ALGÈBRE COMMUTATIVE II : CORRIGÉ

Exercice 1 (*Localisation des modules*) — 1) Si (M',λ') et (M'',λ'') sont deux couples satisfaisant à la propriété universelle considérée, on tire de cette dernière des applications $S^{-1}A$-linéaires $\varphi : M' \to M''$ et $\psi : M'' \to M'$, uniquement définies et telles que

$$\lambda'' = \varphi \circ \lambda' \text{ et } \lambda' = \psi \circ \lambda''$$

(prendre successivement pour N les $S^{-1}A$ modules M' et M''). Vu les identités

$$(\psi \circ \varphi) \circ \lambda' = \lambda' = \mathrm{id}_{M'} \circ \lambda' \text{ et } (\varphi \circ \psi) \circ \lambda'' = \lambda'',$$

on déduit de nouveau de la propriété universelle que $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{M'}$, $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{M''}$ et nous avons ainsi établi que les $S^{-1}A$-modules sont isomorphes via un isomorphisme uniquement déterminé (en l'occurrence φ).

La technique de construction de l'anneau de fractions $S^{-1}A$ permet de construire un couple $(S^{-1}M,\lambda)$ satisfaisant à la propriété universelle : on définit $S^{-1}M$ comme le quotient de l'ensemble $M \times S$ par la relation d'équivalence

$$(m,s) \sim (m',s') \iff (\exists t \in S,\ t(s'm - sm') = 0),$$

muni de la structure de groupe abélien définie par $[(m,s)] + [(m',s')] = [(s'm + sm', ss')]$, $0 = [(0,1)]$ et dont on fait un $S^{-1}A$-module en posant $[(a,s)].[(m,s')] = [(am,ss')]$; l'application A-linéaire $\lambda : M \to S^{-1}M$ est enfin définie en envoyant $m \in M$ sur $[(m,1)]$. On note généralement sous forme fractionnaire $\frac{m}{s}$ la classe $[(m,s)]$ d'un couple $(m,s) \in M \times S$.

Il est à peu près immédiat de vérifier que l'on a bien construit ainsi une solution au problème universel que l'on a considéré.

Étant donnés des A-modules M', M et M'', il découle immédiatement de la propriété universelle caractérisant les modules localisés que toute application A-linéaire $f : M' \to M$ induit une application $S^{-1}A$-linéaire $S^{-1}M' \to S^{-1}M$, notée $S^{-1}f$ ou simplement f si cela ne prête pas à confusion, uniquement caractérisée par l'identité $S^{-1}f \circ \lambda_{M'} = \lambda_M \circ f$. Du point de vue de la construction des modules de fractions que l'on a adoptée, $S^{-1}f$ envoie $[(m,s)]$ sur $[(f(m),s)]$. Enfin , quelles que soient les applications A-linéaires $f : M' \to M$ et $g : M \to M''$, $S^{-1}(g\, circ f) = (S^{-1}g) \circ (S^{-1}f)$.

2) La localisation des modules transforme les suites exactes en suites exactes (on dit que le foncteur de localisation est *exact*) : étant donnée une suite exacte de A-modules $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} N'' \longrightarrow 0$, la suite de $S^{-1}A$-modules

$$0 \longrightarrow S^{-1}N' \xrightarrow{\alpha} S^{-1}N \xrightarrow{\beta} S^{-1}N'' \longrightarrow 0$$

est exacte. La vérification en est aisée : par exemple, l'exactitude en $S^{-1}N$ s'obtient en observant qu'un élément x de $S^{-1}N$ appartient au noyau de β si et seulement si $x = n/s$ avec $n \in N$ et $s \in S$ tels que $\beta(n)/s = 0$, condition équivalente à l'existence de $t \in S$ tel que $t\beta(n) = 0$; comme $t\beta(n) = \beta(tn)$, ceci équivaut encore à l'existence de $n' \in N'$ tel que $tn = \alpha(n')$, c'est-à-dire tel que $x = n/s = \alpha(n')/ts$.

Ce que l'on vient de dire prouve que, pour tout A-module M et tout sous-module N de M,

- $S^{-1}N$ est un sous-module de $S^{-1}M$;
- l'application $S^{-1}A$-linéaire canonique $S^{-1}M \to S^{-1}(M/N)$, provenant de la projection $M \to M/N$, induit un isomorphisme de $S^{-1}M/S^{-1}N$ sur $S^{-1}(M/N)$

3) Supposons que M soit un A-module de type fini et soient $x_1,\dots,x_n$ des générateurs de M. La condition $S^{-1}M = 0$ implique l'existence, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, d'un élément s_i de S tel que $s_i x_i = 0$ et il suffit de poser $s = s_1 \dots s_n$ pour obtenir un élément de S annulant chacun des générateurs de M et donc annulant M.

4) Soit m un élément de M dont les images dans chacun des localisés $M_{\mathfrak{m}}$ est nulle ($\mathfrak{m}$ = idéal maximal de A). Considérons l'*annulateur* de m, c'est-à-dire l'idéal $\mathrm{Ann}(m)$ de A constitué de tous les $a \in A$ tels que $am = 0$. L'hypothèse que l'on a faite sur m garantit $\mathrm{Ann}(m) \cap (A - \mathfrak{m}) \neq \emptyset$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A ; on a donc $\mathrm{Ann}(m) = A$ et $m = 0$.

Exercice 2 — 1) On fois que l'on a observé que les éléments f_i et f_j de A sont inversibles dans $\mathrm{A}[(f_i f_j)^{-1}]$, c'est une simple application de la propriété universelle caractérisant la localisation.

2) L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) est immédiate puisque les images de m_i et m_j dans $\mathrm{M}[(f_i f_j)^{-1}]$ coïncident avec celle de m.

