts non vides :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\mathrm{T}_1^2-\mathrm{T}_2\mathrm{T}_3,\mathrm{T}_1\mathrm{T}_3-\mathrm{T}_1) &= \mathrm{V}(\mathrm{T}_1^2-\mathrm{T}_2\mathrm{T}_3,\mathrm{T}_1)\cup\mathrm{V}(\mathrm{T}_1^2-\mathrm{T}_2\mathrm{T}_3,\mathrm{T}_3-1)\\ &= \mathrm{V}(\mathrm{T}_2\mathrm{T}_3,\mathrm{T}_1)\cup\mathrm{V}(\mathrm{T}_1^2-\mathrm{T}_2,\mathrm{T}_3-1)\\ &= \mathrm{V}(\mathrm{T}_2,\mathrm{T}_1)\cup\mathrm{V}(\mathrm{T}_3,\mathrm{T}_1)\cup\mathrm{V}((\mathrm{T}_1^2-\mathrm{T}_2,\mathrm{T}_3-1)\end{aligned}$$

et il est facile de vérifier que ces fermés sont irréductibles.

5. (i) L'application ${}^a i : \mathrm{Spec}(\mathrm{A}_\mathfrak{p}) \to \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ induit une injection continue d'image l'ensemble des idéaux premiers de A contenus dans $\mathfrak{p}$ (cf. question 0). Il s'agit en fait d'un homéomorphisme sur son image car, pour tous $a\in\mathrm{A}$, $s\in\mathrm{A}-\mathfrak{p}$, l'image de l'ouvert principal $\mathrm{D}(s^{-1}a)$ de $\mathrm{Spec}(\mathrm{A}_\mathfrak{p})$ est l'ouvert principal $\mathrm{D}(a)$ de $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ (cela découle directement des observations de la question 0). Il reste donc à voir qu'un idéal premier $\mathfrak{q}$ de A est contenu dans $\mathfrak{p}$ si et seulement s'il appartient à l'intersection des voisinages ouverts de $\mathfrak{p}$ dans $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ ; $\mathfrak{q}\subset\mathfrak{p}$ si et seulement si $\mathrm{A}-\mathfrak{p}\subset\mathrm{A}-\mathfrak{q}$, donc si et seulement si $f\notin\mathfrak{q}$ pour tout élément $f$ de $\mathrm{A}-\mathfrak{p}$ ou, encore, si et seulement si $\mathfrak{q}$ appartient à tous les ouverts principaux $\mathrm{D}(f)$, $f\in\mathrm{A}-\mathfrak{p}$ ; comme ceux-ci constituent une base de voisinages de $\mathfrak{p}$ dans $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, l'assertion est vérifiée.

(ii) En vertu des observations de la question 0, on voit que les idéaux premiers de l'anneau $(\mathrm{B}/\mathfrak{p}\mathrm{B})_\mathfrak{p}$, localisé de $\mathrm{B}/\mathfrak{p}\mathrm{B}$ par rapport à la partie multiplicative $\varphi(\mathrm{A}-\mathfrak{p})$, sont précisément les idéaux premiers de B contenant $\mathfrak{p}\mathrm{B}$ et ne rencontrant pas $\varphi(\mathrm{A}-\mathfrak{p})$, c'est-à-dire les idéaux premiers $\mathfrak{q}$ de B tels que $\mathfrak{p}\subset\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ et $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})\cap(\mathrm{A}-\mathfrak{p})=\emptyset$ ; ce sont donc précisément les idéaux premiers $\mathfrak{q}$ de B tels que ${}^a\varphi(\mathfrak{q})=\varphi^{-1}(\mathfrak{q})=\mathfrak{p}$ et on conclut en invoquant de nouveau la question 0.