Pour établir l'implication réciproque, on commence par choisir un sous-ensemble *fini* J de I tel les f_j, $j \in \mathrm{J}$, engendrent l'idéal unité de A. Étant donné $i \in \mathrm{J}$, écrivons m_i sous la forme $f_i^{-r_i}\tilde{m}_i$ avec $r_i \in \mathbb{N}$ et $\tilde{m}_i \in \mathrm{M}$; comme J est fini, on peut supposer tous les r_i égaux : $r_i = r$. Quels que soient $i, j \in \mathrm{J}$, la condition $m_i/1 = m_j/1$ dans $\mathrm{M}[(f_i f_j)^{-1}]$ se traduit par l'existence d'un entier naturel s_{ij} tel que $(f_i f_j)^{s_{ij}}(f_i^r \tilde{m}_j - f_j^r \tilde{m}_i) = 0$; on peut de nouveau supposer tous les s_{ij} égaux : $s_{ij} = s$. Nous avons donc

$$f_i^{r+s} f_j^s \tilde{m}_j = f_j^{r+s} f_i^s \tilde{m}_i$$

pour tous $i, j \in \mathrm{J}$.

Les éléments f_j, $j \in \mathrm{J}$, engendrant l'idéal unité de A, il en est de même des éléments f_j^{r+s}, $j \in \mathrm{J}$ (observer qu'aucun idéal maximal de A ne peut tous les contenir) et il existe donc des éléments g_j de A tels que $1 = \sum_{j\in \mathrm{J}} g_j f_j^{r+s}$. Posons alors $m = \sum_{j\in\mathrm{J}} g_j f_j^s \tilde{m}_j$; c'est un élément de M. Quel que soit $i \in \mathrm{J}$,

$$\begin{aligned} f_i^{s+r} m &= \sum_{j\in\mathrm{J}} g_j f_i^{r+s} f_j^s \tilde{m}_j \\ &= \sum_{j\in\mathrm{J}} g_j f_j^{r+s} f_i^s \tilde{m}_i \\ &= \left(\sum_{j\in\mathrm{J}} g_j f_j^{s+r}\right) f_i^s \tilde{m}_i = f_i^s \tilde{m}_i \end{aligned}$$

et donc $m/1 = f_i^{-r}\tilde{m}_i = m_i$ dans $\mathrm{M}[f_i^{-1}]$.

Il reste à vérifier que l'élément m de M que l'on vient de construire est d'image m_i dans $\mathrm{M}[f_i^{-1}]$ pour tout $i \in \mathrm{I}$ et qu'il est uniquement déterminé. Ces deux résultats découlent du fait suivant : quelle que soit la famille $(h_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ d'éléments de A engendrant l'idéal unité, l'homomorphisme canonique $\mathrm{M} \to \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{M}[h_\lambda^{-1}]$ est *injectif*. Vérification : il existe un sous-ensemble fini Λ_0 de Λ tel que les h_λ, $\lambda \in \Lambda_0$, engendrent l'idéal unité ; si $m \in \mathrm{M}$ est d'image nulle dans chacun des $\mathrm{M}[h_\lambda^{-1}]$, $\lambda \in \Lambda_0$, il existe un entier naturel n tel que $h_\lambda^n m = 0$ pour tout $\lambda \in \Lambda_0$ et, la famille $(h_\lambda^n)_{\lambda\in\Lambda_0}$ engendrant également l'idéal unité, $m = 1.m = 0$.

Ce que nous venons de voir établit clairement l'unicité de l'élément m de M d'image m_j dans $\mathrm{M}[f_j^{-1}]$ pour tout $j \in \mathrm{J}$. Cela garantit que m_i est l'image de m dans $\mathrm{M}[f_i^{-1}]$ pour tout $i \in \mathrm{I}$: il suffit en effet d'observer que les f_j, $j \in \mathrm{J}$, engendrent l'idéal unité de $\mathrm{A}[f_i^{-1}]$ et que $m/1$ et $m_i/1$ coïncident dans $\mathrm{M}[(f_i f_j)^{-1}] = \mathrm{M}[f_i^{-1}][f_j^{-1}]$ pour tout $j \in \mathrm{J}$.

3) On considère maintenant une algèbre de type fini sur un corps algébriquement clos k. Étant donnée une fonction régulière f sur $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, il existe par hypothèse un recouvrement de $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ par des ouverts U tels que $f_{|\mathrm{U}\cap\mathrm{Max}(\mathrm{A})} = \tilde{a}/\tilde{b}$ avec $a, b \in \mathrm{A}$ et $\tilde{b}(\mathfrak{m}) \neq 0$ pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{U} \cap \mathrm{Max}(\mathrm{A})$; quitte à raffiner le recouvrement, on peut supposer qu'il est constitué d'ouverts principaux $\mathrm{D}(h_i)$, $i \in \mathrm{I}$, car ces derniers engendrent la topologie de $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$. Un élément b de A tel que $\tilde{b}(\mathfrak{m}) \neq 0$ pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{D}(h_i) \cap \mathrm{Max}(\mathrm{A})$ est inversible dans l'anneau $\mathrm{A}[h_i^{-1}]$ car $\mathrm{D}(h_i)$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Spec}(\mathrm{A}[h_i^{-1}])$; l'hypothèse peut donc se reformuler ainsi : il existe des éléments h_i de A ainsi que des éléments f_i de $\mathrm{A}[h_i^{-1}]$, $i \in \mathrm{I}$, tels que la restriction de f à $\mathrm{D}(h_i) \cap \mathrm{Max}(\mathrm{A})$ soit la fonction $\tilde{f}_i$ pour tout $i \in \mathrm{I}$.

Quels que soient $i, j \in \mathrm{I}$, f_i et f_j définissent la même fonction sur $\mathrm{D}(h_i) \cap \mathrm{D}(h_j) \cap \mathrm{Max}(\mathrm{A})$; de manière équivalente, l'image de $f_i - f_j$ dans $\mathrm{A}[(h_i h_j)^{-1}]$ est contenue dans tous les idéaux maximaux de cet anneau. Comme ce dernier est une k-algèbre de type fini, donc un anneau de Jacobson, $f_i - f_j$ appartient à tous les idéaux *premiers* de $\mathrm{A}[(h_i h_j)^{-1}]$ et est donc nilpotent. Nous obtenons ainsi l'identité de f_i et f_j dans $(\mathrm{A}/\mathfrak{N})[(h_i h_j^{-1})]$ et nous sommes donc dans les conditions d'application de la question 2) : il existe un élément a de A dont l'image dans $(\mathrm{A}/\mathfrak{N})[f_i^{-1}] = \mathrm{A}[f_i^{-1}]/\mathfrak{N}$ coïncide avec celle de f_i pour tout $i \in \mathrm{I}$, c'est-à-dire tel que $\tilde{a} = f$.

L'homomorphisme $\mathrm{A} \to \mathscr{R}(\mathrm{A})$, $a \mapsto \tilde{a}$ induit donc un isomorphisme de $\mathrm{A}/\mathfrak{N}$ sur $\mathscr{R}(\mathrm{A})$.

Exercice 3 — 1) L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) est claire.

Supposons réciproquement que $\mathrm{M} = \mathfrak{a}\mathrm{M}$ et soient $x_1, \ldots, x_n$ des générateurs de M. Il existe par hypothèse des éléments a_{ij} de $\mathfrak{a}$ tels que $x_j = \sum_{1\le i\le n} a_{ij}x_i$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$; posant $a'_{ij} = \delta_{ij} - a_{ij}$, ces conditions s'écrivent sous la forme $\sum_{1\le i\le n} a'_{ij}x_i = 0$ $(1 \le j \le n)$. Les relations de Cramer fournissent une matrice (b_{ij}) à coefficients dans A telle que

$$(b_{ij})(a'_{ij}) = \det(a'_{ij})\mathrm{I}_n$$

et, posant $a = \det(a'_{ij})$, nous obtenons finalement $ax_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

En développant $a = \det(a'_{ij})$, on constate qu'il s'agit d'un élément de A tel que $a - 1 \in \mathfrak{a}$; a est d'autre part un annulateur de M puisqu'il annule un système de générateurs.

Remarque : cet énoncé généralise le lemme de Nakayama, que l'on retrouve en prenant pour A *un anneau local et pour* $\mathfrak{a}$ *son idéal maximal.*

2) Le module M étant de type fini sur A, il existe par hypothèse un entier naturel $r \ge 1$ et une suite exacte de A-modules $\mathrm{A}^r \to \mathrm{M} \to 0$. Cette suite reste exacte après localisation en $\mathfrak{p}$ (cf. exercice 1), fournissant ainsi une suite exacte de $\mathrm{A}_\mathfrak{p}$-modules

$$(\mathrm{A}_\mathfrak{p})^r = (\mathrm{A}^r)_\mathfrak{p} \to \mathrm{M}_\mathfrak{p} \to 0$$

et, par réduction modulo $\mathfrak{p}\mathrm{A}_\mathfrak{p}$, une suite exacte de $\kappa(\mathfrak{p})$-espaces vectoriels

$$\kappa(\mathfrak{p})^r = (\mathrm{A}_\mathfrak{p})^r(\mathfrak{p}) \to \mathrm{M}(\mathfrak{p}) \to 0\ ,$$

ce qui montre que $\mathrm{M}(\mathfrak{p})$ est un $\kappa(\mathfrak{p})$-espace vectoriel de dimension finie.

Nous allons maintenant vérifier que la fonction $d : \mathrm{Spec}(\mathrm{A}) \to \mathbb{Z}$, $\mathfrak{p} \mapsto \dim_{\kappa(\mathfrak{p})}\mathrm{M}(\mathfrak{p})$ est *semi-continue supérieurement* : elle ne peut que *décroître* au voisinage d'un point.

Considérons en effet un point $\mathfrak{p}$ dans $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ et posons $r = d(\mathfrak{p})$. Partant d'un isomorphisme u de $\kappa(\mathfrak{p})^r$ sur $\mathrm{M}(\mathfrak{p})$, un relèvement arbitraire de u en une application A-linéaire $u' : \mathrm{A}_\mathfrak{p}^r \to \mathrm{M}_\mathfrak{p}$ est surjectif en vertu du lemme de Nakayama. Notant $(e_1, \ldots, e_r)$ la base canonique de $(\mathrm{A}_\mathfrak{p})^r$, il existe un élément f de $\mathrm{A} - \mathfrak{p}$ tel que $u'(e_i)$ s'écrive sous la forme $u'(e_i) = f^{-1}m_i$ avec $m_i \in \mathrm{M}$ $(1 \le i \le r)$, ce qui permet de définir une application $\mathrm{A}[f^{-1}]$-linéaire u'' de $\mathrm{A}[f^{-1}]^r$ dans $\mathrm{M}[f^{-1}]$ (nous sommes passés d'une situation *ponctuelle*, au point $\mathfrak{p}$, à une situation *locale*, sur l'ouvert $\mathrm{D}(f)$) redonnant u' par localisation en $\mathfrak{p}$. Le conoyau N de u'' est un $\mathrm{A}[f^{-1}]$-module de type fini (car quotient du $\mathrm{A}[f^{-1}]$-module de type fini $\mathrm{M}[f^{-1}]$) et, la localisation préservant les suites exactes, $\mathrm{N}_\mathfrak{p}$ est le conoyau de u', à savoir 0 ; il existe par conséquent un élément g de $\mathrm{A}[f^{-1}] - \mathfrak{p}$ tel que $g\mathrm{N} = 0$. Écrivant g sous la forme $f^{-n}a$ et posant $h = af$, nous venons de vérifier que la suite de $\mathrm{A}[h^{-1}]$-modules

$$\mathrm{A}[h^{-1}]^r \to \mathrm{M}[h^{-1}] \to 0,$$

déduite de u'' par localisation, est exacte ; elle reste exacte par localisation en tout point $\mathfrak{q}$ de $\mathrm{D}(h)$, ce qui implique $d(\mathfrak{q}) \le r$ en ces points, et il reste à observer que $\mathrm{D}(h)$ est un voisinage ouvert de $\mathfrak{p}$ puisque $h \in \mathrm{A} - \mathfrak{p}$.