(iii) Quel que soit l'élément $f$ de A, l'homomorphisme canonique $\mathrm{A}\to\mathrm{A}[\mathrm{T}]/(f\mathrm{T}-1)$ se factorise à travers la flèche $\mathrm{A}\to\mathrm{A}[f^{-1}]$ puisque $f$ est inversible dans l'anneau $\mathrm{A}[\mathrm{T}]/(f\mathrm{T}-1)$. On construit une flèche dans l'autre sens en utilisant la propriété universelle des anneaux de polynômes : il existe en effet un unique homomorphisme A-linéaire de $\mathrm{A}[\mathrm{T}]$ dans $\mathrm{A}[f^{-1}]$ envoyant T sur l'inverse de $f$ dans $\mathrm{A}[f^{-1}]$ et celui-ci se factorise manifestement par l'anneau quotient $\mathrm{A}[\mathrm{T}]/(f\mathrm{T}-1)$. Les deux homomorphismes ainsi obtenus entre $\mathrm{A}[f^{-1}]$ et $\mathrm{A}[\mathrm{T}]/(f\mathrm{T}-1)$ sont des isomorphismes réciproques.

En utilisant la question 0, nous obtenons ainsi que l'application associée à l'homomorphisme canonique $\mathrm{A}\to\mathrm{A}[\mathrm{T}]/(f\mathrm{T}-1)$ induit un homéomorphisme du fermé $\mathrm{V}(f\mathrm{T}-1)$ de $\mathrm{Spec}(\mathrm{A}[\mathrm{T}])$ sur l'ouvert principal $\mathrm{D}(f)$ de $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$. On observe en particulier que l'application entre les spectres associée à un homomorphisme d'anneaux n'envoie pas nécessairement une partie fermée sur une partie fermée.

**Exercice 8** — 1. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A et soit $f$ un élément de $\mathrm{A}-\mathfrak{p}$. L'intersection du fermé $\mathrm{V}(\mathfrak{p})$ et de l'ouvert $\mathrm{D}(f)$ dans $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ est une partie localement fermée et non vide (on aurait sinon $\mathrm{V}(\mathfrak{p})\subset\mathrm{V}(\mathrm{A}f)$, c'est-à-dire $\mathfrak{p}\in\mathrm{V}(\mathrm{A}f)$, ce qui équivaut à $\mathrm{A}f\subset\mathfrak{p}$ et contredirait l'hypothèse $f\notin\mathfrak{p}$). Il existe donc un point fermé de $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ contenu dans $\mathrm{V}(\mathfrak{p})\cap\mathrm{D}(f)$, c'est-à-dire un idéal maximal de A contenant $\mathfrak{p}$ et ne contenant pas $f$, et l'idéal premier $\mathfrak{p}$ est ainsi l'intersection des idéaux maximaux le contenant.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A et soit $p:\mathrm{A}\to\mathrm{A}/\mathfrak{a}$ la projection canonique. L'idéal $p^{-1}(\mathfrak{N}(\mathrm{A}/\mathfrak{a}))$ de A est l'intersection des idéaux premiers de A contenant $\mathfrak{a}$ tandis que l'idéal $p^{-1}(\mathfrak{R}(\mathrm{A}/\mathfrak{a}))$ est l'intersection des idéaux maximaux de A contenant $\mathfrak{a}$ ; si tout idéal premier de A est l'intersection des idéaux maximaux le contenant, $p^{-1}(\mathfrak{N}(\mathrm{A}/\mathfrak{a}))=p^{-1}(\mathfrak{R}(\mathrm{A}/\mathfrak{a}))$ et donc $\mathfrak{N}(\mathrm{A}/\mathfrak{a})=\mathfrak{R}(\mathrm{A}/\mathfrak{a})$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Soit Y une partie localement fermée non vide de $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$. Il s'agit de l'intersection d'un fermé $\mathrm{V}(\mathfrak{a})$ et d'un ouvert de $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ et, puisque les ouverts principaux constituent une base de la topologie de $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, il existe un élément $f$ de A tel que $\mathrm{Y}'=\mathrm{V}(\mathfrak{a})\cap\mathrm{D}(f)$ soit non vide et contenu dans Y. Il existe par hypothèse un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A contenant $\mathfrak{a}$ mais non par $f$ et il s'agit de justifier qu'il existe un idéal maximal de A satifaisant à ces conditions. Par construction, l'image $\overline{f}$ de $f$ dans l'anneau quotient $\mathrm{A}/\mathfrak{a}$ n'appartient pas au nilradical de $\mathrm{A}/\mathfrak{a}$ ; si ce dernier coïncide avec le radical de $\mathrm{A}/\mathfrak{a}$, il existe un idéal maximal de $\mathrm{A}/\mathfrak{a}$ ne contenant pas $\overline{f}$, c'est-à-dire un idéal maximal de A contenant $\mathfrak{a}$ mais non $f$.