3) Soit M un A-module de type fini et soit u un endomorphisme *surjectif* de M. On fait de M un A[T]-module en posant $\mathrm{T}.m = u(m)$ pour tout $m \in \mathrm{M}$. La surjectivité de u se alors traduit par l'égalité $\mathrm{M} = (\mathrm{T})\mathrm{M}$ et il existe donc un polynôme $f \in \mathrm{K}[T]$ tel que $f\mathrm{M} = 0$ et $f \equiv 1 \bmod (\mathrm{T})$ (cf. 1). Étant alors donné $m \in \mathrm{M}$ tel que $u(m) = 0$, $f.m = m$ et donc $m = 0$; l'application u est un isomorphisme.

Exercice 4 — 1) Il suffit de considérer la suite exacte

$$0 \to \mathrm{M} \cap \mathrm{N} \to \mathrm{M} \oplus \mathrm{N} \to \mathrm{M} + \mathrm{N} \to 0,$$

d'en déduire que le A-module $\mathrm{M} \oplus \mathrm{N}$ est de type fini et d'observer que M et N sont des quotients de $\mathrm{M} \oplus \mathrm{N}$.

2) Si l'idéal $\mathfrak{a}$ de A est de type fini, il suffit de considérer un épimorphisme $\mathrm{A}^n \to \mathfrak{a}$ pour obtenir une présentation finie $\mathrm{A}^n \to \mathrm{A}$ du module $\mathrm{A}/\mathfrak{a}$.

Supposons réciproquement que $\mathrm{A}/\mathfrak{a}$ soit un A-module de présentation finie et considérons une suite exacte de A-modules

$$\mathrm{A}^n \xrightarrow{u} \mathrm{A}^m \longrightarrow \mathrm{A}/\mathfrak{a} \longrightarrow 0.$$

Étant donné un élément x_0 de A^n tel que $v(x_0) = \overline{1}$, il est facile de vérifier que la suite de A-modules

$$\mathrm{A}^m \oplus \mathrm{A} \xrightarrow{u'} \mathrm{A}^n \oplus \mathrm{A} \xrightarrow{v'} \mathrm{A}/\mathfrak{a} \longrightarrow 0\ ,$$

dans laquelle les applications linéaires u' et v' sont définies par $u'(y,a) = (u(y) - ax_0, a)$ et $v'(x,a) = v(x) + a\overline{1}$, est encore exacte ; ce qu'on a gagné, c'est que le générateur $\overline{1}$ de $\mathrm{A}/\mathfrak{a}$ est l'image par v' d'un élément de la base canonique de $\mathrm{A}^n \oplus \mathrm{A}$.

Le choix de relèvements de $v(e_1), \ldots, v(e_n)$ dans A permet de définir une application A-linéaire $t : \mathrm{A}^n \oplus \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ relevant v' et envoyant e_{n+1} sur 1 (car $v'(e_{n+1}) = \overline{1}$). Désignant par p la projection canonique de A sur $\mathrm{A}/\mathfrak{a}$, $p \circ t \circ u' = v' \circ u' = 0$; l'application $s = t \circ u$ est donc à valeurs dans l'idéal $\mathfrak{a}$. Cette application est surjective :

$$a = at(e_{n+1}) = t(ae_{n+1})$$

pour tout $a \in \mathrm{A}$ car $v(e_{n+1}) = 1$ et, si a appartient à $\mathfrak{a}$, ae_{n+1} est dans l'image de u' puisque $v'(ae_{n+1}) = pt(ae_{n+1}) = p(a) = 0$. Ceci prouve que l'idéal $\mathfrak{a}$ est de type fini.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A}^m \oplus \mathrm{A} \arrow[r, "u'"] \arrow[ddrr, "s"] & \mathrm{A}^n \oplus \mathrm{A} \arrow[r, "v'"] \arrow[dr, "t"] & \mathrm{A}/\mathfrak{a} \arrow[r] & 0 \\
& & \mathrm{A} \arrow[u, "p"'] \arrow[r] & 0 \\
& & \mathfrak{a} \arrow[u] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(ii) Étant donnés une suite exacte de A-modules

$$0 \longrightarrow \mathrm{M}' \xrightarrow{f} \mathrm{M} \xrightarrow{g} \mathrm{M}'' \longrightarrow 0$$

ainsi que des présentations

$$\mathrm{A}^m \xrightarrow{u'} \mathrm{A}^n \xrightarrow{v'} \mathrm{M}' \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{A}^p \xrightarrow{u''} \mathrm{A}^q \xrightarrow{v''} \mathrm{M}'' \longrightarrow 0$$

de M' et M'', on vérifie sans difficulté que l'on obtient une présentation

$$\mathrm{A}^m \oplus \mathrm{A}^p \xrightarrow{u} \mathrm{A}^n \oplus \mathrm{A}^q \xrightarrow{v} \mathrm{M} \longrightarrow 0$$

de M en définissant les applications linéaires u et v comme suit :
- $v_{|\mathrm{A}^n} = f \circ v'$ et $v_{|\mathrm{A}^q}$ est un relèvement de v'' à M ;
- $u_{|\mathrm{A}^m}$ est l'application u' composée par l'injection canonique de A^n dans $\mathrm{A}^n \oplus \mathrm{A}^q$ et $u_{|\mathrm{A}^p}$ est l'application u'' composée par l'injection canonique de A^q dans $\mathrm{A}^n \oplus \mathrm{A}^q$.

Exercice 5 (*Module des différentielles*) — 1) On vérifie sans difficulté que, si D, D' sont deux A-dérivations de B dans un B-module M, l'application A-linéaire $\mathrm{D} + b\mathrm{D}' : \mathrm{B} \to \mathrm{M}$ en est encore une pour tout $b \in \mathrm{B}$.

2) Étant donnée une dérivation $\mathrm{D} \in \mathrm{Der}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}, \mathrm{M})$, $f \circ \mathrm{D}$ est une application A-linéaire de B dans M' telle que

$$(f \circ \mathrm{D})(b'b'') = f(b'\mathrm{D}(b'') + b''\mathrm{D}(b')) = b'(f \circ \mathrm{D})(b'') + b''(f \circ \mathrm{D})(b')$$

pour tous $b', b'' \in \mathrm{B}$; c'est donc une A-dérivation de B dans M'.

3) S'il existe, le couple $(\Omega^1_{\mathrm{B}/\mathrm{A}}, d_{\mathrm{B}/\mathrm{A}})$ est unique à isomorphisme unique près (la démonstration est la même que pour la question 1 du premier exercice) ; il reste donc à le construire.

Soit L le B-module libre de base B :

$$\mathrm{L} = \bigoplus_{b \in \mathrm{B}} \mathrm{B}e_b$$

et soit R le sous-module engendré par les éléments de la forme

$$e_{b+b'} = e_b + e_{b'}, \ e_{ab} = ae_b, \ e_{bb'} = be_{b'} + b'e_b$$

avec $a \in \mathrm{A}$, $b, b' \in \mathrm{B}$. On pose $\Omega^1_{\mathrm{B}/\mathrm{A}} = \mathrm{L}/\mathrm{R}$ et on note $d_{\mathrm{B}/\mathrm{A}}$ l'application canonique de B dans $\Omega^1_{\mathrm{B}/\mathrm{A}}$ envoyant b sur la classe de e_b ; c'est clairement une A-dérivation.

Étant donné un B-module M, nous avons fait tout ce qu'il fallait pour que la correspondance $u \mapsto u \circ d_{\mathrm{B}/\mathrm{A}}$ identifie les applications B-linéaires de $\Omega^1_{\mathrm{B}/\mathrm{A}}$ dans M aux applications A-linéaires de B dans M satisfaisant à la condition de Leibniz.

4) Soient S une partie multiplicative de B et M un $S^{-1}B$-module. L'homomorphisme canonique $B \to S^{-1}B$ induit par composition une application $\mathrm{Der}_A(S^{-1}B, M) \to \mathrm{Der}_A(B, M)$. Cette application est injective : si $D \in \mathrm{Der}_A(S^{-1}B, M)$ s'annule identiquement sur B, l'identité $0 = D(1) = D(ss^{-1}) = sD(s^{-1}) + s^{-1}D(s)$ implique $D(s^{-1}) = -s^{-2}D(s) = 0$ pour tout $s \in S$ et D est identiquement nulle. Cette application est surjective : étant donnée une A-dérivation D de B dans M, on prolonge D en une A-dérivation $\tilde{D}$ de $S^{-1}B$ dans M en posant $\tilde{D}(s^{-1}b) = -bs^{-2}D(s) + s^{-1}D(b)$ pour tous $b \in B$, $s \in S$.

En composant l'homomorphisme canonique $B \to S^{-1}B$ par la dérivation $d_{S^{-1}B/A}$, on obtient une A-dérivation de B dans le $S^{-1}B$-module $\Omega^1_{S^{-1}B/A}$ qui se factorise à travers $d_{B/A}$ en une application B-linéaire de $\Omega^1_{B/A}$ dans $\Omega^1_{S^{-1}B/A}$ (cf. question précédente), puis en une application $S^{-1}B$-linéaire $\iota : S^{-1}\Omega^1_{B/A} \to \Omega^1_{S^{-1}B/A}$ en vertu de la propriété universelle caractérisant la localisation des modules. Pour établir que ι est un isomorphisme, il suffit d'observer que, quel que soit le $S^{-1}B$-module M, l'application qu'elle induit

$$\mathrm{Der}_A(S^{-1}B, M) = \mathrm{Hom}_{S^{-1}B}(\Omega^1_{S^{-1}B/A}, M) \to \mathrm{Hom}_{S^{-1}B/A}(S^{-1}\Omega^1_{B/A}, M) = \mathrm{Der}_A(B, M)$$

n'est autre que la restriction à B des A-dérivations de $S^{-1}B$ dans M ; comme on a vérifié qu'il s'agit d'une bijection, ι est un isomorphisme.

5) (i) L'application $d_{C/A} \circ p$ est une A-dérivation de B dans $\Omega^1_{C/A}$; il existe donc une unique application B-linéaire $\psi : \Omega^1_{B/A} \to \Omega^1_{C/A}$ telle que de $d_{C/A} \circ p = \psi \circ d_{B/A}$. Comme $\psi(\mathfrak{I}\Omega^1_{B/A}) = \mathfrak{I}\psi(\Omega^1_{B/A}) = 0$, cette application se factorise en outre en une application C-linéaire de $\Omega^1_{B/A}/\mathfrak{I}\Omega^1_{B/A}$ dans $\Omega^1_{C/A}$.

(ii) Il découle directement de la règle de Leibniz que le noyau de l'application A-linéaire de $\mathfrak{I}$ dans $\Omega^1_{C/A}$ induite par $\psi \circ d_{B/A}$ contient $\mathfrak{I}^2$. L'application obtenue $\delta : \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \to \Omega^1_{C/A}$ est $C = B/\mathfrak{I}$-linéaire car

$$\delta(b\beta) = b\delta(\beta) + \beta\delta(b) = b\delta(\beta)$$

pour tous $b \in B$, $\beta \in \mathfrak{I}$.

(iii) Soit M un C-module et considérons la suite obtenue en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_C(\cdot, M)$ à la suite de C-modules

$$\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega^1_{B/A}/\mathfrak{I}\Omega^1_{B/A} \xrightarrow{\psi} \Omega^1_{C/A} \longrightarrow 0 \;\; ;$$

vu la question 3, il s'agit de la suite de C-modules

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}_A(C, M) \xrightarrow{\cdot\circ\psi} \mathrm{Der}_A(B, M)' \xrightarrow{\cdot\circ\delta} \mathrm{Hom}_C(\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2, M),$$

où $\mathrm{Der}_A(B, M)'$ désigne le sous-module de $\mathrm{Der}_A(B, M)$ constitué des A-dérivations de B dans M s'annulant identiquement sur $\mathfrak{I}$. L'exactitude de cette suite de C-module se vérifiant immédiatement, nous en déduisons quel la suite initiale

$$\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega^1_{B/A}/\mathfrak{I}\Omega^1_{B/A} \xrightarrow{\psi} \Omega^1_{C/A} \longrightarrow 0$$

est exacte.