2. Un anneau local A est un anneau de Jacobson si et seulement si son spectre est réduit à un point ou, de manière équivalente, si et seulement si l'anneau $\mathrm{A}^{\text{réd}}$ est un corps. La condition est évidemment suffisante, puisqu'alors tout idéal premier est maximal ; cette condition est également nécessaire car, si $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ contient deux points distincts, l'idéal maximal de A est l'unique point fermé de $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ et son complémentaire est une partie ouverte non vide ne contenant aucun point fermé ; la condition (i) est alors en défaut et l'anneau A n'est pas de Jacobson.

3. Un corps est trivialement un anneau de Jacobson. L'anneau $\mathbb{Z}$ est un anneau de Jacobson car (0), son seul idéal premier non maximal, est l'intersection des idéaux maximaux de $\mathbb{Z}$. Le même argument prouve que l'anneau $k[\mathrm{T}]$ des polynômes en une indéterminée à coefficients dans un corps $k$ est un anneau de Jacobson.

4. Quel que soit le fermé F de X, la condition (i) garantit que F est l'adhérence de $\mathrm{F}\cap\mathrm{X}_0$ dans X. Il en découle immédiatement que, pour tous fermés $\mathrm{F},\mathrm{F}'$ de X, les conditions $\mathrm{X}=\mathrm{F}\cup\mathrm{F}'$ (resp. $\mathrm{F}=\mathrm{X}$ ; $\mathrm{F}'=\mathrm{X}$) et $\mathrm{X}_0=(\mathrm{F}\cap\mathrm{X}_0)\cap(\mathrm{F}'\cap\mathrm{X}_0)$ (resp. $\mathrm{F}\cap\mathrm{X}_0=\mathrm{X}_0$ ; resp. $\mathrm{F}'\cap\mathrm{X}_0=\mathrm{X}_0$) sont équivalentes et l'espace topologique $\mathrm{X}_0$ est irréductible si et seulement si l'espace topologique X l'est.

**Exercice 9** — Nous admettons ici l'assertion suivante, qui sera démontrée dans la feuille d'exercices 3 : étant donné un homomorphisme d'anneaux $\mathrm{A}\to\mathrm{B}$, l'ensemble des éléments de B qui sont racine d'un polynôme unitaire de $\mathrm{A}[\mathrm{T}]$ constituent un sous-anneau de B.

1. (i) Supposons que A soit engendrée comme $k$-algèbre par un générateur $t_1$. Le $k$-homomorphisme $u$ : $k[\mathrm{T}]\to\mathrm{A}$ est surjectif et, comme A est un corps, son noyau $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de $k[\mathrm{T}]$ ; A est donc de la forme $k[\mathrm{T}]/(f)$, $f\in k[\mathrm{T}]$ irréductible, et c'est bien une extension algébrique de $k$.

(ii) Si $t_1$ est algébrique sur $k$, il engendre un sous-corps $k(t_1)$ de A et A est alors une algèbre de type fini sur $k(t_1)$ engendrée par $t_2,\ldots,t_n$. En raisonnant par récurrence sur $n$, nous pouvons supposer que tous les éléments de A sont algébriques sur le corps $k(t_1)$ ; ils seront alors algébriques sur $k$ puisque $k(t_1)$ est une extension algébrique de $k$. Si $t_1$ est transcendant, ce que nous supposerons dans ce qui suit, A est une algèbre de type fini sur le corps $k(t_1)\simeq k(\mathrm{T})$ engendrée par $t_2,\ldots,t_n$ et, en raisonnant de nouveau par récurrence sur le nombre de générateurs de A, nous pouvons en outre supposer que $t_2,\ldots,t_n$ sont algébriques sur $k(t_1)$.

(iii) Par hypothèse, $t_2$ est racine d'un polynôme unitaire $\mathrm{P}\in k(t_1)[\mathrm{T}]$ de degré $d\geq 1$. Si $g(t_1)\in k[t_1]$ est un multiple commun des dénominateurs des coefficients de P, $\mathrm{Q}=g(t_1)^d\mathrm{P}(g(t_1)^{-1}\mathrm{T})$ est un polynôme unitaire à coefficients dans $k[t_1]$ qui annule $g(t_1)t_2$. En procédant de même avec $t_3,\ldots,t_n$ et en considérant le produit des polynômes obtenus, nous obtenons l'existence d'un élément non nul $f(t_1)$ de $k[t_1]$ tel que $f(t_1)t_2,\ldots,f(t_1)t_n$ annulent des polynômes unitaires de $k[t_1][\mathrm{T}]$. Par hypothèse, tout élément $a$ de A s'écrit sous la forme $\mathrm{F}(t_1,\ldots,t_n)$ avec $\mathrm{F}\in k[\mathrm{T}_1,\ldots,\mathrm{T}_n]$ ; si l'entier naturel N est suffisamment grand, $f(t_1)^{\mathrm{N}}a$ s'écrit ainsi sous la forme $\mathrm{G}(t_1,f(t_1)t_2,\ldots,f(t_1)t_n)$ avec $\mathrm{G}\in k[\mathrm{T}_1,\ldots,\mathrm{T}_n]$ et appartient ainsi à la sous-$k$-algèbre de A engendrée par $f(t_1)t_2,\ldots,f(t_1)t_n$ ; comme ces derniers sont racines de polynômes non nul de $k[t_1][\mathrm{T}]$, le résultat mentionné au début permet de conclure qu'il en est de même pour $f(t_1)^{\mathrm{N}}a$.

(iv) On rappelle que $t_1$ est supposé transcendant sur le corps $k$, de sorte que le corps A contient le corps $k(t_1)$ des fractions rationnelles en $t_1$. L'observation du point (iii) s'applique en particulier aux éléments $a(t_1)$ de $k(t_1)$ : il existe pour toute fraction rationnelle $a(t_1)$ un entier N et des polynômes $p_0(t_1),\ldots,p_{m-1}(t_1)\in k[t_1]$ tels que

$$(f(t_1)^{\mathrm{N}}a)^m+p_{m-1}(t_1)(f(t_1)^{\mathrm{N}}a)^{m-1}+\ldots+p_0(t_1)=0.$$

Soit alors $q(t_1)\in k[t_1]$ un polynôme premier à $f(t_1)$ ; appliquée à $a=1/q(t_1)$, la condition précédente s'écrit la forme $f(t_1)^{\mathrm{M}}+q(t_1)r(t_1)=0$ avec $\mathrm{M}\geq 1$, $r(t_1)\in k[t_1]$ et conduit donc à une contradiction. L'élément $t_1$ de A est donc algébrique sur $k$ et la conclusion découle du point (ii).