6) Soit I un ensemble et soit $B = A[(T_i)_{i \in I}]$. Quel que soit le B-module M, l'application

$$\mathrm{Der}_A(B, M) \to M^I, \;\; D \mapsto (i \mapsto D(T_i))$$

est une bijection en vertu de l'identité

$$D(P) = \sum_{i \in I} \frac{\partial P}{\partial T_i} D(T_i)$$

pour tout $P \in B$, conséquence directe de la relation de Leibniz (P ne faisant intervenir qu'un nombre fini d'indéterminées, les dérivées partielles sont nulles pour presque tout $i \in I$ et le terme de droite est donc bien défini).

Comme

$$\mathrm{Hom}_B(B^{(I)}, M) = M^I,$$

nous en déduisons que l'unique application B-linéaire $\mathrm{B}^{(\mathrm{I})} \to \Omega^1_{\mathrm{B/A}}$ envoyant e_i sur $d_{\mathrm{B/A}}(\mathrm{T}_i)$ pour tout $i \in \mathrm{I}$ est un isomorphisme du B-module libre de base I

$$\mathrm{B}^{(\mathrm{I})} = \bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{B}e_i$$

sur $\Omega^1_{\mathrm{B/A}}$.

7) En vertu des questions 5 et 6, $\Omega^1_{\mathrm{C/A}}$ est le quotient du C-module libre

$$\Omega^1_{\mathrm{B/A}}/\mathfrak{I}\Omega^1_{\mathrm{B/A}} = \bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{C}d_{\mathrm{C/A}}(\mathrm{T}_i)$$

par le sous-module engendré par les $\delta(f)$, $f \in \mathfrak{I}$; comme $\delta(f)$ n'est autre que la classe de $d_{\mathrm{B/A}}(f)$,

$$\delta(f) = \sum_{i\in\mathrm{I}} \frac{\partial f}{\partial \mathrm{T}_i} d_{\mathrm{C/A}}(\mathrm{T}_i)$$

pour tout $f \in \mathfrak{I}$ et l'assertion est démontrée.

8) On a respectivement

$$\Omega^1_{\mathrm{B/A}} = \frac{\mathrm{B}d\mathrm{T}_1 \oplus \mathrm{B}d\mathrm{T}_2}{\mathrm{B}((1+3\mathrm{T}_1^2)d\mathrm{T}_1 - 2\mathrm{T}_2 d\mathrm{T}_2)},\ \ \Omega^1_{\mathrm{B/A}} = \frac{\mathrm{B}d\mathrm{T}_1 \oplus \mathrm{B}d\mathrm{T}_2}{\mathrm{B}(2\mathrm{T}_1 d\mathrm{T}_1 - 3\mathrm{T}_2 d\mathrm{T}_2)},\ \ \text{et}\ \ \Omega^1_{\mathrm{B/A}} = \mathrm{B}d\mathrm{T}_1 \oplus \mathrm{B}d\mathrm{T}_2.$$

Ce qu'il faut observer ici, c'est le phénomène suivant : étant donné un corps K étendant A et un homomorphisme $x : \mathrm{B} = \mathrm{A}[\mathrm{T}_1,\mathrm{T}_2]/(f) \to \mathrm{K}$, le point $(x_1,x_2) = (x(\mathrm{T}_1), x(\mathrm{T}_2))$ de K^2 appartient à la courbe définie par l'équation $f = 0$ et c'est un point *singulier* de celle-ci – c'est-à-dire un point en lequel les deux dérivées partielles de f s'annulent – si et seulement si le K-espace vectoriel $\Omega^1_{\mathrm{B/A}} \otimes_{\mathrm{B},x} \mathrm{K}$ est de dimension strictement supérieure à 1 (la dimension de la courbe).

Exercice 6 (*Modules projectifs, injectifs*) — 1) Le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},.)$ est exact s'il transforme toute suite exacte de A-modules en une suite exacte. Il suffit de vérifier cela pour les suites exactes *courtes* car toute suite exacte

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{M}_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \mathrm{M}_n \xrightarrow{f_n} \mathrm{M}_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

peut se représenter sous la forme d'un diagramme de suites exactes courtes

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{M}_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] & \mathrm{im}(f_{n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 & & & \\
& 0 \arrow[r] & \ker(f_n) \arrow[r] & \mathrm{M}_n \arrow[r, "f_n"] & \mathrm{im}(f_n) \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
& & & 0 \arrow[r] & \ker(f_{n+1}) \arrow[r] & \mathrm{M}_{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

dans lequel les flèches verticales sont des isomorphismes.

Quelle que soit la suite exacte courte de A-modules $0 \longrightarrow \mathrm{N}' \xrightarrow{u} \mathrm{N} \xrightarrow{v} \mathrm{N}'' \longrightarrow 0$, la suite (de groupes abéliens ou de A-modules, cela revient au même)

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{N}') \xrightarrow{u\circ\cdot} \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{N}) \xrightarrow{v\circ\cdot} \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{N}'')$$

est exacte ; par suite, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},.)$ est exact si et seulement si, pour toute application A-linéaire surjective $\mathrm{N} \to \mathrm{N}''$, chaque application A-linéaire de M dans N'' se relève en une application A-linéaire de M dans N :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{N} \arrow[r] & \mathrm{N}'' \arrow[r] & 0 \\
& \mathrm{M} \arrow[u] \arrow[ul, dotted] &
\end{tikzcd}$$

2. Il est clair que tout A-module libre est automatiquement projectif ; en fait, les A-modules projectifs sont exactement ceux pouvant se réaliser comme facteur direct d'un A-module libre.