2. Supposons que le corps $k$ soit algébriquement clos. Étant donné un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $k[\mathrm{T}_1,\ldots,\mathrm{T}_n]$, le quotient $k[\mathrm{T}_1,\ldots,\mathrm{T}_n]/\mathfrak{m}$ est une $k$-algèbre de type fini et un corps ; en vertu de la question précédente, l'homomorphisme canonique $k\to k[\mathrm{T}_1,\ldots,\mathrm{T}_n]/\mathfrak{m}$ est un isomorphisme puisque $k$ est algébriquement clos et il existe donc des éléments $t_1,\ldots,t_n$ de $k$ tels que$\mathrm{T}_i-t_i\in\mathfrak{m}$ pour tout $i$ ; comme l'idéal $(\mathrm{T}_1-t_1,\ldots,\mathrm{T}_n-t_n)$ est maximal, nous obtenons finalement $\mathfrak{m}=(\mathrm{T}_1-t_1,\ldots,\mathrm{T}_n-t_n)$. En tenant compte de l'identification canonique $k^n=\mathrm{Hom}_k(k[\mathrm{T}_1,\ldots,\mathrm{T}_n],k)$, cette observation peut se reformuler sous la forme suivante : l'application

$$\mathrm{Hom}_k(k[\mathrm{T}_1,\ldots,\mathrm{T}_n],k)\to\mathrm{Spec}(k[\mathrm{T}_1,\ldots,\mathrm{T}_n]),\ \ u\mapsto\mathrm{Ker}(u),$$

réalise une bijection de l'ensemble des homomorphismes de $k$-algèbres de $k[\mathrm{T}_1,\ldots,\mathrm{T}_n]$ dans $k$ sur l'ensemble des idéaux maximaux de $k[\mathrm{T}_1,\ldots,\mathrm{T}_n]$.

Soit plus généralement A une $k$-algèbre de type fini. En écrivant A sous la forme $k[\mathrm{T}_1,\ldots,\mathrm{T}_n]/\mathfrak{I}$, l'ensemble $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{A},k)$ s'identifie au sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_k(k[\mathrm{T}_1,\ldots,\mathrm{T}_n],k)$ constitué des $k$-homomorphismes $u$ tels que $\mathfrak{I}\subset\mathrm{Ker}(u)$ et, comme les idéaux maximaux de A sont précisément les idéaux maximaux de $k[\mathrm{T}_1,\ldots,\mathrm{T}_n]$ contenant $\mathfrak{I}$, ce qui précède établit que l'application

$$\mathrm{Hom}_k(\mathrm{A},k)\to\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$$

réalise une bijection de l'ensemble des $k$-homomorphismes de A dans $k$ sur l'ensemble des idéaux maximaux de A.

L'idéal $(\mathrm{T}^2-2)$ de $\mathbb{Q}[\mathrm{T}]$ est maximal mais il n'est pas le noyau d'un homomorphisme $\mathbb{Q}[\mathrm{T}] \to \mathbb{Q}$.

4. (i) Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de B et soit $\mathfrak{p} = {}^a\varphi(\mathfrak{m}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$. Le corps $\mathrm{B}/\mathfrak{m}$ est une extension algébrique de $k$ dans laquelle se plonge la $k$-algèbre $\mathrm{A}/\mathfrak{p}$ ; tout élément $x$ de $\mathrm{A}/\mathfrak{p}$ satisfait donc à une condition de la forme $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ avec $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in k$. Comme l'anneau $\mathrm{A}/\mathfrak{p}$ est intègre, on peut supposer $a_0 \neq 0$ si $x \neq 0$ et il suffit d'écrire cette identité sous la forme $x(x^n - 1 + a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1) = -a_0$ pour en déduire que $x$ est inversible dans $\mathrm{A}/\mathfrak{p}$ si $x \neq 0$. L'anneau $\mathrm{A}/\mathfrak{p}$ est donc un corps et l'idéal $\mathfrak{p}$ est maximal.

(ii) Comme tout quotient d'un anneau de Jacobson est un anneau de Jacobson en vertu de la caractérisation 1 (iii) de l'exercice 8, il suffit de vérifier que $\mathrm{A} = k[\mathrm{T}_, \ldots, \mathrm{T}_n]$ est un anneau de Jacobson ; nous utiliserons pour cela la caractérisation 1 (ii) de ce même exercice. Soit en effet $\mathfrak{a}$ un idéal de A et $f$ un élément de A dont l'image $\overline{f}$ dans $\mathrm{A}/\mathfrak{a}$ n'est pas nilpotente (ce qui veut dire que $f$ n'appartient pas à la racine $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ de $\mathfrak{a}$). L'ouvert $\mathrm{Y} = \mathrm{D}(\overline{f}) = \mathrm{V}(\mathfrak{a}) \cap \mathrm{D}(f)$ de $\mathrm{V}(\mathfrak{a})$ est une partie localement fermée de $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, non vide en vertu du choix de $f$ et homéomorphe au spectre de l'anneau $\mathrm{A}' = (\mathrm{A}/\mathfrak{a})[\overline{f}^{-1}] = (\mathrm{A}/\mathfrak{a})[\mathrm{T}]/(\overline{f}\mathrm{T}-1) = \mathrm{A}[\mathrm{T}]/(\mathfrak{a}\mathrm{A}[\mathrm{T}] + (f\mathrm{T}-1))$ via l'application associée à l'homomorphisme canonique $j : \mathrm{A} \to \mathrm{A}'$. Comme l'anneau $\mathrm{A}'$ n'est pas nul (puisque son spectre est non vide), il possède un idéal maximal $\mathfrak{m}$ et ${}^a j(\mathfrak{m})$ est donc un idéal maximal de A contenu dans Y en vertu de (i). Cela prouve que A est un anneau de Jacobson.

5. Considérons de nouveau un corps algébriquement clos $k$ et soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $k[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]$.

– Si l'idéal $\mathfrak{a}$ est strict, il est contenu dans un idéal maximal $\mathfrak{m} = (\mathrm{T}_1 - t_1, \ldots, \mathrm{T}_n - t_n)$ de $k[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]$ et il existe donc $(t_1, \ldots, t_n) \in k^n$ tels que $f(t_1, \ldots, t_n) = 0$ pour tout $f \in \mathfrak{a}$.
– Soit $f$ un polynôme s'annulant identiquement sur l'ensemble $\mathrm{V}(\mathfrak{a}) \cap k^n$ des zéros de $\mathfrak{a}$. Cette hypothèse signifie exactement que $f$ appartient à tous les idéaux maximaux de $k[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]$ contenant $\mathfrak{a}$ ; comme $k[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]$ est un anneau de Jacobson, $f$ appartient par conséquent à tous les idéaux premiers de $k[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]$ contenant $\mathfrak{a}$ et il existe donc une puissance de $f$ appartenant à $\mathfrak{a}$.

*Remarque* – Les deux propriétés que l'on vient de démontrer constituent classiquement le *théorème des zéros* de Hilbert et le contenu mathématique de ce dernier est donc fondamentalement le fait que les $k$-algèbres de type fini sur un corps sont des anneaux de Jacobson, associé à la description explicite de leurs idéaux maximaux.

6. Soit A un anneau de Jacobson et soit B une A-algèbre de type fini (c'est-à-dire un quotient d'un anneau de polynômes $\mathrm{A}[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]$). On suppose $\mathrm{B} \neq 0$ et on note $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ l'homomorphisme canonique ; nous allons vérifier que B est encore un anneau de Jacobson.