Soit L un A-module libre et soit M un facteur direct de L, c'est-à-dire un quotient de L tel que la projection canonique $p : \mathrm{L} \to \mathrm{M}$ admette une *section* s. Étant données une application A-linéaire surjective $v : \mathrm{N} \to \mathrm{N}''$ et une application A-linéaire $\alpha : \mathrm{M} \to \mathrm{N}''$, $\alpha \circ p$ se relève en $\alpha' : \mathrm{L} \to \mathrm{N}$ et l'application $\alpha' \circ s : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ relève α.

Soit réciproquement M un A-module projectif et soit L le A-module libre de base M : $\mathrm{L} = \bigoplus_{m \in \mathrm{M}} \mathrm{A}e_m$. L'application A-linéaire de L dans M définie en envoyant e_m sur m étant tautologiquement surjective, la projectivité de M garantit l'existence d'une section $s : \mathrm{M} \to \mathrm{L}$ et M est donc bien facteur direct d'un A-module libre.

3. (i) ⇒ (ii). Lorsque A est un anneau local, un A-module de type fini M est projectif si et seulement s'il est libre ; vu la question précédente, il revient au même de dire que tout A-module de type fini est libre s'il est facteur direct d'un A-module libre.

Notons $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A et considérons une application A-linéaire surjective $p : \mathrm{A}^n \to \mathrm{M}$ admettant une section s. Choisissons d'autre part une application A-linéaire $q : \mathrm{A}^m \to \mathrm{M}$ induisant un isomorphisme après réduction modulo $\mathfrak{m}$; cette application est surjective en vertu du lemme de Nakayama, ce qui permet de relever p en une application A-linéaire $u : \mathrm{A}^n \to \mathrm{A}^m$. Appliquant de nouveau le lemme de Nakayama, $u \circ s \circ q$ est en endomorphisme surjectif de A^m ; il s'agit alors automatiquement d'un *automorphisme* (cf. exercice 3, 3), l'application q est par conséquent un isomorphisme et M est donc bien un A-module libre.

Remarque : étant donné un module libre de rang fini M *sur un anneau local* A, *la démonstration précédente établit que toute partie de* M *se réduisant en une base modulo l'idéal maximal est automatiquement une base de* M.

(ii) ⇒ (i) Le groupe abélien $\mathrm{Hom}_\mathrm{A}(\mathrm{M},\mathrm{N})$ des applications A-linéaires entre deux A-modules M et N est naturellement muni d'une structure de A-module si l'on pose $(au)(x) = a(u(x))$ pour tous $a \in \mathrm{A}$, $u \in \mathrm{Hom}_\mathrm{A}(\mathrm{M},\mathrm{N})$ et $x \in \mathrm{M}$. Étant donnée une partie multipicative S de A, l'application canonique de $\mathrm{Hom}_\mathrm{A}(\mathrm{M},\mathrm{N})$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}}(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M},\mathrm{S}^{-1}\mathrm{N})$ est A-linéaire et induit donc une application S^{-1}A-linéaire

$$\iota : \mathrm{S}^{-1}\mathrm{Hom}_\mathrm{A}(\mathrm{M},\mathrm{N}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}}(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M},\mathrm{S}^{-1}\mathrm{N})$$

(cf. exercice 1). Lorsque le A-module M est de type fini, il est clair que ι est *injective* : étant donnés une application A-linéaire $u \in \mathrm{Hom}_\mathrm{A}(\mathrm{M},\mathrm{N})$ et $s \in \mathrm{S}$, la condition $\iota(s^{-1}u)$ signifie que l'application S^{-1}A-linéaire induite par u est nulle et il existe donc pour chaque $m \in \mathrm{M}$ un $t \in \mathrm{S}$ tel que $tu(m) = 0$; supposer M de type fini permet de choisir $t \in \mathrm{S}$ indépendamment de m et cela implique la nullité de u dans $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{Hom}_\mathrm{A}(\mathrm{M},\mathrm{N})$.

Si l'on suppose en outre que l'anneau A est *noethérien,* il est facile de voir que ι est surjective, c'est-à-dire que toute application S^{-1}A-linéaire $v : \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M} \to \mathrm{S}^{-1}\mathrm{N}$ peut s'écrire sous la forme $v = s^{-1}u$ avec $s \in \mathrm{S}$ et $u \in \mathrm{Hom}_\mathrm{A}(\mathrm{M},\mathrm{N})$. Considérons en effet une application A-linéaire surjective $p : \mathrm{A}^n \to \mathrm{M}$ et désignons par e_i, $1 \le i \le n$, les éléments de la base canonique de A^n ; il existe un élément $t \in \mathrm{S}$ tel que $y_i = tu(p(e_i))$ appartienne à N pour tout i, ce qui permet de définir une application A-linéaire $\tilde{u} : \mathrm{A}^n \to \mathrm{N}$ en posant $\tilde{u}(e_i) = y_i$. Par construction, cette application envoie le sous-module $\ker(p)$ de A^n sur un sous-module de N d'image nulle dans $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{N}$. Supposer A noethérien garantit que le module $\ker(p)$ soit de type fini, de sorte qu'il existe un élément t' de S tel que $t'\tilde{u}(\ker(p)) = 0$ et donc que l'application A-linéaire $t'\tilde{u} : \mathrm{A}^n \to \mathrm{N}$ se factorise à travers p en une application A-linéaire de u de M dans N. Comme $tv \circ p = \tilde{u}$ et $tt'v \circ p = t'\tilde{u} = u \circ p$, nous en déduisons finalement l'identité $v = s^{-1}u$ avec $s = tt'$.