(i) Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de B et soit $\mathfrak{p} = {}^a\varphi(\mathfrak{m}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$. L'homomorphisme de $\mathrm{A}/\mathfrak{p}$ dans le corps $\mathrm{B}/\mathfrak{m}$ induit un plongement du corps des fractions $\kappa(\mathfrak{p})$ de $\mathrm{A}/\mathfrak{p}$ dans $\mathrm{B}/\mathfrak{m}$. Comme B est une algèbre de type fini sur A, $\mathrm{B}/\mathfrak{m}$ est une algèbre de type fini sur A et donc sur $\kappa(\mathfrak{p})$ ; il s'agit donc d'une extension algébrique de $\kappa(\mathfrak{p})$ et nous en déduisons que tout élément de $\mathrm{B}/\mathfrak{m}$ est annulé par un polynôme unitaire à coefficients dans $\kappa(\mathfrak{p})$. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des générateurs de $\mathrm{B}/\mathfrak{m}$ comme A-algèbre. En raisonnant comme à la question 1 (iii), on justifie qu'il existe un élément $f$ de $\mathrm{A}/\mathfrak{p}$ tel que $fx_1, \ldots, fx_n$ soient racines de polynômes unitaires à coefficients dans $\mathrm{A}/\mathfrak{p}$. Puisque $x_1, \ldots, x_n$ engendrent $\mathrm{B}/\mathfrak{m}$ comme A-algèbre, il s'en suit qu'il existe pour chaque élément $x$ de $\mathrm{B}/\mathfrak{m}$ un entier naturel N tel que $f^{\mathrm{N}}x$ soit racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathrm{A}/\mathfrak{p}$ ; de manière équivalente, chaque élément de $\mathrm{B}/\mathfrak{m}$ est racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans $(\mathrm{A}/\mathfrak{p})[f^{-1}]$. On en déduit comme en 4 (i) que ce dernier anneau est un corps et c'est finalement là qu'intervient l'hypothèse que A est un anneau de Jacobson. Puisque $\mathrm{A}' = \mathrm{A}/\mathfrak{p}$ est également un anneau de Jacobson, l'ouvert non vide $\mathrm{D}(f)$ de $\mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathfrak{p})$ contient un point fermé ; en d'autres termes, il existe un idéal maximal de $\mathrm{A}/\mathfrak{p}$ ne contenant pas $f$. Comme $(\mathrm{A}/\mathfrak{p})[f^{-1}]$ est un corps, $\mathfrak{m}$ engendre l'idéal nul dans l'anneau localisé $(\mathrm{A}/\mathfrak{p})[f^{-1}]$ et ceci implique $\mathfrak{m} = 0$ puisque l'anneau $\mathrm{A}/\mathfrak{p}$ est un anneau intègre. La conclusion est immédiate : l'idéal $\{0\}$ de $\mathrm{A}/\mathfrak{p}$ étant maximal, cet anneau est un corps et l'idéal $\mathfrak{p}$ de A est maximal.

(ii) À l'issue de la question précédente, la démonstration du fait que toute algèbre de type fini sur un anneau de Jacobson est un anneau de Jacobson est exactement la même que dans le cas particulier où A est un corps (question 4. (ii)).

7. Comme $\mathbb{Z}$ est un anneau de Jacobson, toute $\mathbb{Z}$-algèbre de type fini est un anneau de Jacobson. Application immédiate : une famille $(f_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de polynômes dans $\mathbb{Z}[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]$ engendre un idéal strict si et seulement s'il existe un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathbb{Z}[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]$ contenant ces polynômes ; l'image de $\mathfrak{m}$ par l'application

$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[T_1,\ldots,T_n]) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ associée à l'homomorphisme canonique $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[T_1,\ldots,T_n]$ étant un idéal maximal de $\mathbb{Z}$ en vertu de la question 6, il est équivalent de demander qu'il existe un nombre premier $p$ tel que les $f_i$ soient contenus dans un idéal maximal de $\mathbb{Z}[T_1,\ldots,T_n]$, c'est-à-dire un idéal maximal de $\mathbb{F}_p[T_1,\ldots,T_n]$ contenant les $f_i$ mod $p$ ; comme l'anneau $\mathbb{F}_p[T_1,\ldots,T_n]/\mathfrak{m}$ est une extension finie de $\mathbb{F}_p$ en vertu de la question 1, nous en concluons finalement que les $f_i$ engendrent un idéal strict de $\mathbb{Z}[T_1,\ldots,T_n]$ si et seulement s'il existe un nombre premier $p$ tel que les $f_i$ aient un zéro commun dans un corps fini de caractéristique $p$.