Sous l'hypothèse additionnelle que l'anneau A est noethérien, il est maintenant aisé d'établir l'implication (ii) ⇒ (i). Considérons en effet des A-modules N, N′ et une application A-linéaire surjective $v : \mathrm{N} \to \mathrm{N}''$. Soit Q le conoyau de l'application A-linéaire $\mathrm{Hom}_\mathrm{A}(\mathrm{M},\mathrm{N}) \to \mathrm{Hom}_\mathrm{A}(\mathrm{M},\mathrm{N}'')$, $u \mapsto v \circ u$. Via les identifications canoniques $\mathrm{Hom}_\mathrm{A}(\mathrm{M},\mathrm{N})_\mathfrak{p} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}_\mathfrak{p}}(\mathrm{M}_\mathfrak{p},\mathrm{N}_\mathfrak{p})$ et $\mathrm{Hom}_\mathrm{A}(\mathrm{M},\mathrm{N}'')_\mathfrak{p} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}_\mathfrak{p}}(\mathrm{M}_\mathfrak{p},\mathrm{N}''_\mathfrak{p})$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, la condition (ii) implique $\mathrm{Q}_\mathfrak{p} = 0$ pour tout $\mathfrak{p}$ et donc $\mathrm{Q} = 0$.

(ii) ⇒ (iii). Ici encore, il est nécessaire de supposer A noethérien.

Étant donnés un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A et un isomorphisme $u : \mathrm{A}_\mathfrak{p}^n \to \mathrm{M}_\mathfrak{p}$, il existe $g \in \mathrm{A} - \mathfrak{p}$ tel que $fu(e_i) \in \mathrm{M}$ pour tout i, ce qui permet de définir une application $\mathrm{A}[g^{-1}]$-linéaire $\mathrm{A}[g^{-1}]^n \to \mathrm{M}[g^{-1}]$ induisant u par localisation en $\mathfrak{p}$. Le noyau N et le conoyau Q de cette application sont des $\mathrm{A}[g^{-1}]$-modules tels que $\mathrm{N}_\mathfrak{p} = \mathrm{Q}_\mathfrak{p} = 0$. Comme M est de type fini, il en est de même de $\mathrm{M}[g^{-1}]$ et donc de Q tandis que N est de type fini grâce à l'hypothèse noethérienne faite sur A ; nous en déduisons l'existence d'un élément f de A tel que $f \in \mathrm{A} - \mathfrak{p}$ et $f\mathrm{N} = g\mathrm{Q} = 0$, donc tel que $\mathrm{M}[f^{-1}]$ soit libre. Nous avons ainsi établi l'existence d'un recouvrement de

$\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ par des ouverts principaux $\mathrm{D}(f)$ tels que le $\mathrm{A}[f^{-1}]$-module $\mathrm{M}[f^{-1}]$ soit libre, recouvrement que l'on peut supposer fini en vertu de la quasi-compacité de $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Cette implication est immédiate : tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A est contenu dans l'un des ouverts principaux $\mathrm{D}(f_i)$ et le $\mathrm{A}_\mathfrak{p}$-module $\mathrm{M}_\mathfrak{p}$, localisé de $\mathrm{M}[f_i^{-1}]$ en $\mathfrak{p}$, est libre.

4. Étant donné que tout A-module libre est projectif, l'existence d'une résolution projective pour tout A-module est une conséquence immédiate du fait que tout A-module est un quotient d'un A-module libre (cf. question 2).

5. La démonstration est analogue à celle de la question 1.

6. (i) Soient A un anneau intègre et M un A-module injectif. Étant donné $a \in \mathrm{A} - \{0\}$, la surjectivité de l'endomorphisme de multiplication par a sur M s'obtient aisément en considérant l'injection $\mathrm{A} \to \mathrm{A},\ x \mapsto ax$: un élément m de M donne naissance à une application A-linéaire de A dans M envoyant 1 sur m et l'existence d'un prolongement est équivalente à l'existence de $m' \in \mathrm{M}$ tel que $m = am'$.

(ii) Soient A un anneau principal et M un A-module divisible. Étant donnés un A-module N et un sous-module N' de N, soit u une application A-linéaire de N' dans M. Quel que soit l'élément x de N n'appartenant pas à N', il existe par hypothèse $f \in \mathrm{A}$ tel que $\{a \in \mathrm{A} \mid ax \in \mathrm{N}'\}$ soit l'idéal $\mathrm{A}f$ de A. Si $f = 0$, il suffit d'envoyer x sur 0 pour prolonger u au sous-module $\mathrm{N}' + \mathrm{A}x = \mathrm{N}' \oplus \mathrm{A}x$ de N ; sinon, la divisibilité de M garantit l'existence d'un élément m tel que $u(fx) = fm$ et l'application A-linéaire de $\mathrm{N}' \oplus \mathrm{A}x$ dans M envoyant $n + ax$ sur $u(n) + am$ se factorise à travers la projection $\mathrm{N}' \oplus \mathrm{A}x \to \mathrm{N}' + \mathrm{A}x$ pour définir un prolongement de u au sous-module $\mathrm{N}' + \mathrm{A}x$.

Il reste à appliquer le lemme de Zorn pour conclure que l'application u se prolonge à N : l'ensemble des sous-modules de N contenant N' et auquel l'application A-linéaire sur prolonge est non vide et inductif (la réunion d'une famille totalement ordonnée de tels sous-modules satisfait encore à cette condition), donc admet un élément maximal N'' ; ce dernier est nécessairement égal à N en vertu de ce qui précède.

(iii) L'anneau $\mathbb{Z}$ étant principal, le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est injectif car il est divisible.

Quel que soit l'entier naturel $n \geq 2$, l'unique application linéaire $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ envoyant 1 sur $\frac{1}{n}$ induit une application linéaire non nulle de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Par suite, étant donné un $\mathbb{Z}$-module non nul M, il existe une application linéaire non nulle $\mathbb{M} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$: quel que soit en effet $x \in \mathrm{M}$ non nul, le sous-module de M engendré par x est isomorphe à $\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n \geq 2$; il existe donc une application linéaire non nulle de $\mathrm{A}x$ dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et celle-ci se prolonge à M puisque $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}$-module injectif.