**Exercice 10** — 1. Puisque le corps $k$ est algébriquement clos, $M_n(k) = k^{n^2}$ s'identifie canoniquement avec l'ensemble $X_0$ des idéaux maximaux de $k[(T_{ij})_{1\leq i,j\leq n}]$. L'ensemble $F_r$ des matrices de rang au plus $r$ est l'intersection de $X_0$ et du fermé $Y_r$ de $X = \mathrm{Spec}(k[T_{ij}])$ que définit l'idéal engendré par les déterminants mineurs d'ordre $r$ ; c'est donc un fermé pour la topologie de Zariski sur $k^{n^2}$.

Une matrice $M \in M_n(k)$ est de rang au plus $r \in \{0,\ldots,n\}$ si et seulement s'il existe des matrices $P,Q \in M_n(k)$ telles que $M = PJ_rQ$, où $J_r$ est la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $\varphi$ l'homomorphisme d'anneaux $k[T_{ij}] \to k[S_{ij},U_{ij}]$ défini par la condition suivante : quel que soient $p,q \in \{1,\ldots,n\}$, $\varphi(T_{pq})$ est le polynôme en les variables $(S_{ij})$ et $(U_{ij})$ donnant le coefficients d'indice $(p,q)$ de la matrice $(S_{ij})J_r(U_{ij})$ (en guise d'exemple, pour $n=2$ et $r=2$ : $\varphi(T_{11}) = S_{11}U_{11}+S_{12}U_{21}$, $\varphi(T_{12}) = S_{11}U_{12}+S_{12}U_{22}$ etc.). L'application associée

$$^a\varphi : \mathrm{Spec}(k[S_{ij},U_{ij}]) \to \mathrm{Spec}(k[T_{ij}])$$

envoie un idéal maximal sur un idéal maximal (cf. exercice 9, 4)) ; identifiant ceux-ci aux éléments de $M_n(k)\times M_n(k) = k^{n^2}\times k^{n^2}$ et de $M_n(k) = k^{n^2}$ respectivement, l'homomorphisme est construit de telle sorte que $^a\varphi(P,Q) = PJ_rQ$ pour toutes matrices $P,Q \in M_n(k)$. Une application continue surjective envoyant automatiquement un espace irréductible sur un espace irréductible (la vérification est immédiate), $F_r$ est ainsi un fermé irréductible de $M_n(k)$.

2) Soit $\Delta \in \mathbb{Z}[T_{ij}]$ le déterminant de la matrice $(T_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}[T_{ij}])$ et soit $k$ un corps algébriquement clos. Identifiant $M_n(k) = k^{n^2}$ et l'ensemble $X_0$ des idéaux maximaux de $k[T_{ij}]$, $F_{n-1} = X_0 \cap V(\Delta)$ et le fermé $V(\Delta)$ de $\mathrm{Spec}(k[T_{ij}])$ est donc irréductible en vertu de la question 4 de l'exercice 8.

Pour en conclure que le polynôme $\Delta$ est irréductible, il suffirait de savoir que l'idéal qu'il engendre est premier : une identité $\Delta = fg$ avec $f,g \in k[T_{ij}]$ impliquerait en effet $f \in (\Delta)$ ou $g \in (\Delta)$ puis $\Delta(1-Fg) = 0$ ou $\Delta(1-fG) = 0$ et donc $g \in k[T_{ij}]^\times$ ou $f \in k[T_{ij}]^\times$ ; *a priori*, on sait seulement que la racine $\mathfrak{r}(\Delta) = \{f \in k[T_{ij}] \mid \exists n \geq 1,\ f^n \in (\Delta)\}$ de $(\Delta)$ est un idéal premier.Pour conclure, on peut utiliser le fait que l'anneau $k[T_{ij}]$ est *factoriel*, c'est-à-dire que tout polynôme s'écrit d'une manière et d'une seule comme un produit de polynômes irréductibles : $\mathfrak{r}(\Delta)$ est alors l'idéal principal engendré par le produit des polynômes irréductibles distincts apparaîssant dans la décomposition de $\Delta$, $\Delta$ est par conséquent une puissance $n$-ème d'un polynôme irréductible et on vérifie directement que cela est impossible avec $n \geq 2$.